

حل مسائل جریان ماکزیمال فازی با استفاده از الگوریتم بهبود یافته فروغ شفیقیان¹

¹ دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی - تحقیق در عملیات دانشگاه شهید مدنی تبریز
shafigiforogh@gmail.com

چکیده

در این مقاله، دو روش برای حل مسائل جریان ماکزیمال فازی را بررسی می کنیم، الگوریتمی برای پیدا کردن جریان ماکزیمال فازی بین منبع و چاهک معرفی شده است که در این الگوریتم از تابع رتبه بندی و اعداد فازی برای نمایش جریان بین گره ها استفاده می شود. وجود قسمت منفی در اعداد فازی سه تایی نشان دهنده ی این است که جریان بین دو گره ممکن است منفی باشد هر چند از نظر علم ریاضی این مطلب درست است و با خواص تابع رتبه بندی مطابقت دارد، اما در زندگی واقعی کمیت منفی از جریان معنای فیزیکی خاصی ندارد. در این مقاله این الگوریتم را بهبود بخشیده ام و این ضعف را رفع کرده ایم. روش دوم معرفی شده، روش برنامه ریزی خطی فازی است. در این روش هم تمام پارامترها، به وسیله ی اعداد فازی سه تایی نشان داده می شوند. فواید به کارگیری هر دو روش را با مثال عددی ارائه شده نشان می دهیم.

کلمات کلیدی: مسئله جریان ماکزیمال فازی، تابع رتبه بندی، عدد فازی سه تایی، برنامه ریزی خطی فازی، الگوریتم بهبود یافته

1. مقدمه

مساله جریان ماکزیمال یکی از مسائل اصلی برای بهینه سازی ترکیباتی در گرافهای جهتی و زندان می باشد. میتوان مدلهای بسیار مفیدی در زمینه های علمی از جمله در شبکه های ارتباطی، سیستمهای خطوط لوله نفت و سیستمهای قدرت را به کمک این مسائل بیان نمود. تعیین جریان ماکزیمال در شبکه ی حمل و نقل در شرایط غیر قطعی کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. روزنبرگ¹ در سال 2006 یک راه حل با در نظر گرفتن ظرفیت های بازه ای کمان پیشنهاد کرده است [24]. چاناس² برای حل این مساله اصطلاح «گرافهای فازی» را به کار برد. کومار³ این مساله را به کمک روش سیمپلکس برنامه ریزی خطی بیان کرده است. مسائل جریان ماکزیمال فازی توسط کومار و کائور⁴ با استفاده از برنامه ریزی خطی فازی و به کمک اعداد فازی مثلثی بیان شده و با کمک خواص آنالیز حل شده است [2]. جریان یک عدد حقیقی است و ظرفیتای صدق پذیر، با کران های بالایی و پایینی هستند. چاناس و همکارانش (1995) مسئله جریان ماکزیمال را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند [8]. مسئله جریان ماکزیمال هنگامی که ساختار اساسی مربوطه به آن به خوبی تعریف نشده بود بایستی بعنوان یک گراف فازی مدل سازی میشد، پیشنهاد کردند. لیو و کائو⁵ (2004) مسائل شبکه ی جریان را بررسی کردند که طول یالهایشان در شبکه اعداد فازی است [2]. جی و همکارانش (2006) یک نسخه ی فازی که تعمیم مسئله جریان ماکزیمال هست را مورد بررسی قرار دادند که ظرفیت های یال در آن، متغیرهای فازی هستند [1]. هرناندس و همکارانش (2007) یک الگوریتم براساس الگوریتم کلاسیک از فورد فولکرسون پیشنهاد دادند [16]. این الگوریتم از رونهای گراف توسعه یافته استفاده می کند و تمام پارامترها را بعنوان اعداد فازی نشان می دهد. کومار و همکارانش (2009) یک الگوریتم جدیدی را برای یافتن جریان ماکزیمال فازی بین منبع و چاهک با استفاده از تابع رتبه بندی پیشنهاد دادند [20]. الگوریتمهای موجود ضعفهایی داشتند کومار و همکارانش (2009) برای غلبه بر این قصور یک الگوریتم بهبود یافته برای حل مسئله جریان ماکزیمال فازی معرفی کردند. [6]

¹ . Rozenberg

² . Chanas

³ . Kumar

⁴ . Amit Kumar and Manjot Kaur

⁵ . Liu & Kao

⁶ . Ji & et al

2. مرور ادبیات

تعریف 1: عدد فازی (c, b, a) عدد فازی سه تایی گفته میشود، اگر تابع عضویت به صورت زیر داشته باشیم:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & b < x \leq c \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $a \leq b \leq c$ $R \ni c, b, a$

تابع رتبه بندی: یک روش مناسب برای مقایسه اعداد فازی، استفاده از تابع رتبه بندی است. تابع $R: F(R) \rightarrow R$ که در آن $F(R)$ مجموعه همه اعداد فازی تعریف شده که روی مجموعه اعداد حقیقی می باشد و هر عدد فازی را به یک عدد حقیقی مینگارد، یک تابع رتبه بندی اعداد فازی نامیده می شود. طبق دستور موجود:

i $\hookrightarrow \tilde{A} > \tilde{B}$ اگر $R(\tilde{A}) > R(\tilde{B})$

ii $\hookrightarrow \tilde{A} < \tilde{B}$ اگر $R(\tilde{A}) < R(\tilde{B})$

iii $\hookrightarrow \tilde{A} \approx \tilde{B}$ اگر $R(\tilde{A}) = R(\tilde{B})$ (2)

عملیات محاسباتی بر روی عددهای فازی سه تایی: فرض کنید

$\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ دو عدد فازی سه تایی باشند آنگاه:

i $\hookrightarrow \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ جمع

ii $\hookrightarrow \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = (a_1, b_1, c_1) - (a_2, b_2, c_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ تفریق

iii $\hookrightarrow \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$ اگر و فقط اگر $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ (3)

نارساییهای الگوریتم موجود

برای غلبه بر کاستیهای موجود الگوریتم معرفی شده توسط کومار و همکارانش (سلطانی و حاجی 2007 [26]) در عمل تفاضل عملیات زیر را جایگزین کردند [6][20]. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2)$ دو عدد فازی سه تایی باشند، آنگاه $\tilde{A} - \tilde{B} = (a, b, c)$ که در آن:

(4)

3- یافته های تحقیق

فرمولاسیون برنامه ریزی خطی از مسئله جریان ماکزیمال در محیط فازی

فرض کنید $G = (v, E)$ یک گراف جهتدار با ظرفیت فازی کران بالای u_{ij} باشد. مقدار \bar{x}_{ij} هر یال (i, j) به جریان فازی در یال (i, j) مربوط میباشد [25]. فرض کنید \bar{f} مقدار جریان ماکزیمال شبکه‌ی فازی از گره منبع s به گره مقصد t باشد. مسائل جریان ماکزیمال در محیط فازی به صورت زیر فرموله می شود:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \bar{f} \\ & s.t \sum \bar{x}_{ij} = \sum \bar{x}_{ki} \oplus \bar{f} \quad i = s \\ & \sum_i \bar{x}_{ij} = \sum_k \bar{x}_{ki}; \forall i \neq s, t \\ & \sum_i \bar{x}_{ij} \oplus \bar{f} = \sum_k \bar{x}_{ki}; i = t \end{aligned}$$

$$x_{ij} \leq \bar{u}_{ij} \forall (i, j) \in E \text{ است } x_{ij} \text{ یک عدد فازی غیر منفی است} \quad (5))$$

گام اول: فرموله کردن مسئله جریان ماکزیمال داده شده را به مسئله برنامه ریزی خطی فازی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \bar{f} \\ & \text{s.t } \sum \bar{x}_{ij} = \sum \bar{x}_{ki} \oplus \bar{f}; i=s \\ & \sum \bar{x}_{ij} = \sum_k \bar{x}_{ki} \forall i \neq s. t \\ & \sum_i \bar{x}_{ij} \oplus \bar{f} = \sum \bar{x}_{ki}; i=t \\ & \bar{x}_{ij} \leq \bar{u}_{ij} \forall (i, j) \in E \text{ است } \bar{x}_{ij} \text{ یک عدد فازی غیر منفی است} \end{aligned} \quad (6)$$

گام دوم: فرض کنید تمام پارامترهای \bar{x}_{ij} و \bar{f}_i و \bar{u}_{ij} به وسیله عدد فازی سه تایی به ترتیب (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) و (f_1, f_2, f_3) و (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) نمایش داده میشود. برنامه ریزی خطی که از مسئله جریان ماکزیمال فازی گام 1 حاصل میشود، به صورت زیر فرموله میشود:

$$\begin{aligned} & \text{Max}(f_1, f_2, f_3) \\ & \text{s.t } \sum (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum (a_{kj}, b_{kj}, c_{kj}) \oplus (f_1, f_2, f_3); i=s \\ & \sum_i (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{kj}, b_{kj}, c_{kj}); \forall i \neq s. t \\ & \sum_i (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (f_1, f_2, f_3) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}); i=s \\ & (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \leq (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) \forall (i, j) \in E \end{aligned} \quad (7)$$

گام سوم: محدودیت نابرابر را به وسیله معرفی متغیر غیر منفی به محدودیت برابر بر می-گردانیم.

$$\bar{s}_{ij} = (s'_{ij}, s_{ij}, s''_{ij}) \forall (i, j) \in E \quad (8)$$

مسئله برنامه ریزی خطی که از گام 2 به دست میآید، میتوان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \text{Max}(f_1, f_2, f_3) \\ & \text{s.t } \sum_i (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_i (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \oplus (f_1, f_2, f_3); i=s \\ & \sum_i (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}); \forall i \neq s. t \\ & \sum_i (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (f_1, f_2, f_3) = \sum_k (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}); i=t \\ & (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (s'_{ij}, s_{ij}, s''_{ij}) = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) \forall (i, j) \in E \end{aligned} \quad (9)$$

گام چهارم: مسئله برنامه ریزی خطی فازی که در گام سوم حاصل شده است، به مسئله برنامه ریزی خطی حلقهای بر میگرددانیم.

$$\text{Max } \bar{z}$$

$$\begin{aligned} \sum a_{ij} &= \sum_k a_{ki} + f_1; i=s \\ \sum a_{ij} &= \sum_k a_{ki}; \forall i \neq s. t \dots (1) \end{aligned}$$

$$\sum a_{ij} + f_1 = \sum_k a_{ki}; i=t$$

$$\sum_i b_{ij} = \sum_k b_{ki} + f_2; i=s$$

$$\sum b_{ij} = \sum_k b_{ki}; i \neq s, t \dots (2)$$

$$\sum b_{ij} + f_2 = \sum_k b_{ki}; i=t$$

$$\sum_i c_{ij} = \sum_k c_{ki} + f_3; i=s$$

$$\sum_i c_{ij} = \sum_k c_{ki}; \forall i \neq s, t \dots (3)$$

$$\sum_i c_{ij} + f_3 = \sum_k c_{ki}; i=t$$

$$a_{ij} + s_{ij}' = u_{ij}$$

$$b_{ij} + s_{ij}'' = v_{ij}$$

$$c_{ij} + s_{ij}''' = w_{ij}$$

$$b_{ij} - a_{ij} \geq 0, c_{ij} - b_{ij} \geq 0, a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0, c_{ij} \geq 0$$

$$s_{ij}' - s_{ij}'' \geq 0, s_{ij}'' - s_{ij}''' \geq 0, s_{ij}' \geq 0, s_{ij}'' \geq 0, s_{ij}''' \geq 0$$

$$f_2 - f_1 \geq 0, f_3 - f_2 \geq 0, f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_3 \geq 0 \forall (i, j) \in E \quad (10)$$

گام پنجم: برای اینکه جریان بهینه f_1, f_2, f_3 را بدست آوریم مسئله برنامهریزی خطی حلقهای گام چهارم از الگوریتم را حل میکنیم.

گام ششم: جریان ماکزیمال فازی بوسیلهی جایگذاری مقادیر f_1, f_2, f_3 حاصل میشود:

$$\tilde{f} = (f_1, f_2, f_3)$$

الگوریتم بهبود یافته

یال (i, j) را با ظرفیت فازی اولیه $(\tilde{f} \bar{c}_{ij}, \tilde{f} \bar{c}_{ji})$ در نظر بگیرید. از آنجایی که انتظار می رود بخشی از این ظرفیت های فازی در یال، جریان داشته باشد، (باقیمانده ظرفیت های فازی) باقیمانده این ظرفیت فازی در یال بروز می شود. از نماد $(\tilde{f} c_{ij}, \tilde{f} c_{ji})$ برای نشان دادن باقیمانده فازی استفاده میکنیم.

گام 1: برای همه یالهای (i, j) مجموعهای از ظرفیت فازی باقی مانده با ظرفیت فازی اولیه برابر است.

$$(\tilde{f} c_{ij}, \tilde{f} c_{ji}) = (\tilde{f} \bar{c}_{ij}, \tilde{f} \bar{c}_{ji}) \text{ فرض کنید } a_1 = \infty \text{ و منبع } 1 \text{ را با برچسب } i \text{ اختیار می کنیم.}$$

$i=1$ انتخاب میکنیم و به مرحله 2 میرویم.

گام 2: S_i را تعیین میکنیم. مجموعهای از گرههای بدون برچسب z که میتوانند بطور مستقیم توسط یال های باقیمانده مثبت از گره i برچسبگذاری شوند. اگر $S_i \neq \emptyset$ ، به گام 3 می-رویم. در غیر این صورت به مرحله 4 میرویم.

پ 3: $k \in S_i$ را تعیین می کنیم بطوریکه $R(\tilde{f} c_{ij}) = R(\tilde{f} c_{ik})$ $\max_{j \in S_i} R(\tilde{f} c_{ij})$ اختیار کنید $\tilde{f} a_k = \tilde{f} c_{ik}$ و گره k را با $[\tilde{f} a_k, i]$ برچسبگذاری میکنیم. اگر $k=n$ باشد، گره چاهک را برچسبگذاری کرده-ایم و مسیر موفقیت پیدا شده است به گام 5 میرویم در غیر اینصورت فرض کنید $i=k$ ، و به گام 2 میرویم.

گام 4 (عقب نشینی): اگر $i=l$ باشد، هیچ پیشرفتی امکان نداشته باشد، به گام 6 بروید. در غیر این صورت فرض کنید r یک گره باشد که بلافاصله قبل از گره فعلی i برجسیب-گذاری میشود و گره i را از مجموعه گرههای مجاور r حذف میکنیم. قرار می دهیم $i=r$ و به گام 2 میرویم.

گام 5 (تعیین باقیمانده): قرار می دهیم $N_p = (1, k_1, k_2, \dots, n)$ ، گرههای p^{th} که حاصل مسیر موفقیت از گره منبع 1 به گره چاهک n است بنابراین جریان ماکزیمال تنها طول مسیر منبع محاسبه میشود مثلاً با:

$$\tilde{f}_p = \min \{ \tilde{f}_{a_{k1}}, \tilde{f}_{a_{k2}}, \tilde{f}_{a_{k3}}, \dots, \tilde{f}_{a_n} \} \quad (11)$$

ظرفیت باقی مانده از هر یال در طول مسیر مانع رسیدن به موفقیت است که \tilde{f}_p در جهت جریان، کاهش پیدا می کند و \tilde{f}_p در جهت معکوس، افزایش مییابد. برای دو گره i و z روی مسیر، جریان باقیمانده از $(\tilde{f}_{c_{ij}}, \tilde{f}_{c_{ji}})$ جاری تغییر میکند به:

$$(\tilde{f}_{c_{ij}} \ominus \tilde{f}_p, \tilde{f}_{c_{ji}} \oplus \tilde{f}_p)$$

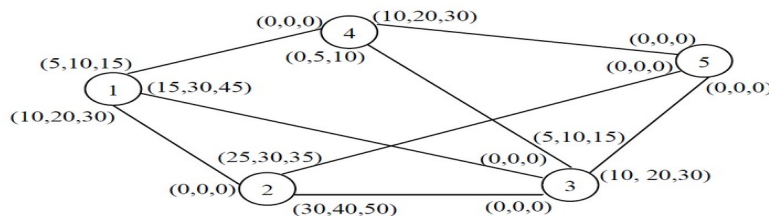
$$(\tilde{f}_{c_{ij}} \oplus \tilde{f}_p, \tilde{f}_{c_{ji}} \ominus \tilde{f}_p)$$

زمانی که هر یک از گرهها برقرار باشند گام 4 حذف میشود. قرار می دهیم $i = 1$ ، و به گام 2 بر میگردیم و سعی میکنیم در ادامه مسیر موفقیتآمیز جدیدی را پیدا کنیم.

گام 6 (جواب): با توجه به این که m تعداد مسیرهای موفقیتآمیز را به ما میدهد تعیین شده باشند، جریان ماکزیمال فازی در شبکه به صورت $\tilde{f} = \tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{f}_m$ است که در آن m یک عدد تکرار برای دستیابی به موفقیت است.

4- مطالعه کاربردی

مثال گویا: شبکه ای که در شکل (1) ملاحظه میکنیم، ابتدا از روش برنامه ریزی خطی فازی حل میکنیم و سپس در روش بعدی از الگوریتم بهبود یافته برای حل مثال عددی فوق استفاده می کنیم.



شکل (1): شبکههای برای مسئله جریان ماکزیمال با طولهای قوس فازی

گام 1: فرض کنید تمام پارامترهای \bar{x}_{ij} و \bar{f} و \bar{u}_{ij} با استفاده از اعداد فازی سه تایی غیر منفی به ترتیب (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) و (f_1, f_2, f_3) و (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) نمایش داده شوند، مسئله جریان ماکزیمال فازی، به صورت زیر فرموله میشود:

Max \bar{f}

$$\bar{x}_{12} \oplus \bar{x}_{13} \oplus \bar{x}_{14} = \bar{f}$$

$$\bar{x}_{23} \oplus \bar{x}_{25} = \bar{x}_{12}$$

$$\bar{x}_{34} \oplus \bar{x}_{35} = \bar{x}_{13} \oplus \bar{x}_{23}$$

$$\bar{x}_{45} = \bar{x}_{14} \oplus \bar{x}_{34}$$

$$\bar{x}_{25} \oplus \bar{x}_{35} \oplus \bar{x}_{45} = \bar{f}$$

$$\bar{x}_{ij} < \bar{u}_{ij} \quad \forall (i, j) \in E$$

$$\bar{x}_{12} \leq (10, 20, 30), \bar{x}_{13} \leq (5, 10, 15), \bar{x}_{14} \leq (0, 0, 0)$$

$$\bar{x}_{23} \leq (0, 0, 0), \bar{x}_{25} \leq (0, 5, 10), \bar{x}_{34} \leq (0, 0, 0)$$

$$\bar{x}_{35} \leq (0, 0, 0), \bar{x}_{45} \leq (5, 10, 15)$$

$$\bar{s}_{ij} = (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) \forall (i, j) \in E$$

$$\text{Max}(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)$$

$$(a_{12} \cdot b_{12} \cdot c_{12}) \oplus (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) = (10, 20, 30)$$

$$(a_{13} \cdot b_{13} \cdot c_{13}) \oplus (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) = (15, 30, 45)$$

$$(a_{14} \cdot b_{14} \cdot c_{14}) \oplus (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) = (5, 10, 15)$$

$$(a_{23} \cdot b_{23} \cdot c_{23}) \oplus (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) = (30, 40, 50)$$

$$(a_{25} \cdot b_{25} \cdot c_{25}) \oplus (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) = (25, 30, 35)$$

$$(a_{34} \cdot b_{34} \cdot c_{34}) \oplus (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) = (5, 10, 15)$$

$$(a_{35} \cdot b_{35} \cdot c_{35}) \oplus (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) = (10, 20, 30)$$

$$(a_{45} \cdot b_{45} \cdot c_{45}) \oplus (s_{ij}^{\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime} \cdot s_{ij}^{\prime\prime\prime}) = (10, 20, 30)$$

$$a_{ij} + s_{ij}^{\prime} = u_{ij}$$

$$b_{ij} + s_{ij}^{\prime\prime} = v_{ij}$$

$$c_{ij} + s_{ij}^{\prime\prime\prime} = w_{ij}$$

$$a_{12} + a_{13} + a_{14} - f_1 = 0 \implies f_1 = a_{12} + a_{13} + a_{14}$$

$$b_{12} + b_{13} + b_{14} - f_2 = 0 \implies f_2 = b_{12} + b_{13} + b_{14}$$

$$c_{12} + c_{13} + c_{14} - f_3 = 0 \implies f_3 = c_{12} + c_{13} + c_{14}$$

$$u_{12} = 10, u_{13} = 15, u_{14} = 5$$

$$v_{12} = 20, v_{13} = 30, v_{14} = 10$$

$$w_{12} = 30, w_{13} = 45, w_{14} = 15$$

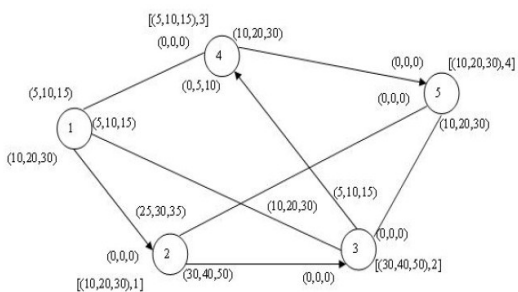
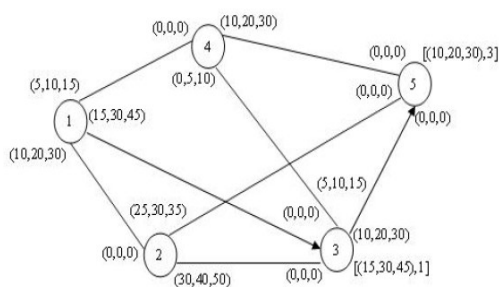
$$u_{12} + u_{13} + u_{14} = f_1 \implies 10 + 15 + 5 = f_1 = 30$$

$$v_{12} + v_{13} + v_{14} = f_2 \implies 20 + 30 + 10 = f_2 = 60$$

$$w_{12} + w_{13} + w_{14} = f_3 \implies 30 + 45 + 15 = f_3 = 90 \quad (12)$$

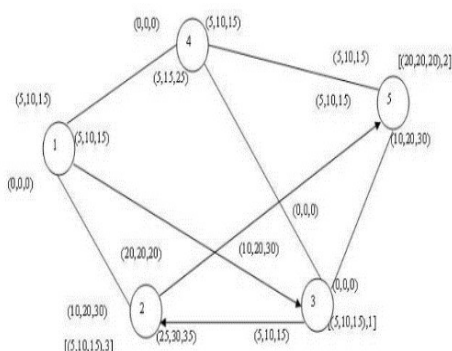
پس $\bar{f} = (30, 60, 90)$ که مقدار جریان ماکزیمال فاز $\bar{f} = (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3) \cdot f_3 = 90 \cdot f_2 = 60 \cdot f_1 = 30$ است.

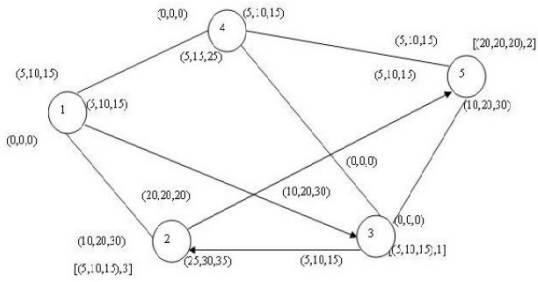
روش دوم: الگوریتم بهبود یافته



شکل (3): شبکه بدست آمده بعد از تکرار 2

شکل (2): شبکه بدست آمده بعد از تکرار 1





شکل (5): شبکه بدست آمده بعد از تکرار چهارم
 شکل (4): شبکه بدست آمده بعد از تکرار سوم

تکرار 5:

$$f_5 = \min\{(\infty, \infty, \infty), (5, 10, 15), (5, 10, 15)\} = (5, 10, 15)$$

$$(\tilde{f}c_{14}, \tilde{f}c_{41}) = ((5, 10, 15) \ominus (5, 10, 15), (0, 0, 0) \oplus (5, 10, 15)) = ((0, 0, 0), (5, 10, 15))$$

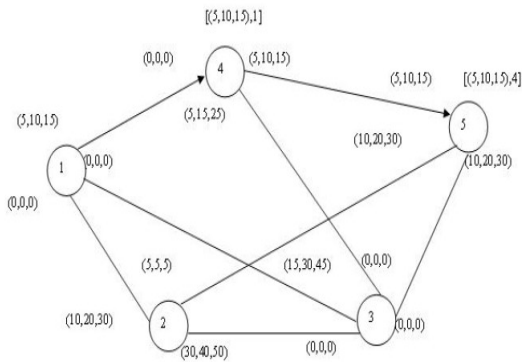
$$(\tilde{f}c_{45}, \tilde{f}c_{54}) = ((5, 10, 15) \ominus (5, 10, 15), (5, 10, 15) \oplus (5, 10, 15)) = ((0, 0, 0), (10, 20, 30))$$

(13)

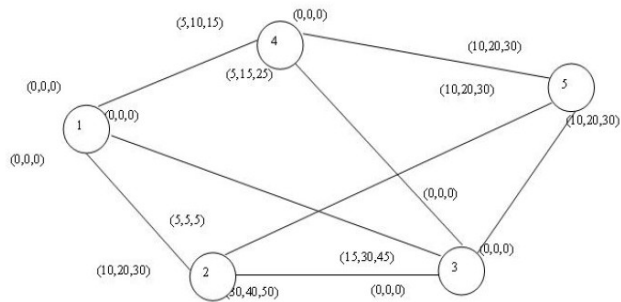
تکرار بیشتری بعد از تکرار 5 امکان پذیر نیست، زیرا هیچ مسیری برای رسیدن به چاهک از منبع وجود ندارد.
 جریان ماکزیمال فازی به این صورت است:

$$\tilde{F} = \tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2 \oplus \tilde{f}_3 \oplus \tilde{f}_4 \oplus \tilde{f}_5$$

$$\tilde{f}(10, 20, 30) \oplus (5, 10, 15) \oplus (5, 10, 15) \oplus (5, 10, 15) \oplus (5, 10, 15) = (30, 60, 90) \quad (14)$$



شکل (6): شبکه



شکل (7): بدون مسیر دستیابی به موفقیت بدست آمده بعد از تکرار پنجم

5- نتیجه گیری

- 1) مقدار جریان بین منبع و چاهک بیشتر از 30 و کمتر از 90 واحد است.
 - 2) تعداد ماکزیمم افراد به نفعشان خواهد بود، مقدار جریان 60 واحد باشد.
 - 3) درصد مطلوب برای جریان باقیمانده را میتوان به صورت زیر به دست آورد:
- فرض کنید x مقدار جریان را نشان دهد، آنگاه درصد مساعد برابر $x = \mu_{\tilde{F}}(x) \times 100$ که در آن:

$$\mu_{\tilde{F}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-30)}{30} & 30 \leq x \leq 60 \\ 1 & x = 60 \\ \frac{(90-x)}{30} & 60 \leq x \leq 90 \end{cases}$$

1. Ahuj, K.K., Magnanti, T.L. and Orlin, J.B. (1993), Network flowers: Theory, Algorithm, and applications, prentice Hall, Nj.
2. Alam, M.K., Hasan, M.K., Maheswara, R.V., Nirmal, K.M. and Ramanuja Roa, K. (2015), Generalized trapezoidal fuzzy numbers with rank and divergence provide the optimal outcome of fuzzy maximal flow network. International journal of advanced research in engineering and management. Vol 1, issue 8, p.45.
3. Alam, MK. and Hasan, MK. (2014), Solution of fuzzy maximal flow network problem based on generalized trapezoidal fuzzy numbers with rank and mode. International journal of engineering research and development, Vol 9, issue 7, pp.40-49.
4. Amit, K. and Manjot, K. (2010), An Algorithm of solving fuzzy maximal flow problems using generalized trapezoidal fuzzy numbers. International journal of applied science and engineering, pp. 109-118.
5. Amit, K. and Manjot, K. (2011), A New algorithm for solving network flow problems with fuzzy arc lengths. Turkish journal of fuzzy systems. Vol 2, No1, pp. 1-13.
6. Amit, K and Manjot K. (2012), An improved Algorithm for Solving Fuzzy Maximal Flow Programs. International journal of applied science and engineering, pp.19 -27
7. Bazzarra, M.S., Jarris, J.J. and Sherali, H.D. (1990), Linner and network flowers, 2nd edition; Wiley, New York.
8. Chanas, S., Delgado, J.L. and Verdegay, M.A. (1995), Vila, theory and methodology fuzzy optimal flow on imprecise structures. European journal of operational research, Vol 83, pp. 568-580.
9. Dinitz, E. (1970), Algorithm for solution of a problem of maximum flow in network with power estimation, Soviet mathematics. Doklady, pp.1277-1280.
10. Edmonds, J. and Karp, R. (1972), Theoretical improvements in Algorithm efficiency for network flow problems, Journal of the association for computing machinery, Vol 19, issue 1, pp. 248-264.
11. Ford, F. (1998), Maxflow labeling algorithm. Harrej. Greenberg. University of Colorado at Denver.
12. Ford, JR. LR. And Fulkerson, D.R. (1956), Maximal flow through a network. Canadian journal of mathematics, Vol 8, pp. 390-404.
13. Frederickson, G. (1987), Fast Algorithms for shortest paths in planar graphs with application, Siam journal on computing, Vol 16, pp. 1004-1022.
14. Fulkerson, D.R. and Dantiz, G.B. (1995), Comutation of maximal flow in network. Vol2, Issue4.
15. Hassin, R. (1981), Maximum flow in (s,t) – planar networks, in formation processing letters, Vol13, p.107.
16. Hernandez, F., Lammata, M., Takahashi, M. T., Yamakami, A., and Verdegay, J. L. (2007). An Algorithm for the fuzzy maximum flow problem IEEE international fuzzy Systems Conference, pp 1-6
17. Ji, X., Yang L., and shao, Zhen. (2006), Chance constrained maximum flow problem with arc capacities, Lecture Notes in computer science, springer-He ; Berlin, Heidelberg, 4114: 11-19
18. Johnson, D.B. (1977), Efficient algorithms for shortest paths in sparse graphs, journal of the association for computing machinery, Vol 24, pp.1-13.
19. Johnson, D.B. (1987), Parallel algorithms for minimum cuts and maximum flow in planar networks, journal of the association for computing machinery, Vol34, pp. 950-967.
20. Kumar, A., Bhatia, N., and Kaur, M. (2009), A new approach for solving fuzzy maximal flow problems. Lecture Notes in computer Science. Springer- Verlag; Berlin, Heidelberg. 5908: 278-286
21. Kumar, A., Singh, P., Kaur, A., and Kaur, P. (2010), RM approach for ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers. Fuzzy information and Engineering, vol1, pp. 37-47
22. Kumar, A., Yadav, S. P., and Kumar, S.(2008), Fuzzy system reliability using different types of vague sets, International Journal of applied science and Engineering, vol6, pp. 71-83
23. Liu, S T. and Kao, C. (2004), Network flow problems with fuzzy arc lengths. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 34: 765-769
24. Rozenberg, I.N. (2006) Flow in network under fuzzy conditions, Public corporation Research and Development Institute of Railway Engineers; Moscow, Russia
25. Simon, D.Tella, Y and Yohanna, J.(2015), The solution of maximal flow problems using the method of fuzzy linear programming, the international journal of engineering and science (IJES), Vol 4, pp.21-31.
26. Soltani, A. and Haji, R.(2007), A project scheduling method based on fuzzy theory, journal of industrial and systems engineering, vol 1, pp. 70-80
27. Weihe, K. (1997), Maximum (s,t)- flows in planar networks in $O(|V| \log |V|)$ time, journal of computer and system sciences, Vol55, issue 3, pp. 454-476.
28. Whitney, H. (1933), Planar graphs, fundamenta mathematica, Vol 21, pp.73-84.
29. Zadeh, L.A. (1965), Fuzzy sets information and control, pp. 338-353