

مسئله بهینه سازی مکانیابی فازی وبر آرمانی

مرتضی نظری^{۱,۱}، جعفر فتحعلی^۲، نعمت ا... تقی نژاد^۳
^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.
^۲ دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.
^۳ استادیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران.

چکیده

ما در این مقاله یک حالت خاص از مسائل مکانیابی فازی وبر را که مشهور به مسائل مکانیابی فازی آرمانی می باشند را در نظر گرفته ایم. در این مسئله مکان تعدادی مشتری در صفحه داده شده است و حالت ایده آل این است که مکانی برای سرویس دهنده تعیین کنیم به گونه ای که فاصله وزنی سرویس دهنده تا مشتری i -ام برابر R_i باشد. ابتدا وزن مربوط به هر مشتری را به صورت یک عدد فازی مثلثی در نظر گرفته نموده و سپس مدل فازی مسئله وبر آرمانی را به صورت ریاضی مدل بندی نموده و در انتها با استفاده از الگوریتم تبدیل این مسئله ازی را به یک مسئله قطعی سه هدفه تبدیل نموده ایم.

کلمات کلیدی: مکانیابی آرمانی، الگوریتم رقابت استعماری، تک وسیله ای.

1- مقدمه

نظریه مکانیابی به شکلی که امروزه مورد استفاده قرار می گیرد، با منتشر شدن کتاب آلفرد وبر در سال 1909 تحت عنوان "در مورد مکان صنایع" متولد شد [1]. در واقع می توان گفت که اولین تعریف مسئله مکانیابی به صورت کاربردی توسط وبر ارائه شده است. نمونه های مختلف از مسئله مکانیابی وبر را می توان در مراجع [2, 3, 4] مشاهده نمود. پس از آن ها مسائل مکانیابی به شکل گسترده و با مدل های متفاوت مورد توجه محققان قرار گرفت و در این میان مسائل مکانیابی تک وسیله ای که مشهور به مسائل فرما-وبر می باشند، از اساسی ترین مسائل نظریه مکانیابی هستند. در سال 1937، الگوریتم مشهوری برای حل مسئله فرما-وبر به نام الگوریتم وایزفیلد ارائه شد [5]. از طرف دیگر باید توجه داشت که در طول دهه های اخیر تلاش های بسیار زیادی برای ایجاد مدل های مکانیابی ای که مشخصه های بیشتری از دنیای واقعی را در نظر می گیرند، انجام گرفته است. یکی مشخصه های پر کاربرد و مهمی که در نظریه های اخیر تحقیق در عملیات ظاهر شده است، مفهوم مکانیابی توافقی می باشد و فتحعلی و همکاران [6]، برای اولین بار یک مسئله خاص از مسئله مکانیابی وبر توافقی را مطرح کردند. سپس جمالیان و فتحعلی [7]، یک مدل برنامه ریزی خطی برای مسئله با هدف کمینه کردن مجموع وزنی قدر مطلق خطا ارائه کردند. اخیرا فتحعلی و جمالیان [8]، به بررسی مسئله کمینه کردن مجموع مربعات خطا پرداخته و آن را مسئله مکانیابی وبر مربعی آرمانی (Goal Square Weber Location Problem) نامیدند. آن ها با استفاده از الگوریتم شبیه سازی پرندگان به حل مسئله فوق تحت نرم اقلیدسی پرداختند. بسیاری از مسائل در دنیای پیرامون ما وجود دارند که با استفاده از مکانیابی آرمانی به صورت ریاضی مدل می شوند. از طرفی دیگر، در دنیای واقعی به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت، در اکثر مواقع یافتن مقادیر دقیق و معین برای پارامترها

^۱ نام ارائه دهنده مقاله : mnazari.ms6@gmail.com

امری غیرممکن می‌باشد. از این‌رو از نظریه قدرتمند مجموعه‌های فازی برای مدل نمودن این ابهامات و عدم قطعیت‌های موجود به صورت ریاضی بهره می‌گیریم. علی‌رغم اینکه این موضوع از موضوعات بسیار کاربردی و پراهمیت می‌باشد تا کنون تحقیق و پژوهشی در این زمینه ارائه نگردیده است. بنابراین در این مقاله به مسئله مکانیابی توافقی با وزن‌های فازی خواهیم پرداخت.

2- تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی نظریه مجموعه‌های فازی را بیان خواهیم کرد [9، 10].

تعریف 2.1 یک زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه مرجع X ، توسط تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$ مشخص می‌شود. بر اساس این تابع عضویت به هر عنصر x از مجموعه مرجع X مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ اختصاص داده می‌شود که نشان دهنده میزان عضویت x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌باشد.

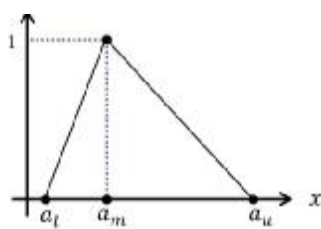
تعریف 2.2 فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u \rangle$ ، دو عدد فازی مثلثی مفروض و k یک عدد حقیقی باشند. در اینصورت عملیات ریاضی بین اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \langle a_l + b_l, a_m + b_m, a_u + b_u \rangle, \tilde{A} \ominus \tilde{B} = \langle a_l - b_u, a_m - b_m, a_u - b_l \rangle, k \cdot \tilde{A} = \begin{cases} \langle ka_l, ka_m, ka_u \rangle & k \geq 0 \\ \langle ka_u, ka_m, ka_l \rangle & k < 0 \end{cases} \quad (1)$$

تعریف 2.3 هر عدد فازی به شکل $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ ، عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_l}{a_m - a_l} & a_l \leq x \leq a_m \\ \frac{a_u - x}{a_u - a_m} & a_m \leq x \leq a_u \\ 0 & \text{OW} \end{cases} \quad (2)$$

در شکل زیر، عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ نمایش داده شده است:



شکل 2-1: نمایش عدد فازی مثلثی

تعریف 2.4 فرض کنید $\tilde{A} = \langle a_l, a_m, a_u \rangle$ و $\tilde{B} = \langle b_l, b_m, b_u \rangle$ ، دو عدد فازی مثلثی مفروض باشند. در این صورت می‌گوییم $\tilde{A}$ به‌طور نسبی از $\tilde{B}$ کوچکتر است و با نماد $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ نشان می‌دهیم اگر و تنها اگر:

$$1. a_m < b_m$$

$$2. (a_m - a_l) > (b_m - b_l) \text{ و } a_m = b_m$$

$$3. (a_u - a_m) < (b_u - b_m) \text{ و } (a_m - a_l) = (b_m - b_l), \text{ اگر } a_m < b_m \text{ و } a_m = b_m$$

3- مسئله مکانیابی تک وسیله‌ای آرمانی فازی تحت نرم l_p

یک مسئله مکانیابی تک وسیله‌ای توافقی با مجموع مربعات خطا به صورت زیر است:

$$\min f_R(X) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \quad (3)$$

به طوریکه، $d_{l_p}(X, P_i) = (|x - a_i|^p + |y - b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ می‌باشد، w_i وزن مربوط به هر نقطه تقاضای P_i و R_i شعاع توافقی متناظر با نقطه تقاضای P_i می‌باشد. حال مسائل مکانیابی تک وسیله‌ای آرمانی (3) را در نظر بگیرید. فرض کنید وزن‌ها به صورت اعداد فازی باشند. در این صورت این مسئله به مسئله فازی (4) تبدیل می‌شود:

$$\min f_R(X) = \sum_{i=1}^n \tilde{w}_i \cdot (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \quad (4)$$

که در آن $\tilde{w}_i, i = 1, \dots, n$ اعداد فازی مثلثی می‌باشند. در این مقاله به حل مسئله برنامه‌ریزی فازی (4) خواهیم پرداخت و الگوریتم تبدیل را به صورت زیر ارائه خواهیم کرد.

الگوریتم تبدیل:

گام اول: مسئله برنامه‌ریزی فازی (4) را در نظر بگیرید. به ازای $i = 1, \dots, n$ با جایگذاری مقادیر $\tilde{w}_i = \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle$ مسئله برنامه‌ریزی زیر نتیجه می‌شود:

$$\min f_R(X) = \sum_{i=1}^n \langle w_{il}, w_{im}, w_{iu} \rangle \cdot (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \quad (5)$$

گام دوم: تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی فازی (5) را در نظر بگیرید بنا به تعریف 1 و این نکته که $(d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \geq 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$f_R(X) = \sum_{i=1}^n \left\langle w_{il} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, w_{im} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, w_{iu} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \right\rangle \quad (6)$$

گام سوم: حال بنا به خاصیت جمع اعداد فازی داریم:

$$f_R(X) = \left\langle \sum_{i=1}^n w_{il} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, \sum_{i=1}^n w_{im} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, \sum_{i=1}^n w_{iu} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \right\rangle \quad (7)$$

گام چهارم: با توجه به مراحل قبل مسئله برنامه‌ریزی فازی (4) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\min f_R(X) = \left\langle \sum_{i=1}^n w_{il} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, \sum_{i=1}^n w_{im} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, \sum_{i=1}^n w_{iu} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \right\rangle \quad (8)$$

حال می‌توان مسئله فازی (8) را به مسئله سه هدفه قطعی زیر تبدیل نمود:

$$\begin{aligned} \min f_{1R}(X) &= \sum_{i=1}^n w_{il} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, \\ \min f_{2R}(X) &= \sum_{i=1}^n w_{im} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, \\ \min f_{3R}(X) &= \sum_{i=1}^n w_{iu} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2, \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_{im} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \geq \sum_{i=1}^n w_{il} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \\ \sum_{i=1}^n w_{iu} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \geq \sum_{i=1}^n w_{im} (d_{l_p}(X, P_i) - R_i)^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

از آنجایی که $w_i, i = 1, \dots, n$ اعداد فازی مثلثی می باشند بنابراین برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم $w_{iu}^3 w_{im}^3 w_{il}$ است.

از طرف دیگر $0, i = 1, \dots, n$ $\left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2$ بنابراین:

$$w_{iu} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2 w_{im} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2 w_{il} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2, i = 1, \dots, n$$

در نهایت بنا به خاصیت جمع برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم:

$$\sum_{i=1}^n w_{iu} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2 w_{im} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2 w_{il} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2 \quad (10)$$

رابطه اخیر نشان می دهد که مجموعه قیود مسئله برنامه ریزی (9) به طور بدیهی برقرار است. از این رو مسئله برنامه ریزی (9) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \min f_{1R}(X) &= \sum_{i=1}^n w_{il} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2, \\ \min f_{2R}(X) &= \sum_{i=1}^n w_{im} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2, \\ \min f_{3R}(X) &= \sum_{i=1}^n w_{iu} \left(d_{lp}(X, P_i) - R_i\right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

حال با حل مسئله سه هدفه قطعی (11)، با استفاده از روش های اسکالر سازی، می توان جواب بهینه را بدست آورد.

4- بحث و نتیجه گیری

ما در این مقاله یک حالت خاص از مسائل مکانیابی فازی وبر را که مشهور به مسائل مکانیابی فازی آرمانی می باشند را در نظر گرفته ایم. در این مسئله مکان تعدادی مشتری در صفحه داده شده است و حالت ایده آل این است که مکانی برای سرویس دهنده تعیین کنیم به گونه ای که فاصله وزنی سرویس دهنده تا مشتری i -ام برابر R_i باشد. ابتدا وزن مربوط به هر مشتری را به صورت یک عدد فازی مثلثی در نظر گرفته نموده و سپس مدل فازی مسئله وبر آرمانی را به صورت ریاضی مدل بندی نموده و در انتها با استفاده از الگوریتم تبدیل این مسئله از i به یک مسئله قطعی سه هدفه تبدیل نموده ایم.

مراجع

- [1] Weber, A., (۱۹۲۹), *Über den Standort der Industrien*, Tübingen, (۱۹۰۹), English Trans.: *Theory of Location of Industries*, (C.J., Friedrich, ed., and trans.), Chicago University Press, Chicago, Illinois.
- [2] Brimberg, J. (۱۹۹۵), The Fermat-Weber location problem revisited, *Mathematical Programming*, ۷۱, ۷۱-۷۶.
- [3] Chen, R., (۲۰۱۱), Noniterative Solution of Some Fermat-Weber Location Problems, *Advances in Operations Research*, ۱۰ pages.
- [4] Trinh, M. H, Lee, B.H., and Ahn, H.S., (۲۰۱۵), The Fermat-Weber location problem in single integrator dynamics using only local bearing angles, *Automatica*, ۵۹, ۹۰-۹۶.
- [5] Weiszfeld, E., (۱۹۳۷), Sur le point par lequel la somme des distances de n points donnés est minimum, *Tohoku Math* ۴۳, ۳۵۵-۳۸۶.
- [6] Fathali, J., Zaferanieh, M. and Nezakati, A., (۲۰۰۹), A BSSS algorithm for the location problem with minimum square error, *Advances in Operations Research*, Volume ۲۰۰۹ (۲۰۱۱), Article ID ۲۱۲۰۴۰, ۱۰ pages.
- [7] Jamalnia, A. and Fathali, J., (۲۰۰۹), Linear programming for the location problem with minimum absolute error, *World Applied Sciences Journal*, ۷, ۱۴۲۳-۱۴۲۷.
- [8] Fathali, J., Jamalnia, A., (۲۰۱۷), Efficient methods for goal square Weber location problem, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, ۷, ۶۵-۸۲.
- [9] F. Taleshian and J. Fathali, (۲۰۱۶), A mathematical model for fuzzy P- median problem with fuzzy weights and variables, *Advances in Operations Research*, ۱-۱۳.
- [10] L. A. Zadeh, (۱۹۶۵), Fuzzy sets, *Information and Control*, ۸, ۳۳۸ - ۳۵۳.