تحلیل حساسیت در تحلیل پوششی داده ها (حاشیه امنیت کارایی)

سعید اهدائی[1]، محمدرضا مهرگان
استادیار دانشگاه علم و فرهنگ s.ehdaie@usc.ac.ir

استاد دانشگاه تهران mehregan@ut.ac.ir

چکیده: يكي از كاربردي ترين روش هاي سنجش كارايي، استفاده از مدل هاي تحليل پوششي دادههاست. تحليل پوششي دادهها براي تعدادي واحد تصميمگيري همگن (واحدهايي با ورودیهاي يكسان و خروجيهاي يكسان) كارايي نسبي را اندازه گرفته و واحدهاي كارا و ناكارا را شناسايي مي‌كند.
از آنجا كه در روش تحليل پوششي دادهها، كارايي محاسبه شده براي واحد هاي تصميم گيري به صورت نسبي است، طبيعي است كه هر واحد با تلاش و بهبود عملكرد خود سعي مي كند تا در رقابت با ديگران جايگاه كارايي خود را از دست ندهد و حتي ارتقاء بخشد. اين تلاش و رقابت اگر چه می تواند باعث افزایش کارایی واحد مورد نظر شود اما ممکن است سایر واحدها، حتی واحدهایی که عملکرد خود را نیز بهبود بخشیده اند، با افت کارایی مواجه شوند. فاصلهاي كه هر واحد تصميم گيري از نظر كارايي با ساير واحدها دارد، همچنین استراتژی آن واحد در صرف منابع و تولید خروجی، حاشیه امنیتي را براي كارايي آن واحد ايجاد میکند. در دنیای رقابتی امروز اطلاع از این فاصله بسیار حائز اهمیت است. حاشیه امنیت کارایی که شاخصی است بر گرفته از اندیشه پژوهشگران این مقاله این فاصله را می سنجد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، تحلیل حساسیت، حاشیه امنیت کارایی، رقابت

1. مقدمه

تحليل پوششي دادهها[2]، روشي براي سنجش كارايي واحدهاي تصميمگيري[3] است كه همگي انواع يكساني از ورودي و خروجي دارند. يك واحد تصميم گيري موجوديتي است كه وظيفه تبديل ورودیها به خروجي را برعهده دارد و ارزيابي كارايي آن مورد نظر است [10]. تحلیل پوششی داده ها همچنان در کانون توجه پژوهشگران مختلف قرار دارد. اين امر هم به جهت مزاياي است كه مدل هاي مختلف آن دارد و هم به خاطر اهميت موضوعي است كه به آن پرداخته مي شود. موضوع سنجش و مقايسه كارايي واحد هاي تصميم گيري، در دنيايي كه سمت و سوي آن تعالي سازماني است و ارزيابي عملكرد، سر لوحه سازمانهاي آن قرار گرفته اهميت ويژه اي دارد. کارایی یکي از مهم-ترين عوامل برتري سازمانها در رقابت با يكديگر محسوب مي شود. كارايي، ميزان موفقيت در توليد خروجي هر چه بيشتر به ازاي ورودي داده شده را نشان مي دهد [9]. به عبارت ديگر ميزان كارايي يك سازمان بيان ميكند كه آن سازمان به چه خوبي از منابع خود در جهت توليد(هدف) نسبت به بهترين عملكرد در يك بازه زماني خاص استفاده كرده است. همانطور كه پيداست اين شاخص توانمندي مديريت يك سازمان و يا يك واحد تصميم گيرنده را در استفاده بهينه از داده ها براي توليد ستاد ه ها مي سنجد.
يكي از كاربردي ترين روش هاي سنجش كارايي، استفاده از مدل هاي تحليل پوششي دادههاست.

[1] مسئول مکاتبات و سخنران (s.ehdaie@usc.ac.ir – 09121013732)
[2] Data Envelopment Analysis (DEA)
[3] Decision Making Units (DMUs)

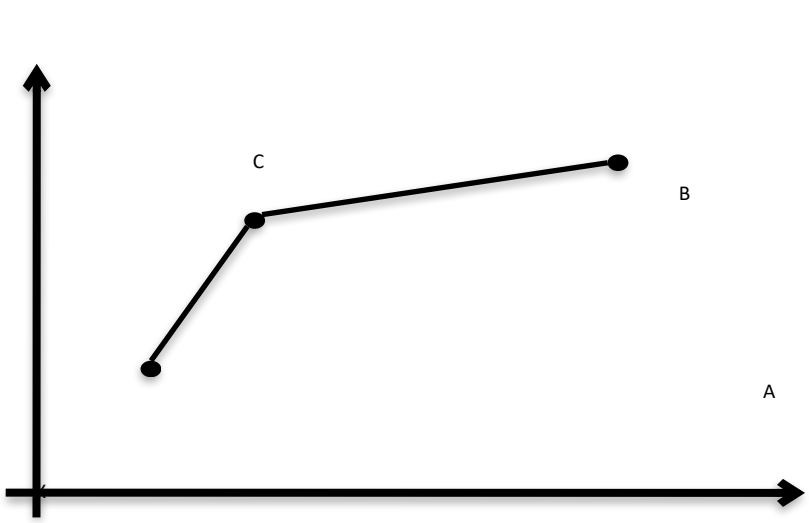
از میان موضوعات متفاوتي كه در ادبيات DEA به آن توجه شده، تحليل حساسيت[4] جايگاه ويژه اي دارد. در تحليل حساسيت اثر تغيير در داده ها بر روي پاسخ مدل بررسي مي شود اما اينكه در دنياي رقابتي امروز، بهبود عملكرد هر واحد تصميم گيري چه تاثيري بر كارايي ساير واحد ها دارد كاملاً مغفول بوده است. اين موضوع تحت عنوان " حاشيه امنيت كارايي"[5] كه برگرفته از انديشه مولفين اين مقاله است به اين مهم می پردازد.
طبیعتا معرفی این شاخص به تنهایی نمی تواند خیلی اثر گذار باشد، باید راهکاری برای سنجش این شاخص ارائه نمود. این مقاله بر آن است که ضمن تشریح مفهوم "حاشیه امنیت کارایی" و نکته افتراق آن با سایر مواردی که تاکنون در زمینه تحلیل حساسیت در تحلیل پوششی داده ها مطرح شده است، راهکار مناسبی جهت سنجش این شاخص را ارائه کند و نهایتا با یک مثال به موضوع پایان می دهد.

2. مرورادبیات

همواره اين سئوال مطرح است كه چنانچه برخي از پارامترهاي يک مدل دچار تغيير شوند، در آن صورت جواب بهينه چه تفاوتي خواهد داشت؟ تحليل حساسيت موضوعي است كه پس از حل مدل به بررسي تاثيرات احتمالي تغييرات پارامتر ها بر جواب بهينه مي پردازد. در واقع تحليل حساسيت، ميزان حساسيت جواب بهينه را در مقابل تغييرات معين در مدل اصلي تعيين مي كند [4].
براساس بررسي هاي انجام شده يكي از اولين مقالاتي كه به موضوع تحليل حساسيت در تحليل پوششي داده ها پرداخته مربوط به تحقيق چارنز و همكارانش در سال 1985 [6] است. چارنز و همكارانش بر اين نكته تاكيد دارند كه روش هاي تحليل حساسيت مرسوم در برنامه ريزي خطي با آنچه اين موضوع در DEA نياز دارد متفاوت است. پس از آن تا به حال تحقيقات متعددي در حوزه تحليل پوششي داده ها با موضوع تحليل حساسيت صورت گرفته است.
بر اساس جمع بندي مراجع مختلف به طور كلي، كارهايي را كه در حوزه تحليل حساسيت تحليل پوششي داده ها انجام شده مي توان به چند دسته تقسيم كرد :
الف) حذف يكي از واحدها از مجموعه واحد هاي تصميم گيري. براي مطالعه بيشتر در اين زمينه، خواننده به منابع [8] و [11] ارجاع داده مي شود. مبحث تحليل پنجره[6] هم از مباحثي است كه ارتباط نزديكي با حذف و اضافه كردن واحدهای تصمیم گیری دارد [7].
ب) حذف يكي از ورودي ها يا خروجي هاي مدل. اين حالت در مقاله [7] مورد بررسي قرار گرفته است.
ج) تغيير در نوع مدل مورد استفاده. اثر اين تغيير در مقاله [5] بررسي شده است.
د) خطا دراندازه گيري داده ها.
از بين حالات چهارگانه فوق حالتي كه بيشتر به موضوع اين مقاله مربوط مي شود حالت اخير است. بر اساس آنچه در نوشته [5] آمده، خطا در اندازهگيري ميزان ورودیها و خروجيهاي يك واحد، ميتواند محقق را در سنجش كارايي آن واحد و حتي ساير واحدها به اشتباه بياندازد.
واحدي كه در مدل DEA به عنوان يك واحد كارا طبقهبندي شده، ممكن است واقعا كارا نباشد و يا به عكس. اگر ورودیهاي چنين واحدي كمتر از مقدار واقعي، يا خروجيهاي آن بيشتر از مقدار واقعي اندازه گرفته شود و اين خطاي در اندازهگيري از حدي بيشتر

[4] - Sensitivity Analysis
[5] - Efficiency Security Margin (ESM)
[6] - Window Analysis

باشد، میتواند باعث اشتباه در محاسبه کارایی آن واحد و طبقهبندي کارایی سایر واحدها گردد.
حساسیت جواب بهینه، نسبت به خطاي احتمالي در انـدازه گـيري داده هـا، يعـني اينکـه مدل مورد استفاده تا چه ميزان خطا در اندازه گيري ها را مي تواند تحمل کند بدون آن که تغيير اساسي در جواب رخ دهد. منظور از تغيير اساسي در جواب، اين است که يـك واحد کارا به يك واحد ناکارا تبديل شـود يـا بـالعکس. بـراي بررسـي اين موضـوع، روش هاي رياضي وجود دارد که به کمک آنها می تـوان حـداکثر مـيزان خطـاي قابـل تحمـل را براي هر واحد پيدا کرد، طوري که با آن ميزان خطا در اندازه گيري ورودي ها وخـروجي هاي واحد مورد نظر، وضـعيت آن واحـد بـدون تغيـير بـاقي بمانـد (از کـارا بـه ناکـارا يـا برعکس تبديل نشود).
به جهت اینکه وجه افتراق این نوع تحلیل حساسیت با موضوع "حاشـیه امـنیت کـارایی" مشخص شود به یک مثال اکتفا می شود:

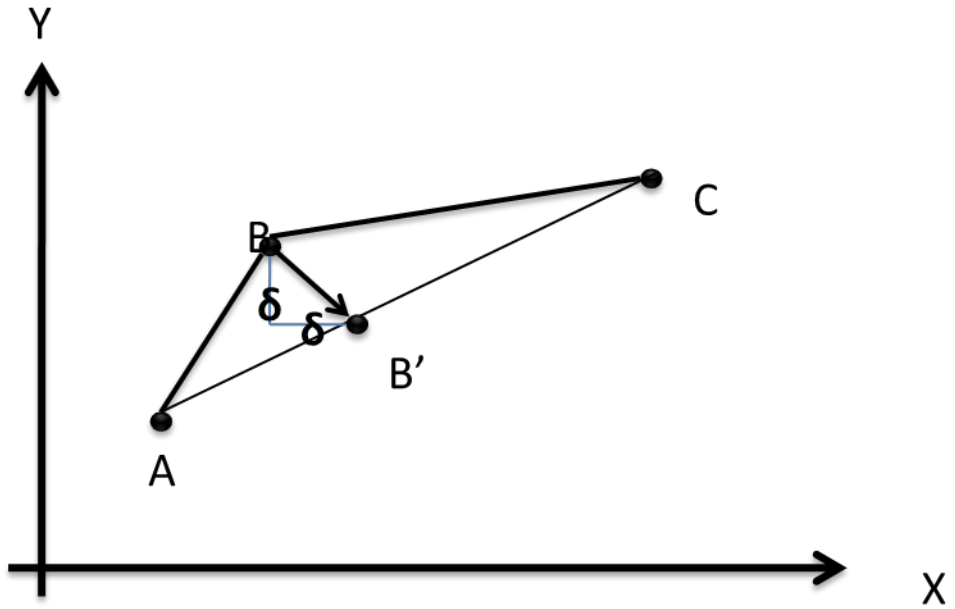


شکل1: عملکرد واحدهای تصمیم گیری با یک ورودی و یک خروجی

فرض کنید مشابه شکل 1 چندین واحد تصمیم گیری[7]، همگی با استفاده از یک ورودی، یک خروجی ارائه می کنند و در چنین شرایطی نقاط A,B,C متناظر با واحد هاي کارا هستند . اگر ورودي و خروجي واحد متناظر با نقطه B به اشتباه اندازه گرفته شده باشد، چه اتفاقي مي افتد؟ ممکن است وضعيت واقعي واحد B بهتر از وضعيت نمايش داده شده باشد. در این صورت B همچنان کاراست. این نوع تحلیل حساسیت (خطا در اندازه گیری داده ها) با این حالت سر و کار ندارد (این اولین وجه افتراق با "حاشیه امنیت کارایی" است). اما اگر خروجي واقعي واحد B کمتر از خروجي فعلي و يا ورودي واقعي آن بيشتر از ورودي فعلي آن باشد، ممکن است واحد مورد نظر ناکارا بوده ولی بر اساس خطای در اندازه گیری، کارا قلمداد می شود.
آنچه در مقاله [5] مطالعه شده ، مربوط به حالتي است که هم خطاي در خروجي و هم خطاي در ورودي وجود داشته و هر دو خطا به گونه اي است که وضعيت واقعي واحد B، بدتر از وضعيت فعلي آن می باشد. در این حالت حساسیت مدل، به يافتن شعاع پايداري[8] واحد B مربوط می شود.

[7] -Decision Making Unit (DMU)
[8] - Radius Stability

طبق تعريف، شعاع پايداري واحد B، عددي نامنفي مانند δ است به طوري كه اگر خروجي هاي فعلي واحد B به ميزان δ كم و ورودي هايش به همان اندازه اضافه شود، واحد B همچنان كارا باقي بماند اما تغيير بيش از آن، منجر به ناكارا شدن واحد B گردد. مطابق شكل2، نقطه 'B، آخرين وضعيتي است كه واحد B با بدتر شدن عملكردش (كم شدن خروجي و اضافه شدن ورودي هر دو به ميزان δ) همچنان كاراست.



شكل 2: بدتر شدن ورودي و خروجي B به اندازه δ

با توجه به مختصات نقاط A,B,C همچنین نقطه 'B ، می توان مقدار شعاع پایداری B را محاسبه کرد. در واقع شعاع پایداری نشان می دهد که اگر یک واحد با افت عملکرد مواجه شد، تاثیر این افت بر وضعیت کارایی همان واحد چگونه است. در "حاشیه امنیت کارایی" اما به دنبال این هستیم که اگر یک واحد تصمیم گیری، چه کارا و چه ناکارا، عملکرد خود را بهبود دهد یا دچار تنزل در عملکرد شود، این وضعیت چه تاثیری بر کارایی سایر واحدها، چه کارا و چه ناکارا، می گذارد.

3. یافتههای تحقیق

همان طور كه گفته شد تحليل پوششي داده ها، كارايي واحد هاي همگن را با هم مقايسه می كند. در اين ميان واحدهايي كه ميزان كارايي آن ها برابر 100 درصد مي شود به عنوان واحد كارآمد[9] و به همين ترتيب واحد هايي كه كارايي آنها كمتر از 100 درصد باشد به عنوان واحدهاي غير كارآمد[10] معرفی مي شوند [1] بديهي است كه پس از رتبه بندي كارايي، هر كدام از واحدها مي توانند با بهبود عملكرد خود، از طريق كاهش ورودي ها يا افزايش خروجي ها و يا تركيبي از اين دو، رتبه بندي صورت گرفته را بر هم زنند. موضوع مهمي كه در دنياي رقابتي امروز از اهميت خاصي برخوردار مي باشد برهم خوردن ترتيب رتبه بندي كارايي، ناشي از تاثير بهبود عملكرد يك واحد بر ميزان كارايي واحدي ديگر است.

1.3. مفهوم حاشیه امنیت کارایی

[9] - efficient units
[10] - Inefficient units

از خصوصيات جوامع كنوني، محدود بودن منابع مورد استفاده سازمانها از يك طرف و امتيازات ناشي از خروجيهاي باارزشتر از سوي ديگر است اين امر موجب شده تا رقابت بين واحدهاي تصميمگيرنده (حتی واحدهای درونی یک سازمان) روز به روز بيشتر و پيچيدهتر گردد. سازمانها اگرچه براي در اختيار داشتن سهم بيشتر بازار به افزايش كارايي خود ميانديشند، اما هيچگاه نبايد بابت از دست دادن جايگاه كارايي نسبي خود، از تغييرات كارايي ساير سازمانهاي رقيب، بخصوص آنهايي كه در توليد، استراتژي مشابه[11] دارند، غافل بمانند. گاهي ممكن است يك واحد تصميم گيرنده هيچگونه افت عملكرد نداشته و يا حتي عملكرد خود را نيز بهبود هم داده باشد اما تحت تاثير عملكرد ساير واحدها، كارايي كمتري را احراز كند و يا حتی از بين واحدهاي كارآمد به دسته واحدهاي نا كارآمد تنزل يابد. لذا همواره هر واحدي با اين سئوال مواجه است كه آيا تلاش وي براي بهبود عملكرد نهايتاً جايگاه او را در رتبه بندي كارايي واحد ها بهتر مي كند؟ تهديدي كه از سوي واحدهاي رقيب وجود دارد تا چه اندازه تلاش او را براي ارتقاء كارايي خنثي مي سازد؟ حاشيه امنيت او براي حفظ كارايي خود چقدر است؟ پارامتري كه پاسخگوي اين سئوال است "حاشيه امنيت كارايي (ESM) " [12] نام گذاري شده و به صورت زير تعريف مي شود:

تعريف1. حاشيه امنيت كارايي واحدi نسبت به واحدj عبارت است از حداكثر ميزان بهبود عملكرد واحد j به طوري كه كارايي واحد i كاهش نيابد.

این شاخص می تواند به صورت مطلق و یا نسبی برای هر واحد تصمیم گیری سنجیده شود. از آنجا که هر واحد می تواند کارا یا ناکارا باشد پس حاشیه امنیت کارایی در چهار حالت زیر قابل سنجش است:
الف) حاشيه امنيت كارايي يك واحد كارا نسبت به يك واحد ناكارا
ب) حاشيه امنيت كارايي يك واحد كارا نسبت به يك واحد كاراي ديگر
ج) حاشيه امنيت كارايي يك واحد ناكارا نسبت به يك واحد كارا
د) حاشيه امنيت كارايي يك واحد ناكارا نسبت به يك واحد ناكاراي ديگر
چنانچه از تعريف فوق آشكار است، حاشيه امنيت كارايي به طور نسبي محاسبه و سنجيده مي شود اما، آنچه مهم تر به نظر مي رسد اينست كه يك واحد خاص بتواند نزديكترين تهديد خود را شناسايي كرده و بداند كدام واحد كارايي او را بيشتر مورد تهديد قرار مي دهد. بر اين اساس مي توان " حاشيه امنيت مطلق كارايي"[13] را به صورت زير تعريف كرد:

تعريف 2. حاشيه امنيت مطلق كارايي يك واحد تصميم گيري مساوي است باكمينه حاشيه امنيت كارايي آن واحد نسبت به ساير واحدها.

2.3. سنجش حاشیه امنیت کارایی

همانطور که قبلا گفته شد، معرفی و شناخت حاشیه امنیت کارایی اگر چه مفید اما کافی نیست. آنچه برای هر واحد تصمیم گیری مهم است اطلاع از میزان حاشیه امنیت

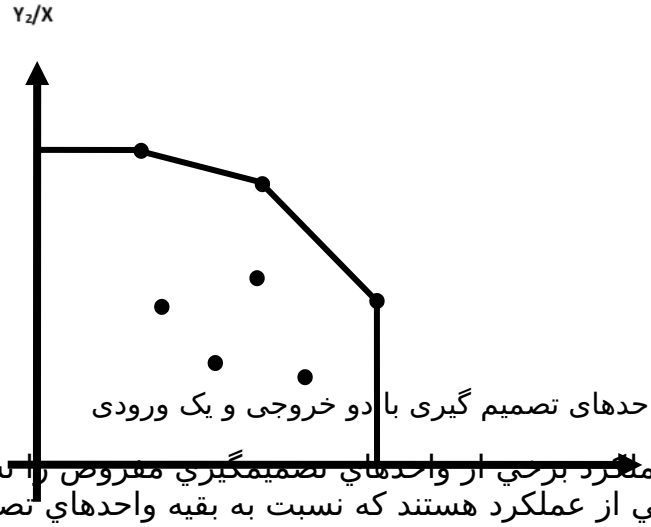
[11] منظور از استراتژي مشابه بين دو واحد، آن است كه به ازاي ورودي يكسان، نسبت خروجيها در هر دو واحد يكسان بوده و يا به ازاي خروجي يكسان، نسبت ورودیها در هر دو واحد برابر باشد. در واقع نقاط متناظر دو واحد با استراتژي مشابه، شعاع حامل يكسان دارند.

[12] - Efficiency Security Margin (ESM)
[13] - Absolute Efficiency Security Margin (AESM)

کارایی نسبی و مطلق خود است. مولفین این مقاله برای سنجش این پارامتر روشی را بر اساس ساختار یک الگوریتم قبلا معرفی کرده اند[14] [2] طبق آن روش می توان حاشیه امنیت کارایی نسبی و مطلق هر واحد تصمیم گیری را در مجموعه ای از واحدهای تصمیم گیری با هر تعداد ورودی و خروجی سنجید. کاربرد این روش، شناخت بهتر حاشیه امنیت کارایی و درک روشن تری از این مفهوم است اما در عمل ممکن است خیلی مورد استفاده قرار نگیرد. آنچه در این مقاله به آن پرداخته می شود روش پیشرفته تری است که اولین بار توسط همین مولفین ارائه شده است. این روش "مدل ریاضی از طریق تحلیل نموداری برای سنجش حاشیه امنیت کارایی" نام گذاری شده است.

3.3. مدل ریاضی محاسبه حاشیه امنیت کارایی از طریق تحلیل نموداری

يكي از روش هايي كه مي توان به كمك آن نسبتهاي مختلف را تفسير كرد روش تجزيه و تحليل نموداري است [4]. این مدل نیز به کمك همین روش جایگاه عملكردي هر واحد تصميمگيري را متناظر با يك نقطه به شرح شكل 3 نشان میدهد. طبیعی است که در این مدل به جهت منطق ترسیمی بودن آن، فقط می توان به نمایش واحدهایی حداکثر با یک ورودی و دو خروجی یا یک خروجی و دو ورودی پرداخت.

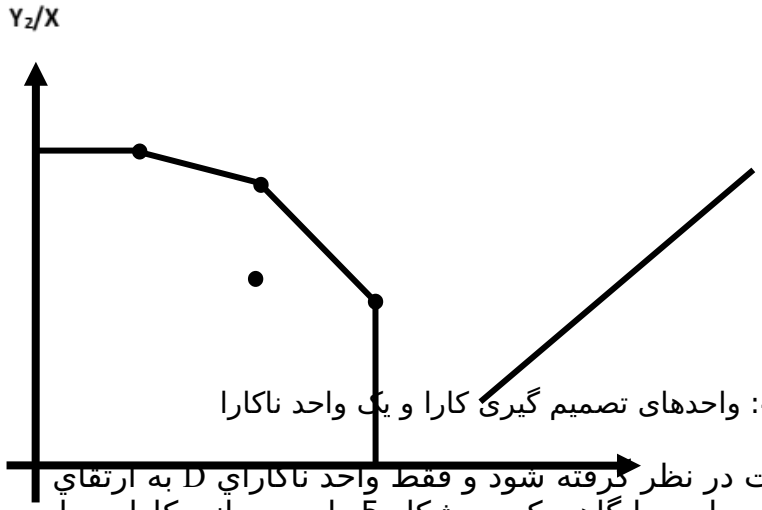


شکل3: واحدهای تصمیم گیری با دو خروجی و یک ورودی

در شكل فوق نقاط A,B,C عملكرد برخي از واحدهاي تصميمگيري مفروض را نشان مي-دهند اين نقاط نمايانگرسطحي از عملكرد هستند كه نسبت به بقيه واحدهاي تصميم-گيري از وضعيت بهتري برخوردار ميباشند. خطوطي كه از محور عرضها به موازات محور طولها به نقطه C و از آنجا به نقطه B و بعد به نقطه A سپس به موازات محور عرضها به محور طولها وصل مي شود مرز كارا را تشكيل ميدهد. از لحاظ رياضي مرز كارا حد بيروني دادهها ميباشد. نقاطي كه روي مرز كارا قرار ندارند عملكرد واحد هايي را نشان مي دهند كه نسبت به واحد هاي A,B,C عملكرد ضعيفتري داشته و كارايي آنها كمتر از 100% است. هم واحدهاي كارا و هم ناكارا ميتوانند عملكرد خود را بهبود ببخشند. چنانچه يكي از اين واحدها در تلاش براي بهبود عملكرد خود باشد در آن صورت موضوع حاشيه امنيت كارايي براي ساير واحدها پيش ميآيد. براساس شكل 4 (در این شکل به جهت سادگی از نمایش برخی واحدهای ناکارا صرفنظر شده است) اگر واحد ناكاراي D با حفظ استراتژي، (داشتن استراتژي مشابه، قبل و بعد از بهبود عملكرد) عملكرد خود را بهبود بخشد و به مرز كارا نزديك شود در آن صورت ضمن ارتقا عملكرد و افزايش مطلق كارايي خود، بروز دو حالت زير قابل تصور است:
الف) مرز كارا ثابت بوده و كارايي ساير واحد ها بدون تغيير باقي مي ماند.

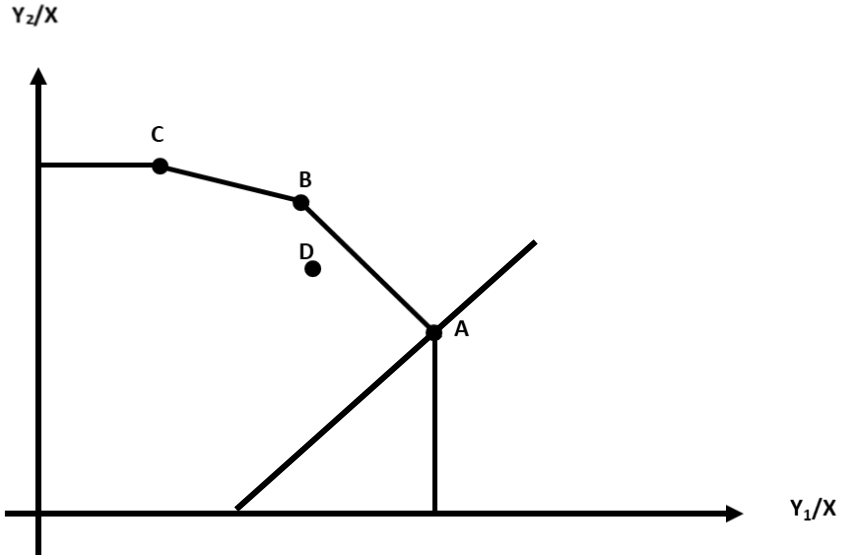
[14] - Algorithmic Method

ب) مرز کارا تغییر یافته و کارایي برخي يا همه واحد ها کاهش مي يابد.



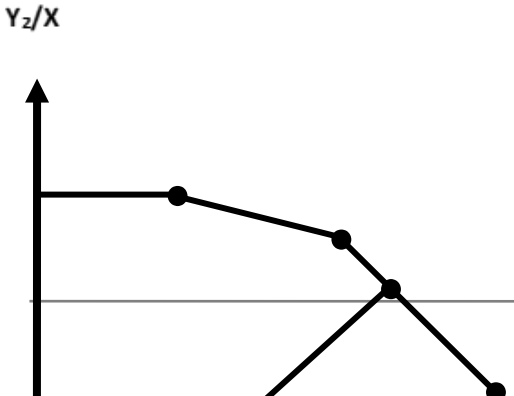
شکل4: واحدهای تصمیم گیری کارا و یک واحد ناکارا

اگر عملکرد تمام واحدها ثابت در نظر گرفته شود و فقط واحد ناکارايD به ارتقاي عملکرد خود بپردازد، مثلا خود را به جايگاهي که در شکل 5 دارد برساند، کارايي واحد D افزايش مييابد. در اين حالت، هنوز کارايي واحد D به 100% نرسيده، مرز کارا تغيير نکرده و کارايي ساير واحدها نيز بدون تغيير باقي مانده لذا تفکيك واحدهاي کارا و نا کارا مثل قبل است. (حالت الف)



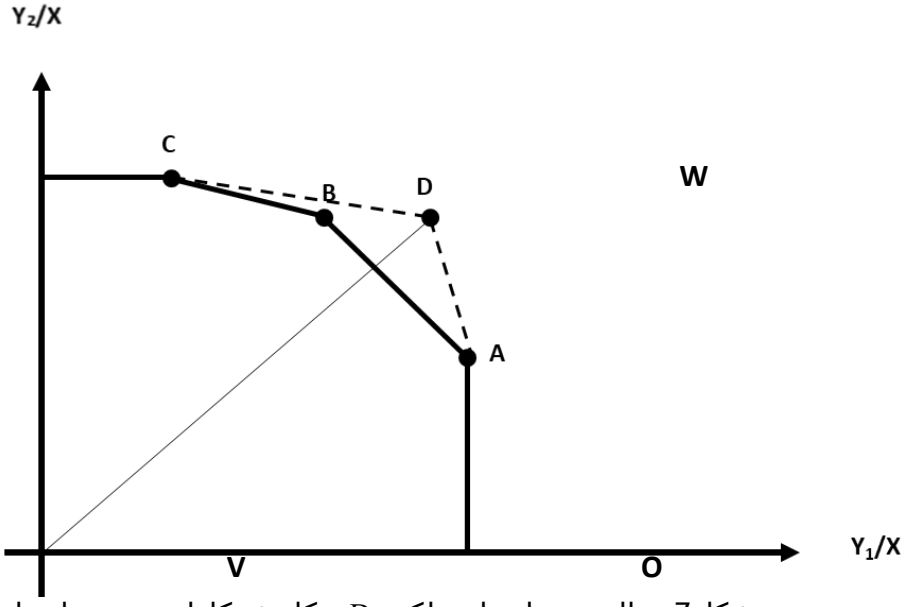
شکل5: حالت الف، ارتقا عملکرد D و ثابت بودن کارایی سایر واحدها

همانطور که در شکل 6 مشاهده می شود واحد D پس از مقداري ارتقاء در عملکرد به مرز کارا خواهد رسيد و کارايي 100% پيدا ميکند (ادامه حالت الف) اما همچنان مرز کارا بدون تغيير باقي مانده است.



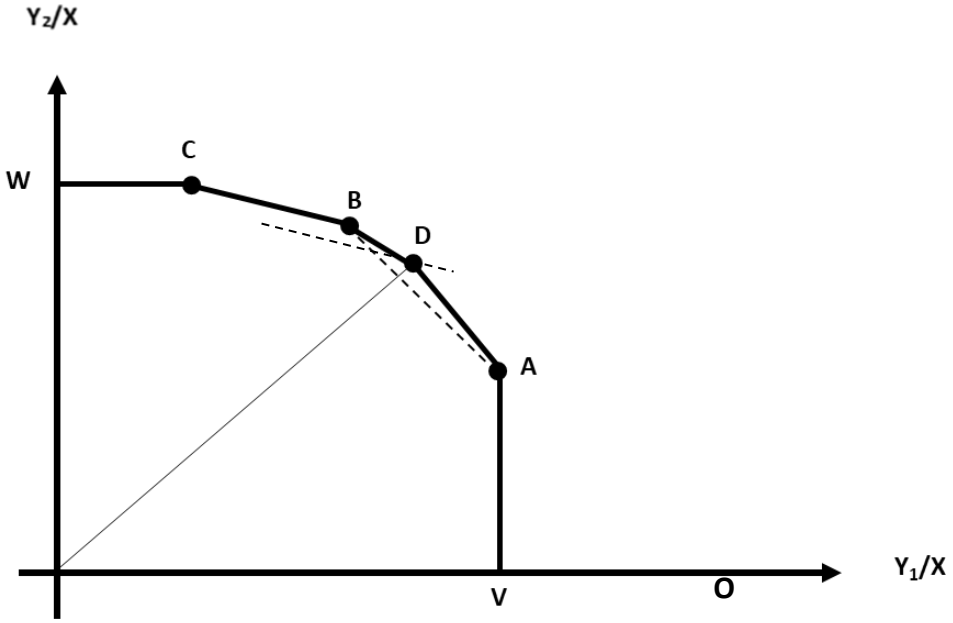
شکل6: ادامه حالت الف، کارا شدن واحد D و ثابت بودن کارایی سایر واحدها

از این نقطه به بعد، کوچکترین بهبودي که در عملکرد واحد D رخ دهد، منجر به جابجايي مرز کارا خواهد شد (شکل 7). تغيير در مرز کارا، موجب تغيير در ميزان کارايي واحدهايي خواهد شد که کاراييشان براساس بخش تغيير يافته مرز کارا محاسبه ميشود. (حالت ب) همانطور که در شکل مشخص است در چنین حالتی واحد B با افت کارایی مواجه است (حتی اگر بهبود عملکرد نیز داشته باشد احتمال اینکه با چنین وضعیتی مواجه شود، وجود دارد).



شکل7: حالت ب، ارتقا عملکرد D و کاهش کارایی برخی از واحدها

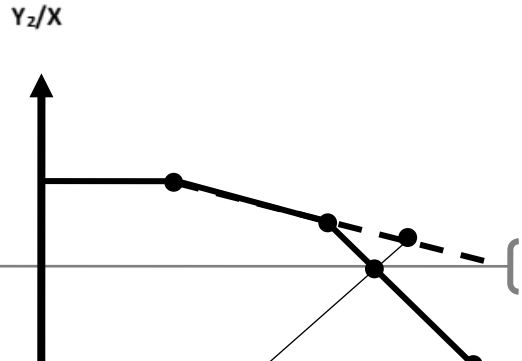
ذکر این نکته ضروری است که داشتن استراتژی مشابه قبل و بعد از ارتقاء عملکرد باعث می شود واحد مورد نظر(D) بر روي خط گذرا از مبدأ و نقطه قبلي (شعاع حامل نقطه D)، ارتقاء عملکرد داشته باشد. سئوال مهمي که اساس اين مدل برآن نهاده شده همين است که به چه دليل و تا چه زمان، تمام واحدهاي قبلا کارا، همچنان کارا خواهند بود؟ برای پاسخ به این سئوال باید به شکل 8 توجه شود.



شکل 8: تغییر مرز کارا بدون تغییر در وضعیت واحدهای کارا

در شکل فوق اگر چه واحدD مرز کارا را تغییر داده لیکن نقطه B که متناظر باعملکرد يكي از واحدهاي از قبل كارا است همچنان بر روي مرز كارا قرار دارد چرا كه، مرز تشكيل شده توسط نمودار قطعه خطي VADBCW يك شكل محدب باقي مانده است. این نکته از آنجا مشخص میشود که نقطه D همچنان پایینتر از امتداد خط BC قرار دارد و این معادل است با اینکه زاویه DBC همچنان يك زاويه كوچكتر از 180 درجه است. چنانچه عملكرد واحد D مطابق شكل 7 باز هم ارتقاء يابد، طوري كه از امتداد خط BC فراتر رود، آنگاه واحد B كارايي خود را از دست خواهد داد. چرا كه واحد B ديگر نمي-تواند بر روي مرز كارا باشد چون در آنصورت نمودار VADBCW محدب نخواهد بود و این خلاف خصوصیت مرز کارا است (زاویه DBC بزرگتر از 180 درجه میشود). بنابراین واحد B تا زماني كارا خواهد ماند كه واحد D از امتداد خط BC عبور نكرده باشد. به عبارت دیگر تا وقتي واحد D بر شعاع حامل خود پایین تر از امتداد خط BC یا روی آن قرار دارد واحد B در حاشيه امن كارايي است.

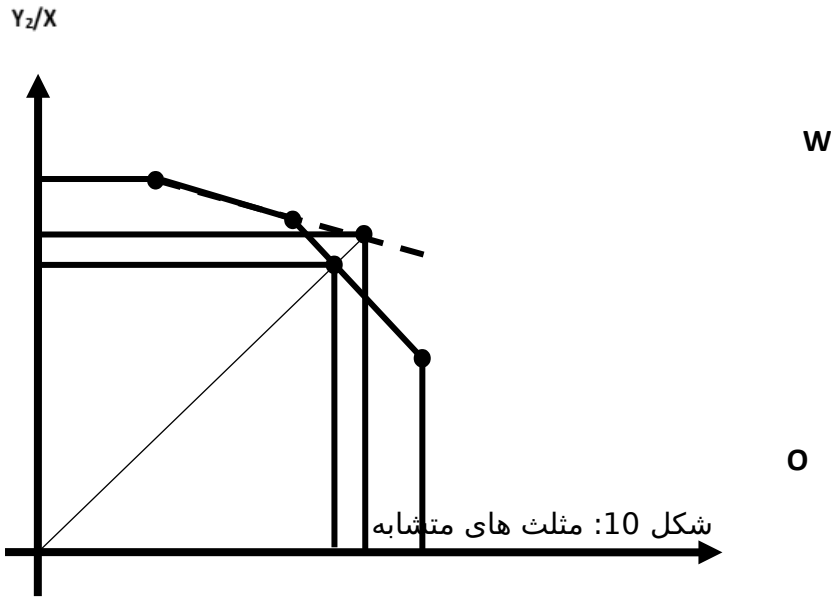
با این توضیحات، براي يافتن ميزان حاشيه امنيت كارايي واحد كاراي B نسبت به واحد مورد مقايسه
(D)، لازم است محل تقاطع امتداد خط OD را با امتداد خط BC به دست آورد. اگر نقطه تقاطع، Z ناميده شود (شكل 9)، نسبت پاره خط OZ به پاره خط OD، ميزان نسبي پيشرفت عملكرد واحد D را نشان خواهد داد. در واقع حاشيه امنيت كارايي واحد B نسبت به واحد D (حداكثر ميزان بهبود عملكرد واحد D به طوری که کارایی واحد B كاهش نيابد)، طبق تعريف برابر خواهد بود با نسبت پاره خط DZ (تفاضل OZ و OD كه مقدار بهبود عملكرد واحد D را نشان ميدهد) به پارهخط OD (مقدار اوليه عملكرد واحد D).



O

شکل 9: واحد B همچنان روی مرز کارا

برای محاسبه نسبت پاره خط DZ به پاره خط OD به شکل 10 توجه شود:



شکل 10: مثلث های متشابه

بر اساس شکل 10 و با توجه به تشابه مثلثهاي OZZ',ODD' همچنين تشابه مثلثهاي OZZ'',ODD'' اين ميزان، با نسبت پيشرفت در خروجي اول و همچنين با نسبت پيشرفت در خروجي دوم برابر خواهد بود؛ لذا :

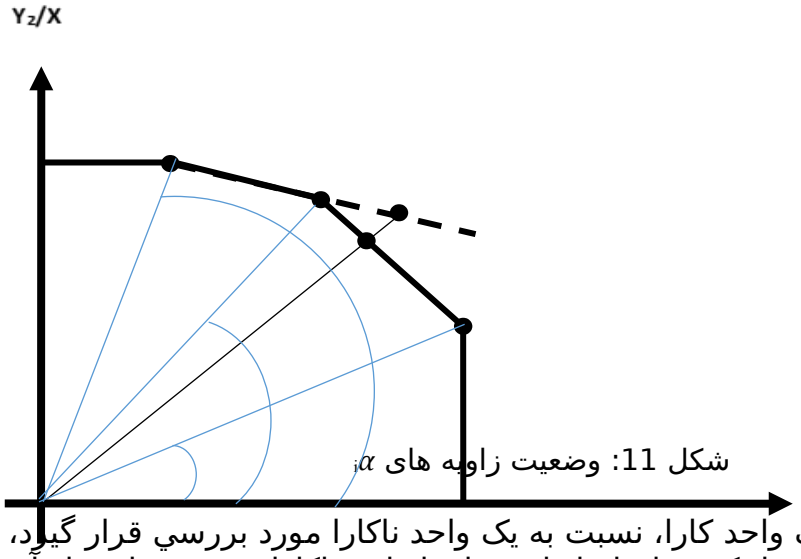
$$\frac{DZ}{OD}=\frac{D'Z'}{OD'}=\frac{D''Z''}{OD''}$$

حال مطابق آنچه گفته شد يك مدل رياضي براي يافتن ميزان حاشيه امنيت كارايي هر واحد تصميمگيري بهدست ميآيد. كافي است مسئله مورد نظر به روش DEA حل شده كارايي واحدها تعيين گردد، سپس به كمك تحليل نموداري جايگاه عملكرد هر واحد تصميمگيري متناظر با يك نقطه روي صفحه مختصات به نمايش گذاشته شود. خط واصل از مبدا مختصات تا هر كدام از نقاطي كه روي مرز كارا قرار دارد، با جهت مثبت محور طولها زاويهاي تشكيل ميدهد كه α_i $(1\le i\le n)$ و n تعداد واحد هاي كارا) ناميده مي-شود.

بديهي است كه اگر براساس شكل 11 نقاط $B(x_b,y_b)$ ، $A(x_a,y_a)$ و ... متناظر با واحدهاي كارا باشند، در آن صورت شيب زاويه α_i از كوچك به بزرگ برابر است با:

$$\frac{y_a}{x_a}<\frac{y_b}{x_b}<\ldots<\frac{y_n}{x_n}$$

در اين شكل براي تكميل مرز كارا، و براساس تعريف، نقطه $V(x_v , y_v)$ و نقطه $W(x_w , y_w)$ نشان داده ميشود.

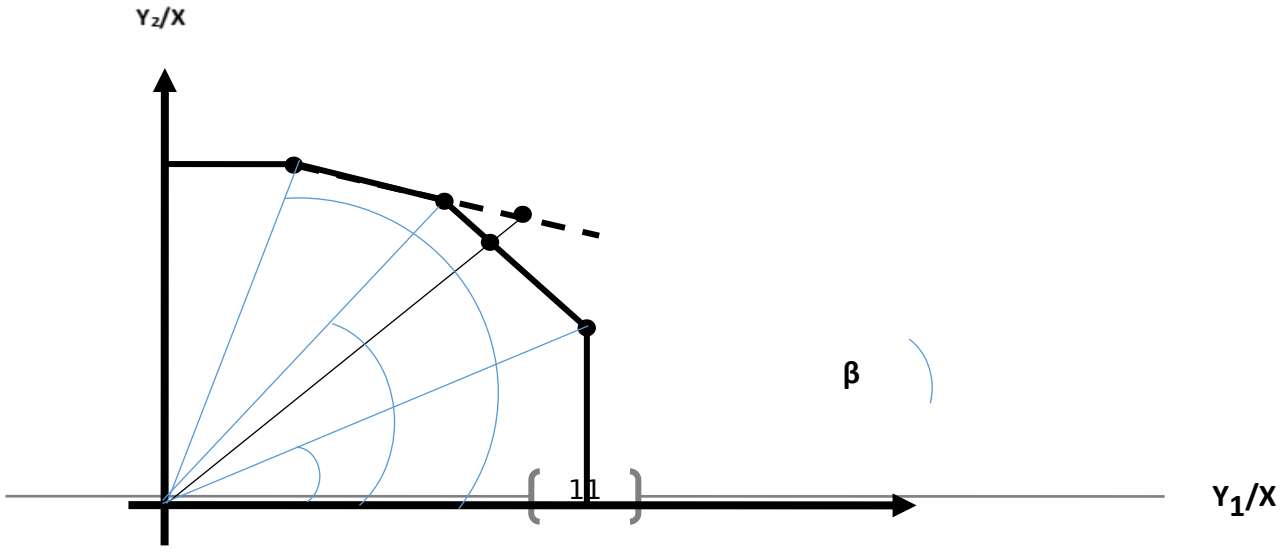


شكل 11: وضعيت زاويه هاي α_i

چنانچه حاشيه امنيت يک واحد كارا، نسبت به يک واحد ناكارا مورد بررسي قرار گيرد، در آن صورت نيز با فرض اينكه خط واصل از مبداء تا واحد ناكاراي مورد نظر و از آنجا تا مرز كارا با جهت مثبت محور طولها زاويه β را تشكيل ميدهد (مشابه شكل 12)، سه وضعيت زير متصور است:

الف) $\alpha_i < \beta$ ب) $\alpha_i > \beta$

ج) $\alpha_i = \beta$

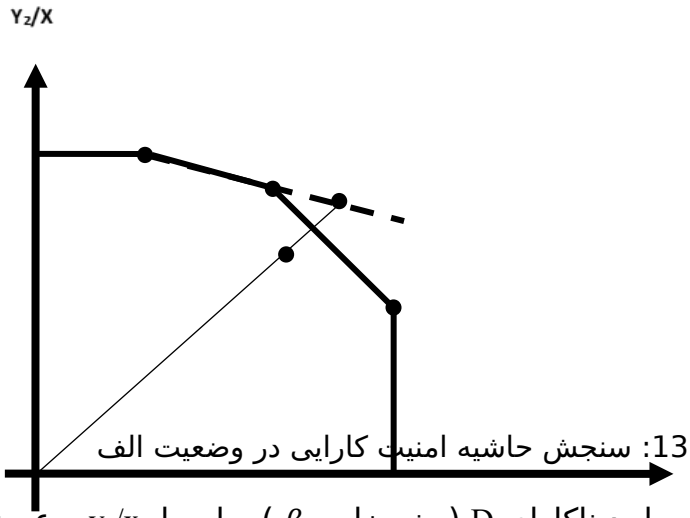


شکل 12: وضعیت زاویه β

همانطور که گفته شد:
α زاويه اي است بين شعاع حامل هر نقطه متناظر با يك واحد كارا، با جهت مثبت محور طول ها.
β زاويه اي است بين شعاع حامل هر نقطه متناظر با واحدي كه عملكردش را بهبود مي بخشد، با جهت مثبت محور طول ها.

4.3. مدل رياضي محاسبه حاشيه امنيت كارايي در وضعيت الف ($\alpha_i<\beta$)

اگر سنجش حاشیه امنیت کارایی واحدB نسبت به واحد D مورد نظر باشد، در واقع وضعیت الف مورد بررسی قرار می گیرد.
همانطوركه در شكل 13 پيداست، دراين حالت بايد محل تلاقي خط گذرا از مبدأ و واحد ناكاراي D با امتداد خط گذرا از دو واحد B و C بهدست آيد. (مختصات نقطه Z)
منظور از نقطه C اولین نقطه ای است که زاویه α آن از زاویه α واحد تحت بررسی بزرگتر است.



شکل 13: سنجش حاشیه امنیت کارایی در وضعیت الف

شيب خط گذرا از مبدأ و واحد ناكاراي D (يعني زاويه β) برابر با y_d/x_d و عرض از مبدأ آن، صفر خواهد بود. لذا معادله اين خط به شكل زير نوشته ميشود:

$$y=\frac{y_d}{x_d}x$$

معادله خط گذرا از دو نقطه B و C نيز به صورت

$$\frac{y-y_b}{x-x_b}=\frac{y_c-y_b}{x_c-x_b}$$

بيان ميشود كه در آن، عبارت $m=\frac{y_c-y_b}{x_c-x_b}$ شيب خط مذكور خواهد بود. يعني چنانچه قرار دهيم:

$$m \triangleq \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$$

معادله خط مذکور میشود:

$$y - y_b = m(x - x_b)$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول زیر:

$$y = \frac{y_d}{x_d} x$$
$$y - y_b = m(x - x_b)$$

مختصات تلاقی این دو خط یعنی نقطه $Z(x_z , y_z)$ بدست می آید.

$$\begin{cases} x = x_z = \dfrac{m x_b - y_b}{m x_d - y_d} x_d \\ y = y_z = \dfrac{m x_b - y_b}{m x_d - y_d} y_d \end{cases}$$

و از آنجا که حسب تعریف و بر اساس شکل 13حاشیه امنیت کارایي واحد B نسبت به واحد D برابر است با $\frac{x_z - x_d}{x_d} = \frac{y_z - y_d}{y_d}$، حاشیه امنیت کارایي واحد B را نسبت به واحد D میتوان به صورت زیر بر حسب درصد بیان کرد:

$$ESM_{B,D} = \left(\frac{m x_b - y_b}{m x_d - y_d} - 1 \right) \times 100$$

در فرمول فوق تعریف میشود:

x_b طول نقطه متناظر با واحدي که حاشیه امنیت کارایي آن تحت بررسي است.

y_b عرض نقطه متناظر با واحدي که حاشیه امنیت کارایي آن تحت بررسي است.

m شیب خط واصل بین واحد تحت بررسي (مثل B) و اولین واحدي که α آن بزرگتر از α واحد تحت بررسي است (مثل C).

x_d طول نقطه متناظر با واحدي که حاشیه امنیت کارایي واحد تحت بررسي نسبت به آن سنجیده مي شود (مثل D).

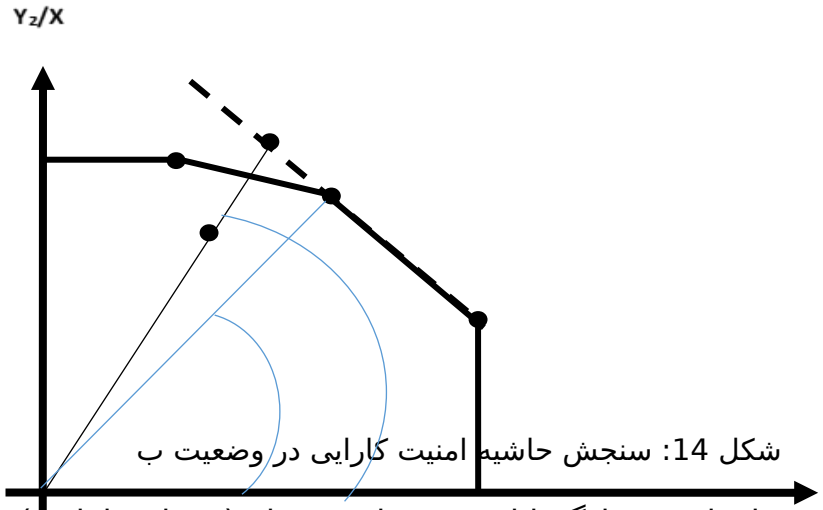
y_d عرض نقطه متناظر با واحدي که حاشیه امنیت کارایي واحد تحت بررسي نسبت به آن سنجیده مي شود (مثل D).

5.3. مدل ریاضي محاسبه حاشیه امنیت کارایي در وضعیت ب ($\alpha_i > \beta$)

اگر سنجش حاشیه امنیت کارایی واحدB نسبت به واحد E مورد نظر باشد، در واقع وضعیت ب مورد بررسی قرار می گیرد.

همانطورکه در شکل 14 پیداست، دراین حالت باید محل تلاقي خط گذرا از مبدأ و واحد ناکاراي E با امتداد خط گذرا از دو واحد B و A بهدست آید. (مختصات نقطه F)

منظور از نقطه A اولین نقطه ای است که زاویه α آن از زاویه α واحد تحت بررسی (B)، کوچکتر است.



شکل 14: سنجش حاشیه امنیت کارایی در وضعیت ب

در این حالت باید محل تلاقی خط گذرا از E و مبداء مختصات(شعاع حاملE) با خط AB بدست آید. لذا برای پیدا کردن مختصات نقطه F باید دستگاه دو معادله دو متغیر زیر حل شود:

$$y=\frac{y_e}{x_e}x$$
$$y-y_b=m(x-x_b)$$

در دستگاه فوق توجه شود که m شیب خطAB است.
پس از مشخص کردن مختصات نقطهF، مشابه آنچه در وضعیت الف گفته شد و بر اساس تعریف ارائه شده برای حاشیه امنیت کارایی، می توان حاشیه امنیت کارایی واحد B نسبت به E را به شرح زیر بیان کرد:

$$ESM_{B,E}=\left(\frac{m\,x_b-y_b}{m\,x_e-y_e}-1\right)\times 100$$

در فرمول فوق تعریف میشود:
x_b طول نقطه متناظر با واحدي که حاشیه امنیت کارایي آن تحت بررسي است.
y_b عرض نقطه متناظر با واحدي که حاشیه امنیت کارایي آن تحت بررسي است.
m شیب خط واصل بین واحد تحت بررسي (مثل B) و اولین واحدي که α آن کوچکتر از α واحد تحت بررسي است (مثل A).
x_e طول نقطه متناظر با واحدي که حاشیه امنیت کارایي واحد تحت بررسي نسبت به آن سنجیده مي شود (مثل E).
y_e عرض نقطه متناظر با واحدي که حاشیه امنیت کارایي واحد تحت بررسي نسبت به آن سنجیده مي شود (مثل E).
همانطور که مشخص است تنها تفاوت حالت الف با حالت ب در مقدار m می باشد یعنی به جای شیب خطBC (C اولین اولین واحدي که α آن بزرگتر از α واحد تحت

بررسي است) بايد شيب خط AB (A اولين واحدي كه α آن كوچكتر از α واحد تحت بررسي است) را جايگزين كرد.

6.3. مدل رياضي محاسبه حاشيه امنيت كارايي در وضعيت ج ($\alpha_i=\beta$)

در اين حالت، استراتژي هر دو واحد (واحد تحت بررسی[15] و واحد محک سنجش[16]) مشابه فرض شده در واقع شعاع حامل هر دو منطبق بر هم بوده و شيب يكسان دارند. واحد كارا، زماني كارايي خود را از دست ميدهد كه واحد ناكارا، عملكرد خود را بهتر از واحد كارا كند. لذا حاشيه امنيت كارايي واحد تحت بررسی نسبت به هر واحد ناكارايی كه شعاع حامل يكسان دارند در اين حالت به صورت زير خواهد بود:

$$ESM_{(a_i\text{ و }b_i),(a'\text{ و }b')}=\left(\frac{a_i}{a'}-1\right)\times 100=\left(\frac{b_i}{b'}-1\right)\times 100$$

كه در فرمول فوق ، تعريف مي شود:
a_i و b_i به ترتيب طول و عرض نقطه متناظر با واحدي كه حاشيه امنيت كارايي آن مورد سنجش است.
a' و b' به ترتيب طول و عرض نقطه متناظر با واحدي كه حاشيه امنيت كارايي واحد مورد نظر، نسبت به آن سنجيده ميشود.

7.3. متمم مدل رياضی محاسبه حاشيه امنيت كارايی از طريق تحليل نموداری

همان طور كه قبلا گفته شد حاشيه امنيت كارايي را مي توان در موارد زير محاسبه كرد:
1) يك واحد كارا نسبت به يك واحد ناكارا
2) يك واحد كارا نسبت به يك واحد كاراي ديگر
3) يك واحد ناكارا نسبت به يك واحد كارا
4) يك واحد ناكارا نسبت به يك واحد ناكاراي ديگر

اما مدل رياضی محاسبه حاشيه امنيت كارايی از طريق تحليل نموداری در وضعيت های سه گانه الف، ب و ج همگي حاشيه امنيت كارايي يك واحد كارا نسبت به يك واحد ناكارا را محاسبه مي كردند (بند 1) . در اينجا ذكر اين نكته لازم است كه مدل مطرح شده، در حالت دوم هم، بدون هيچ تغييری كاربرد دارد. چرا كه در هيچكدام از قسمتها، از فرض ناكارا بودن واحد دوم (واحدي كه حاشيه امنيت كارايي نسبت به آن سنجيده مي شود) استفاده نشده است. همچنين براي بررسي حاشيه امنيت كارايي در حالت سوم و چهارم ، كافی است يک نقطه متناظر با يك واحد مجازی بر روی مرز كارا در امتداد واحد ناكارای اول (شعاع حامل نقطه متناظر با واحد تحت بررسي) در نظر گرفته شود. در اين صورت حاشيه امنيت كارايی واحد مجازی نسبت به واحد محك سنجش برابر است با جواب مورد نظر.

8.3. اعتبار و روايي تحقيق

قبل از پذيرش نتيجه هر تحقيق يا مدلي بايد آن را مورد ارزشيابي قرار داد. اعتماد بدون بررسي دقيق مي تواند آثار مخربي را به دنبال داشته باشد. در اين گونه موارد شيوه استدلال مي تواند بر پايه قياس يا استقرا استوار باشد.

---

[15] ـ واحد تصميم گيري است كه حاشيه امنيت كارايي آن سنجيده مي شود

[16]- واحد تصميم گيري است كه حاشيه امنيت كارايي واحد تحت بررسي نسبت به آن سنجيده مي شود. در واقع واحدی است كه عملكرد خود را بهبود می دهد.

استدلال قياسي با نام ارسطو و پيروانش كه در يونان قديم اولين گام هاي دستيابي به واقعيت را برداشتند گره خورده است. در اين شيوه پژوهشگر واقعيت هاي شناخته شده و موجود را در كنار هم قرار داده و به نتيجه گيري مي پردازد. به اين معني كه انسان با عنايت به كليات به جزئيات پي مي برد [3]. به همين دليل است كه شيوه قياسي را از كل به جزء رسيدن و استدلال استقرايي را از جزء به كل رسيدن تعريف مي كنند اما به جاي اين تعريف تقريباً منسوخ، مي توان به طور دقيق تر عنوان كرد كه در استدلال قياسي، محقق با طرح مقدمات لازم، ضرورتاً به نتيجه مي رسد در حالي كه در استدلال استقرايي حصول نتيجه از اين طريق با درصدي از احتمال همراه است. در تحقيق حاضر بر اساس استدلال هاي عقلي، مدلي رياضي ارائه شده كه ضرورتاً به حصول نتيجه منجر مي شود لذا مشمول استدلال قياسي است. اين مدل مثل هر مدل رياضي ديگر از اعتبار كافي برخوردار است و اين اعتبار از دو منظر قابل بررسي است: اول از نظر ساختار رياضي كه بايد از قوت هاي لازم برخوردار باشد. بررسي وجود چنين قوت هايي نيازي به تجربه و نمونه گيري ندارد چرا كه بر پايه استدلال هاي عقلي بوده و با تكرار هاي متعدد نتايج همسان را نشان مي دهد. دوم از نظر اعتبار نتايج كه آيا مدل ارائه شده در عمل هم نتايج درست را نمايان مي سازد يا خير. در اعتبار نتايج علاوه بر اينكه مدل رياضي بايد درست باشد، داده ها نيز بايستي صحيح باشند كه در آن صورت مدل واقع نما خواهد بود.
در خصوص روايي تحقيق نيز با توجه به تعريف ارائه شده از حاشيه امنيت كارايي و محاسبات انجام شده، كاملاً مبرهن و واضح است كه روش مطرح شده در اين تحقيق به خوبي بيانگر مفهوم مورد نظر می باشد.

4. مطالعه کاربردی

به منظور بررسی اعتبار آنچه ارائه شد مثال زیر برای محاسبه حاشیه امنیت کارایی به روش مدل ریاضی مبتنی بر تحلیل نموداری که مشابه وضعیت الف است ارائه می شود اما بر این نکته تاکید می شود که صرفا به جهت صرفه جویی در وقت از ارائه مثال برای دو وضعیت ب و ج پرهیز می گردد.
مسئله اي با شش واحد تصميم گيري كه هر كدام يك ورودي و دو خروجي همگن دارند مفروض است. دادههاي مربوط به اين مسئله به شرح جدول 1 مي باشد:

جدول شماره 1- ورودي و خروجي هاي 6 واحد تصميم گيري

واحد تصميم گيري DMU	ورودي x	خروجي 1 y_1	خروجي 2 y_2
واحد تصميم گيري شماره 1	3	21	6
واحد تصميم گيري شماره 2	2	12	8
واحد تصميم گيري شماره 3	3	9	18
واحد تصميم گيري شماره 4	2	6	8
واحد تصميم گيري شماره 5	3	6	3
واحد تصميم گيري شماره 6	2	5	10

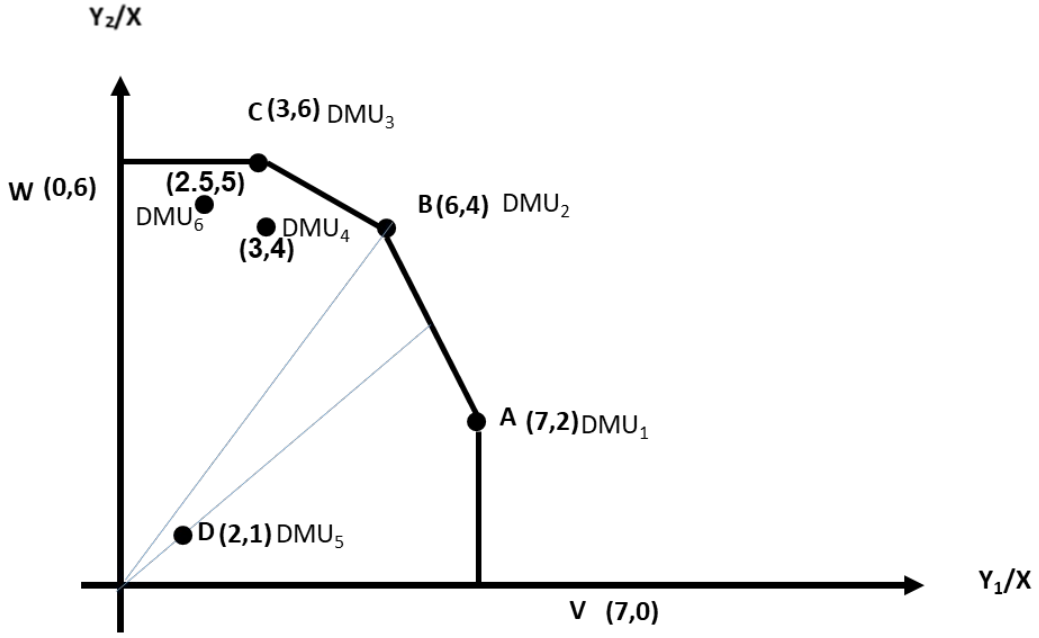
بررسي كارايي واحدهاي تصميمگيري اين مسئله به كمك يكDEA solver نتايجي به شرح جدول شماره 2 را در نشان می دهد:

جدول شماره 2- كارايي واحد هاي تصميم گيري

واحد تصميم گيري DMU	كارايي به

	درصد
واحد تصميم گيري شماره 1	100
واحد تصميم گيري شماره 2	100
واحد تصميم گيري شماره 3	100
واحد تصميم گيري شماره 4	75
واحد تصميم گيري شماره 5	3/31
واحد تصميم گيري شماره 6	3/83

شكل شماره 15 تجسم بهتري را از وضعيت واحد هاي تصميم گيري ايجاد مي كند. بر اين اساس مرز كارا نيز مشخص شده است:



شكل 15: وضعيت واحدهای كارا و ناكارا

اينك چنانچه هدف بررسي حاشيه امنيت كارايي واحد تصميم گيري شماره 2 نسبت به واحد شمار5 باشد، ابتدا طبق آنچه گفته شد مقايسه زاويه هاي α و β ضروري است.α_i زاويه بين شعاع حامل نقاط متناظر با هر واحد تصميم گيري كارا با محور طول ها و β زاويه بين شعاع حامل نقطه متناظر با واحد تصميم گيري كه عملكرد آن بهبود مي يابد، با محور طول ها است. i=2 مرتبط با واحد تحت بررسي و i=3 مرتبط با اولين واحدي است كه α آن بزرگتر از α واحد تحت بررسي مي باشد پس در اين مثال:

α_2 زاويه بين شعاع حامل نقطه متناظر با DMU_2 با محور طول ها

α_3 زاويه بين شعاع حامل نقطه متناظر با DMU_3 با محور طول ها

β زاويه بين شعاع حامل نقطه متناظر با DMU_5 با محور طول ها

تعريف ميشود.

چون $\beta < \alpha_2$ پس حالت الف برقرار است.

در اين وضعيت :

X_2 طول نقطه متناظر با واحدي ميباشد كه حاشيه امنيت كارايي آن تحت بررسي است پس= x_2 6
Y_2 عرض نقطه متناظر با واحدي ميباشد كه حاشيه امنيت كارايي آن تحت بررسي است پس = y_2 4
m شيب خط واصل بين واحد تحت بررسي و اولين واحدي كه α آن بزرگتر از α واحد تحت بررسي ميباشد يعني شيب خط واصل دو نقطه متناظر با DMU_2 و DMU_3 ، پس

$$m = \frac{2}{3} - = \frac{6-4}{3-6}$$

X_5 طول نقطه متناظر با واحدي مي باشد كه حاشيه امنيت كارايي واحد تحت بررسي نسبت به آن سنجيده ميشود پس $x_5=2$
Y_5 عرض نقطه متناظر با واحدي است كه حاشيه امنيت كارايي واحد تحت بررسي نسبت به آن سنجيده ميشود پس= y_5 1
براساس فرمول، حاشيه امنيت كارايي واحد تصميم گيري شماره 2 نسبت به واحد شماره 5 عبارت است از:

$$ESM_{2,5}=\left(\frac{mx_2-y_2}{mx_5-y_5}-1\right)\times 100=\left(\frac{\frac{-2}{3}6-4}{\frac{-2}{3}2-1}-1\right)*100=\%243$$

اين جواب بدين معناست كه اگر واحد شماره 5 عملكرد خود را از طريق افزايش 243 درصدي خروجي ها يا كاهش 243 درصدي ورودي بهبود بخشد، اگر چه به مرز كارا مي رسد اما واحد تصميم گيري شماره 2 همچنان در حاشيه امن كارايي است ليكن پس از آن دچار افت كارايي مي شود. براي امتحان چنين پاسخي ابتدا با فرض خروجي محور، خروجي هاي واحد محک سنجش (DMU_5)، 243 درصد افزايش داده مي شود، پس :

$$y'_{1,5}=6*3.43=20.58 \quad y'_{2,5}=3*3.43=10.29$$

y' خروجي هاي واحد شماره 5 را پس از افزايش 243درصدي نشان مي دهد.
در جدول شماره 3 با داده هاي جديد و به كمك DEA solver ، وضعيت كارايي واحدهاي تصميمگيري مشاهده می‌شود:

جدول شماره 3- كارايي واحد هاي تصميم گيري پس از بهبود 243 درصدي عملكرد واحد شماره 5

واحد تصميم گيري DMU	كارايي به درصد
واحد تصميم گيري شماره 1	100
واحد تصميم گيري شماره 2	100
واحد تصميم گيري شماره 3	100
واحد تصميم گيري شماره 4	75
واحد تصميم گيري شماره 5	100
واحد تصميم گيري شماره 6	3/83

بر اساس جدول فوق واحد شماره 5 به مرز کارا رسیده لیکن واحد شماره 2 هنوز مورد تهدید قرار نگرفته و جایگاه قبلی خود را از دست نداده است. اینک فرض کنید واحد محک سنجش (DMU_5) همچنام عملکرد خود را بهبود می دهد و خروجی های خود را یک درصد دیگر افزایش می دهد در چنین حالتی :

$$y''_{1,5}=6*3.44=20.64 \quad y''_{2,5}=3*3.44=10.32$$

y'' خروجي هاي واحد شماره 5 را پس از افزايش 244درصدي نشان مي دهد.
با داده هاي جديد و به كمك DEA solver ، جدول شماره 4 وضعيت كارايي واحدهاي تصميمگيري را پس از افزايش 244 درصدي عملكرد واحد شماره 5 نشان مي دهد :

جدول شماره 4- كارايي واحد هاي تصميم گيري پس از بهبود 244 درصدي عملكرد واحد شماره 5

واحد تصميم گيري DMU	كارايي به درصد
واحد تصميم گيري شماره 1	100
واحد تصميم گيري شماره 2	7/99
واحد تصميم گيري شماره 3	100
واحد تصميم گيري شماره 4	9/74
واحد تصميم گيري شماره 5	100
واحد تصميم گيري شماره 6	3/83

مقایسه دو جدول شماره 3 و 4 نشان می دهد که:
$ESM_{2,5}=\%243$

5. نتیجه گیری

امروزه ارزیابی عملکرد سازمان و واحدهای درون سازمانی، یکی از اصلی ترین امـوري است که در صورت صحت انجام، می تواند موجبات موفقیت هـر سـازماني را بـه دنبـال داشته باشد. در شرایط رقابت آمیز کنونی نیز که توجه به موضوع تعالی سازمان امـری طبیعی و غیر قابل اجتناب محسوب می شود اهمیت ارزیابی عملکرد و سنجش کارایی، بیش از پیش هویدا است. یکی از پرکاربردترین روشـهای سـنجش کـارایی روش تحلیـل پوششی داده است. در دنیای رقابتی امروز هر واحدی سعی می کند تا با بهبود عملکـرد کارایی خود را ارتقاء دهد و این موضوع همان است که مـا را بـا مفهـوم حاشـیه امـنیت کارایی آشنا می سازد. افزایش کارایی یک واحد چه تاثیری بر کارایی سـایر واحـدها می گذارد؟ پاسخ به این سئوال در مفهوم حاشیه امنیت کارایی نهفته است.
در این مقاله کـه حاصـل یـک پـژوهش بنیـادی اسـت ابتـدا بـه معـرفی " حاشـیه امـنیت کارایی" و سپس به ارائه یک مدل ریاضـی بـرای سـنجش این پـارامتر پرداختـه شـد. بـه عنوان نمونه در همین رابطه یک مورد کاربردی مورد مطالعه قرار گرفت که از نتایج آن تفسیرهای مفیدی حاصل می شود.

مراجع

[1] میر بهادرقلي آریا نژاد و سید جعفر سجادي. "برنامه ريزي خطي،ويرايش سوم". انتشارات دانشگاه علم و صنعت، تهران. 1385.
[2] علی دلاور، راهنمای تحقیق و ارزشیابی، انتشارات ارسباران، تهران. 1385.
[3] سعید اهدائی و محمدرضا مهرگان. تحلیل حساسیت برای تعیین حاشیه امنیت کارایی واحدهای تصمیم‌گیری در مدل تحلیل پوششی داده‌ها (مطالعه موردی: گروه‌های آموزشی دانشگاه علم‌وفرهنگ)، *نشریه مدیریت صنعتی دانشکده مدیریت دانشگاه تهران*، دوره 6، شماره 3، (پاییز 1393)، صص 470-453
[4] محمدرضا مهرگان "مدلهاي كمي در ارزيابي عملكرد سازمانها". انتشارات دانشكده مديريت دانشگاه تهران. 1387.
[5] T.S. Ahn and L.M. Seiford (1993). “Sensitivity of DEA to Models and Variable Sets in a Hypothesis Test Setting: the Efficiency of University Operations.” in Ijiri Y (eds.) Creative and Innovative Approaches to the Science of Management Quorum Books: 191-208.
[6] A. Charnes, WW Cooper, B Golany, LM Seiford and J Stutz (1985). “Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions.” J Econometrics 30(1/2): 91-107.
[7] W.W. Cooper, & Seiford,L.M. & Zhu,J. (2011). "Handbook on Data Envelopment Analysis". Springer.
[8] B. Efron (1979), Bootstrap methods: another look at the jackknife, The Annals of Statistics, 7 (1), pp. 1-26
[9] M.J. Farrell, (1957). "The Measurement of Productive Efficiency", J.R. Statis, Soc. Series A120, 253-281
[10] C.T. Kuah, & K.Y. Wong, & F. Behrouzi, (2010). "A Review on Data Envelopment Analysis (DEA)", Fourth Asia International Conference on Mathematical/Analytical Modelling and Computer Simulation
[11] L. Simar and PW Wilson (1998). “Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to Bootstrap in Nonparametric Frontier Models.” Management Science 44(1): 49-61.