



تحلیل حساسیت وشعاع پایداری کارایی هزینه در تحلیل پوششی داده ها با داده های بازه ای

اسماعیل ممبینی^۱، محسن رستمی مالخلیفه^۲
گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران
eml_mombini@yahoo.com

چکیده: تحلیل پوششی داده های بازه ای مدلی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده با داده های بازه ای است

تحلیل حساسیت و ارزیابی پایداری واحدها تصمیم گیرنده از نگرانی های مدیران است. دهه های گذشته ارزیابی واحدهای تصمیم گیرنده به روش های مختلفی مورد پژوهش قرار گرفت. این مقاله تاکید بر تحلیل حساسیت و ارائه روشی برای محاسبه شعاع پایداری کارایی هزینه واحدها با داده های بازه ای است
کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها- داده های بازه ای- تحلیل حساسیت- شعاع پایداری- کارایی هزینه

1. مقدمه

تحلیل پوششی داده ها مدل برنامه ریزی ریاضی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده با چندین ورودی-خروجی است (چارلز و همکاران (3)-بنکروه همکاران (2)) مدل های پایه ای ت. پ. د. برپایه ارزش قطعی ورودی ها و خروجی هاست. ولی این فرض می تواند با داده های بازه ای تغییر یابد. پژوهش های زیادی با داده های نادقیق انجام شده است. بعنوان نمونه جهانشاهلو و همکاران (5)، کانولیو (6)، اسماعیلی (4)، و کرد رستمی و جهانی (7) روش هایی برای کارایی خوشبینانه و بدبینانه واحدها با داده های فازی ارائه کردند. امیر تیموری و همکاران (1) کارایی بازه ای برای واحدها با داده های بازه ای ارائه کردند. سید اسماعیلی (8) روشی برای تغییرات بهره وری شرکت های بیمه با توجه به ساختار دو مرحله ای و عدم قطعیت در داده ها ارائه کردند

2. مرور ادبیات

محاسبه کارایی هزینه و تحلیل حساسیت وشعاع پایداری کارایی هزینه با داده های قطعی

فرض کنید که n واحد تصمیم گیرنده $DMU_j (j=1,2,\dots,n)$ وجود دارد که هر DMU_j ، m ورودی $X_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm})$ را برای تولید S خروجی $Y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{js})$ به کار می برد بطوریکه $y_j \neq 0$ و $x_j \neq 0$ و $X_j \geq 0$ و $Y_j \geq 0$ و C بردار هزینه ورودی ها و R بردار قیمت خروجی ها است.

در این بخش، به محاسبه شعاع پایداری کارایی هزینه واحدهای تصمیم گیرنده می پردازیم. برای این منظور، ابتدا واحد تحت ارزیابی را از مجموعه مشاهدات حذف کرده

^۱ مسئول مکاتبات (eml_mombini@yahoo.com-09123843369)
^۲ اسماعیل ممبینی



و واحد را ارزیابی می‌کنیم و به این ترتیب، کمترین هزینه برای تولید خروجی های فعلی
واحد حذف شده را به دست می‌آوریم

$$z_1^i = \min Cx \quad i$$

$$s.t. \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_j \leq x, \quad i(1)$$

مدل پیشنهادی به صورت زیر فرمولبندی می‌شود:

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_j \geq y_o, \quad i$$

$$\lambda_j \geq 0, x \geq 0. \quad i$$

فرض کنید که x^i جواب بهینه مدل فوق باشد در اینصورت، Cx^i نشاندهنده کمترین
هزینه برای تولید y_o در غیاب DMU_o می‌باشد.

محاسبه شعاع پایداری کارایی هزینه

در این بخش، با استفاده از کارایی هزینه که در بخش قبل محاسبه شد، به تعیین

شعاع پایداری کارایی ذکر شده می‌پردازیم. برای تعیین شعاع پایداری کارایی

هزینه DMU_o ، به تعیین طول گامی می‌پردازیم که اگر با این طول گام، در

امتداد یک جهت از پیش تعیین شده حرکت کنیم،

کارایی هزینه DMU_o تغییر نمی‌کند. برای این منظور، بردار حرکت را $g_i = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$

در نظر گرفته و با هدف ایجاد آشفتگی، به ترتیب، فقط در بردار ورودی، فقط در

بردار خروجی و در بردارهای ورودی و خروجی به طور همزمان، سه بردار جهت

را، به صورت $g_1 = \begin{pmatrix} -x_o \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_o \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -x_o \\ y_o \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم.

محاسبه شعاع پایداری کارایی هزینه

در این بخش، با در نظر گرفتن بردار جهت $g_i = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ ، طول گامی را تعیین می‌کنیم که

مقدار کارایی هزینه DMU_o در امتداد g_i بدون تغییر بماند و اندازه این طول گام را برای

تعیین شعاع پایداری کارایی هزینه DMU_o به کار می‌بریم. برای این منظور، مدل زیر

را برای تعیین طول گام فرمولبندی می‌کنیم:

$$\theta^i = \max \theta$$

$$\begin{aligned} s.t.: \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &\leq x_0 + \theta g_x \\ \sum \lambda_j y_j &\geq y_0 + \theta g_y \\ C(x_0 + \theta g_x) &\leq Cx^* \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن، x^* جواب بهینه مدل (1) می باشد. مدل (4)، طول گام θ را چنان تعیین می کند که با حرکت در امتداد بردار جهت $g_i = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ کارایی هزینه DMU_o تغییر نکند. اکنون

مدل (4) را به ازای سه بردار

$$g_3 = \begin{pmatrix} -x_o \\ y_o \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_o \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} -x_o \\ 0 \end{pmatrix}$$

عنوان شعاع پایداری کارایی هزینه تعریف خواهیم کرد

کارایی هزینه و شعاع پایداری کارایی هزینه با داده های بازه ای

درهمه مباحث اولیه و پایه ای فرض بر قطعی بودن ورودی ها و خروجی ها می باشد. به این معنی که واحد تحت ارزیابی با مصرف مقدار دقیق ورودی میزان دقیقی خروجی را تولید می کرد. و سپس به محاسبه کارایی هزینه، درآمد و سود پرداخته می شد. ولی در بسیاری از مسایل واقعی امکان غیرقطعی بودن داده ها وجود دارد. این مقادیر می توانند به فرم بازه ای، فازی و... تعریف شوند.

فرض کنید که n واحد تصمیم گیرنده $DMU_j (j=1,2,...,n)$ وجود دارد که هر DMU_j ، m

$$\bar{X}_j \in [x_j^l, x_j^u], j = 1, 2, \dots, n$$

را برای تولید

$$X_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm})$$

$$Y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{js})$$

$$\bar{Y}_j \in [y_j^l, y_j^u], j = 1, 2, \dots, n$$

و C بردار هزینه ورودی ها و R بردار قیمت خروجی ها است. مدل های برنامه ریزی زیر را برای اندازه گیری کارایی هزینه ارائه می کنیم.

3. یافته های تحقیق

کارایی هزینه با داده های بازه ای

در این بخش، به محاسبه شعاع پایداری کارایی هزینه واحدهای تصمیم گیرنده می پردازیم. برای این منظور، ابتدا واحد تحت ارزیابی را از مجموعه مشاهدات حذف کرده و واحد را ارزیابی می کنیم و به این ترتیب، بازه کمترین هزینه برای تولید خروجی های فعلی واحد حذف شده را به دست می آوریم

مدل برنامه ریزی زیر برای اندازه گیری کارایی هزینه ارائه می شود

$$z_1^* = \min Cx$$

$$s.t : \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j \bar{x}_j \leq \bar{x}$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j \bar{y}_j \geq \bar{y}_o$$

$$\bar{x} \leq \bar{x}_o, \bar{x} \geq 0$$

$$\lambda_j \geq 0$$

(7)

از آنجا که ورودی ها و خروجی ها در مدل بالا به فرم بازه ای هستند. در نتیجه کمترین هزینه مدل به فرم یک بازه به دست می آید. مدل های زیر را برای یافتن کران های بالا و پایین کارایی هزینه ارائه می کنیم

$$z_1^{l*} = \min Cx$$

$$s.t : \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_j^u \leq x^l$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_j^l \geq y_o^u$$

$$x^l \leq x_o^l, x^l \geq 0$$

$$\lambda_j \geq 0$$

(8)

مدل بالا کران پایین کارایی هزینه را محاسبه می کند. که انرا با

$$X^{*l}$$

نشان می دهیم در اینصورت، CX^{*l} نشاندهنده کمترین هزینه برای تولید y_o در غیاب DMU_o می باشد.

برای محاسبه کران بالای کارایی هزینه مدل زیر ارائه می شود

$$z_1^{u*} = \min Cx$$

$$s.t : \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_j^l \leq x^u$$

$$\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_j^u \geq y_o^l$$

$$x^u \leq x_o^u, x^u \geq 0$$

$$\lambda_j \geq 0$$

(9)



این مدل کران بالای کارایی هزینه را محاسبه می‌کند. و آنرا با

$$X^{*l}$$

نشان می‌دهیم. و بنابراین کارایی هزینه بصورت یک بازه به فرم زیر بدست می‌آید

$$[X^{*l}, X^{*u}]$$

محاسبه شعاع پایداری کارایی هزینه با داده‌های بازه‌ای

اکنون محاسبه شعاع پایداری کارایی هزینه یک واحد تصمیم گیرنده یعنی میزان حرکتی از ورودی‌ها و خروجی‌ها بطوریکه واحد تحت ارزیابی تغییر رفتار ندهد، می‌پردازیم

در این بخش، با در نظر گرفتن بردار جهت $g_i = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ ، طول گامی را تعیین می‌کنیم که

مقدار کارایی هزینه DMU_o در امتداد g_i بدون تغییر بماند و اندازه این طول گام را برای

تعیین شعاع پایداری کارایی هزینه DMU_o به کار می‌بریم

برای یافتن شعاع پایداری کارایی هزینه با توجه به کران‌های بالا و پایین باید برای

هرکدامشان شعاع پایداری را بدست آوریم

ابتدا شعاع پایداری کارایی هزینه را با در نظر گرفتن کران پایین محاسبه می‌کنیم

و بدین منظور، مدل زیر را برای تعیین طول گام فرمولبندی می‌کنیم

$$\theta^{*l} = \max \theta$$

$$s.t : \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^u \leq x_o^l + \theta g_x$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^l \geq y_o^u + \theta g_y$$

$$c(x_o^l + \theta g_x) \leq c x^{*l}$$

$$\lambda_j \geq 0, \theta \text{ is free}$$

(10)

که در آن،

$$X^{*l}$$

جواب بهینه مدل 8 می‌باشد. مدل 10، طول گام θ را چنان تعیین می‌کند که با حرکت

در امتداد بردار جهت $g_i = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ کارایی هزینه DMU_o تغییر نکند. اکنون مدل 10 را به

ازای سه بردار

$$g_3 = \begin{pmatrix} -x_o \\ y_o \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_o \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} -x_o \\ 0 \end{pmatrix}$$

کران پایین شعاع پایداری کارایی هزینه تعریف خواهیم کرد.

اکنون شعاع پایداری کارایی هزینه را با در نظر گرفتن کران بالا محاسبه می‌کنیم

و بدین منظور، مدل زیر را برای تعیین طول گام فرمولبندی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \theta^{**} &= \max \theta \\ s.t. : \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^i &\leq x_o^u + \theta g_x \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^i &\geq y_o^l + \theta g_y \\ c(x_o^u + \theta g_x) &\leq c x^{**} \\ \lambda_j &\geq 0, \theta \text{ is free} \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن،

$$X^{**}$$

جواب بهینه مدل 9 می باشد. مدل 11، طول گام θ را چنان تعیین می کند که با حرکت در امتداد بردار جهت $g_i = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ کارایی هزینه DMU_o تغییر نکند. اکنون مدل 10 را به

ازای سه بردار

$$g_3 = \begin{pmatrix} -x_o \\ y_o \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_o \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} -x_o \\ 0 \end{pmatrix}$$

کران بالا شعاع پایداری کارایی هزینه تعریف خواهیم کرد. بنابراین و در نتیجه مدل های فرمول بندی شده شعاع پایداری کارایی هزینه برابر است با بازه زیر

$$[\theta^{*l}, \theta^{*u}]$$

4. نتیجه گیری

این روش نشان می دهد که شعاع پایداری کارایی هزینه واحدها با داده های بازه ای بر پایه تحلیل حساسیت است. در این روش با حذف یک واحد تحت ارزیابی با کاربرد مدل ها واحد را ارزیابی می کنیم. اهمیت این مدل ها در این است که می توانند ناحیه پایداری برای عدم تغییر کارایی واحدها محاسبه کنند. در پایان این مدل ها می توانند شعاع پایداری کارایی هزینه را برای واحدهایی با داده های بازه ای بدست آورند

مراجع

[1] Amirteimoori, A. and Kordrostami, S., Azizi, H. (2017) 'Measurement of overall performances of decision making units in the presence of interval data', *International Journal of operational Research*, Vol. 28, No. 4, pp. 429-447.



- [2] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984) 'Some models for estimating technical and scale inefficiencies in DEA', *Management Science*, Vol. 30, pp. 1078-1092.
- [3] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978) 'Measuring the efficiency of decision making units', *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, pp. 429-444.
- [4] Esmaeili, M. (2012) 'An Enhanced Russell Measure in DEA with interval data', *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 219, pp. 1589-1593.
- [5] Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F. and Moradi, M. (2004a) 'Sensitivity and stability analysis in DEA with interval data', *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 156, pp. 463-477.
- [6] Kao, C. and Liu, S. (2011) 'Scale Efficiency Measurement in Data Envelopment Analysis with Interval Data: A Two-Level Programming Approach', *Journal of CENTRUM Cathedra*, Vol. 4, pp. 224-235.
- [7] Kordrostami, S. and Jahani Sayyad Noveiri, M. (2014) 'Evaluating the performance and classifying the interval data in data envelopment analysis', *International Journal of Management Science and Engineering Management*, Vol. 9, No. 4, pp. 243-248.
- [8] Seyed Esmaeili, F. S., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2020). Two-Stage Network DEA Model Under Interval Data. *Mathematical Analysis and Convex Optimization*, 1(2), 101-