چکیده مبسوط دومین سمینار ملی کنترل و بهینه‌سازی

۲۴-۲۵ آبان ۱۳۹۷، دانشگاه صنعتی شاهرود

بررسی ویژگی‌های اختیار معامله آسیایی برای بازارهای مالی غیرقطعی نسبت به اختیار معامله اروپایی و آمریکایی

صبا صفری [1] * و محمدرضا ضرابی [2]

[1,2] *گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم‌کامپیوتر، دانشگاه دامغان*
safari_saba93@yahoo.com
mzarrabi@du.ac.ir

چکیده. اختیار معامله آسیایی ابزار مشتقه مالی مهمی است که از سوی سرمایه‌گذاران، به منظور مدیریت ریسک، مورد پذیرش قرار گرفته است. بازار مالی غیرقطعی، شاخه‌ای جدید است که فرآیند ریسک توسط فرآیندهای غیرقطعی، توصیف می‌شود. در این مقاله، مدل‌های اختیار معامله آسیایی برای بازارهای مالی غیرقطعی، پیشنهاد شده و به همراه آن از آنجایی‌که محاسبه میانگین قیمت که در فرمول قیمت‌گذاری آسیایی آمده کاری دشوار است از فرمول یائو-چن[۱] برای حل مسأله، به کار گرفته شده است.

۱. مقدمه

اختیار معامله اروپایی فقط در زمان سررسید قابل اجرا است. اختیار معامله آمریکایی، هم در زمان سررسید و هم در زمان قبل از تاریخ سررسید قابل اجرا است. اختیار معامله آسیایی دو مزیت دارد. اول اینکه موجب کاهش ریسک دستکاری دارایی پایه، در زمان سررسید می‌شود و دوم اینکه در مقایسه با اختیار آمریکایی و اروپایی، هزینه کمتری برای کاهش بی‌ثباتی موجود در آن، پرداخت می‌کند. براساس فرضیه‌ای که در آن قیمت سهام از فرآیند ژئومتریکی لیو[۱] پیروی می‌کند، نظریه عدم قطعیت اولین بار از سوی لیو در سال ۲۰۰۹ در ریاضی مالی وارد شد.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. اختیار معامله آسیایی، فرآیند متعارف لیو، فرآیند عدم قطعیت .

* سخنران

[1]Liu

اختیار معامله آسیایی برخلاف اختیار آمریکایی و اروپایی به میانگین قیمت دارایی پایه بستگی دارد که به منظور دستیابی به آن، به برخی ویژگی‌های معادلات دیفرانسیل غیرقطعی نیاز است. فرمول یائو-چن در معادلات دیفرانسیل غیرقطعی و معادلات دیفرانسیل معمولی ارتباط دارد و به کمک قضیه‌ها در مقاله یائو می‌توان به آسانی به قیمت اختیار معامله آسیایی دست پیدا کرد.

۲. مفاهیم مقدماتی

برای درک بهتر موضوع لازم است نظریه عدم قطعیت بر اساس اصل موضوعی [۲] مطالعه شود.

تعریف ۱.۲. [۱] *فرآیند غیرقطعی، فرآیند متعارف لیو نامیده می‌شود اگر*

(۱) $c_0 = 0$ باشد. یعنی تمام مسیرها نمونه از نوع پیوستگی لیپ‌شیتس باشد.

(۲) c_t دارای نموهای ساکن و غیر وابسته باشد.

(۳) $c_{t+s} - c_t$ یک متغیر غیرقطعی نرمال با مقدار مورد انتظار o و واریانس t^2 است که در آن توزیع عدم قطعیت بصورت $\varphi(x) = \left(1 + exp\left(-\frac{\pi x}{\sqrt{3}t}\right)\right)^{-1}, \; x \in k$ است. c_t فرآیند لیو باشد $X_t = exp(c_t - \sigma_t)$ فرآیند ژئومتریکی لیو نامیده می‌شود.

توجه ۱.۲. *تعریف معادله دیفرانسیل غیرقطعی بر طبق فرآیند متعارف لیو و توزیع عدم قطعیت معکوس توابع اکیداً صعودی و نزولی، به‌ترتیب از مراجع [۱] و [۳] مطالعه شود.*

تعریف ۲.۲. [۴] *فرض کنید $0 < \alpha < 1$. یک دیفرانسیل غیرقطعی*

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dc_t,$$

جواب دیفرانسیل زیر را $\alpha - path$ نامیده که در واقع در آن به جای c_t، می‌توان Φ^{-1} را قرار داد تا از حالت عدم قطعیت خارج کند.

$$dX_t^\alpha = f(t, X_t)dt + |g(t, X_t)|\Phi^{-1}(\alpha)dt,$$

که در آن $\Phi^{-1}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$، یک توزیع غیرقطعی معکوس از متغیر غیرقطعی نرمال است.

روش ۹۹- یائو-چن: روش عددی برای معادلات دیفرانسیل غیرقطعی است.

مرحله ۱: α را در $(0, 1)$ در نظر گرفته و h را طول گام قرار دهید.

$$N = s/h, \quad i = 0, \quad X_0^\alpha = X_0.$$

مرحله ۲: از فرمول بازگشتی $X_{i+1}^\alpha = X_i^\alpha + f(t, X_i^\alpha)h + g(t, X_i^\alpha)\Phi^{-1}(\alpha)h$ استفاده کرده و محاسبه کردن X_{i+1}^α و $J(X_{i+1}^\alpha)$.

مرحله ۳: $i \longleftarrow i + 1$ قرار داده.

مرحله ۴: مرحله ۲ و ۳ را N بار تکرار کرده.
مرحله ۵: توزیع عدم قطعیت معکوس از $\int_0^s J(X_t)\,dt$ به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\Psi_s^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} J(X_i^\alpha)h.$$

از روش ۹۹- یائو-چن، برای محاسبه توزیع عدم قطعیت X_t^α استفاده کرده و در آن J را یکسان در نظر گرفته.

۳. مدل سبد سهام غیرقطعی

فرض کنید قیمت سهام از فرآیند ژئومتریکی لیو پیروی کند. در مدل سبد سهام لیو، قیمت اوراق قرضه X_t و قیمت سهام Y_t از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt, \\ dY_t' = eX_t dt + \sigma X_t dc_t, \end{cases}$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، e دریفت سهام، σ انتشار سهام و c_t فرآیند متعارف لیو می‌باشند. با استفاده از قانون زنجیره‌ای، قیمت سهام بصورت $Y_t = Y_0 exp(et + \sigma c_t)$، براساس مدل سبد سهام غیرقطعی، فرمول قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی و اروپایی از روی لیو-چن بدست آمده است. مدل دیگر از سبد سهام غیرقطعی، پنک-پتئو مطرح شد که در آن قیمت سهام از معادلات دیفرانسیل غیرقطعی بازگشت به میانگین پیروی می‌کند که بصورت زیر قیمت سهام Y_t تعیین می‌شود که در آن a، b و σ، مقادیر ثابت و σ انتشار سهم است.

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt, \\ dY_t = (a - bY_t)dt + \sigma dc_t, \end{cases}$$

تمام مدل‌های سهام بالا را می‌توان با یک مدل کلی‌تر خلاصه کرد.

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt, \\ dX_t = f(t, Y_t)dt + g(t, Y_t)dc_t, \end{cases}$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، f و g دو تابع و c_t قیمت متعارف لیو می‌باشد.

۴. قیمت اختیار خرید معامله آسیایی

مدل کلی سبد سهام غیرقطعی را دز نظر گرفته و فرض کنید اختیار خرید آسیایی دارای قیمت اعمال k در زمان انقضای T است. اگر Y_t قیمت سهام پایه باشد در این بازپرداخت اختیار خرید آسیایی بصورت $P(t) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T Y_t dt - k\right)^t$ است.

قضیه ۱.۴. [۲] *یک اختیار خرید آسیایی با قیمت اعمال k و زمان انقضای T قیمت اختیار خرید آسیایی آن بصورت زیر است که در آن $\Psi_T^{-1}(\alpha) = \frac{1}{T}\int_0^t Y_t(\alpha)\, dt$، $Y_t(\alpha)$، بیانگر $\alpha - path$ و $\alpha \in [0,1]$.*

$$f_c = exp(-rT)\Big(k\Psi_t(k) - k + \int_{\Psi_T(k)}^{1} \Psi_t^{-1}(\alpha)\, d\alpha\Big).$$

دو نکته مهم وجود دارد: **(۱)** f_c، یک تعریف تابع نزولی از قیمت اعمال k است. **(۲)** f_c، یک تابع نزولی از نرخ بهره بدون ریسک r است.

مثال ۱.۴. *در جدول زیر با ارائه دو مدل سبد سهام، مقادیر خواسته شده به‌کمک فرمول یائو-چن آورده شده است.*

جدول ۱: مقادیر خواسته شده برای دو مدل سبد سهام

مدل سبد سهام	Y_t^α	$\varphi^{-1}(\alpha)$	$\Psi_T^{-1}(\alpha)$
سبد سهام لیو	$Y_0 exp(e+\sigma\varphi^{-1}(\alpha))^t$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}$	$\begin{cases} \frac{Y_0\left(exp(e+\sigma\varphi^{-1}(\alpha))^T-1\right)}{T(e+\sigma\varphi^{-1}(\alpha))}, & \sigma\varphi^{-1}(\alpha)+e=0, \\ Y_0, & o.w. \end{cases}$
سبد سهام ریسک یائو	$Y_0 exp(-at) + (1-exp(-at))(\frac{m}{a}+\frac{\sigma}{a}\varphi^{-1}(\alpha)\Big)$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}$	$T\Big(\frac{m}{a}+\frac{\sigma}{a}\varphi^{-1}(\alpha)\Big) + \Big(\frac{m}{a^2}+\frac{\sigma}{a^2}\varphi^{-1}(\alpha)-\frac{1}{a}\Big)\Big(exp(-at)-1\Big)$

قیمت اختیار فروش معامله آسیایی: سال سبد سهام غیرقطعی را در نظر گرفته، اختیار فروش معامله آسیایی با قیمت اعمال k و زمان انقضای T است. Y_t قیمت سهام پایه است. در اینصورت بازپرداخت اختیار فروش بصورت $p(T) = \Big(k - \frac{1}{T}\int_0^t Y_t\, dt\Big)^t$ است.

قضیه ۲.۴. [۲] *فرض اختیار فروش معامله آسیایی، برای مدل سهام غیرقطعی کلی دارای زمان انقضای T و قیمت اعمال k است. در اینصورت قیمت فروش اختیار معامله آسیایی بصورت زیر محاسبه می‌شود که در آن $\Psi_T^{-1}(\alpha) = \frac{1}{T}\int_0^t Y_t^\alpha\, dt$، $Y_t(\alpha)$، بیانگر $\alpha-path$ و $\alpha \in [0,1]$.*

$$f_p = exp(-rt)\Big(k\Psi_T(\alpha) - \int_{\Psi_T(0)}^{\Psi(k)} \Psi_T^{-1}(\alpha)\, d\alpha\Big),$$

دو نکته مهم وجود دارد: **(۱)** f_p، یک تعریف تابع صعودی از قیمت اعمال k است. **(۲)** f_p، یک تابع نزولی از نرخ بهره بدون ریسک است.

مراجع

1. B. Liu, *Some research problems in uncertainty theory*, Journal of Uncertain systems, **3** (2009), no. 1, 3–10.
2. J. Sun and X. Chen, *Asian option pricing formula for uncertain financial market*, Journal of Uncertainty Analysis and Applications, **3** (2015), no. 1, 11 pages.
3. K. Yao, *Extreme values and integral of solution of uncertain differential equation*, Journal of Uncertainty analysis and Applications, **1** (2013), no. 1, 21 pages.
4. K. Yao and X. Chen, *A numerical method for solving uncertain differential equations*, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, **25** (2013), no. 3, 825–832.