دومین سمینار ملی کنترل و بهینه سازی
۲۴-۲۵ آبان ۱۳۹۷
The 2nd National Seminar on Control and Optimization
15-16 November 2018

پایداری سیستم های خطی زمان ثابت پیوسته با ضرایب بازه ای

هادی شکوهی امیری[۱,آ]، اکبر هاشمی برزآبادی[ب]
[آ] عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور استان مازندران
[ب] عضو هیئت علمی دانشگاه علم و فناوری مازندران

چکیده

در این مقاله, پایداری سیستم های خطی زمان ثابت پیوسته با ضرایب بازه ای با استفاده از مفهوم پارامتری بازه ها, مورد بررسی قرار می گیرد. مهمترین مزیت این مقاله این است که, امکان بررسی پایداری سیستم های خطی زمان ثابت پیوسته با ضرایب بازه ای با هر تعداد متغیرهای حالت و کنترل, می باشد. با تعدادی مثال ها, پایداری این سیستم ها با استفاده از دستاوردهای ارائه شده, مورد ارزیابی قرار می گیرد

کلمات کلیدی: سیستم خطی زمان ثابت پیوسته با ضرایب بازه ای – پایداری مجانبی – پایداری لیاپانوف.

1- مقدمه

کاک زورک [4] پایداری سیستم های خطی زمان ثابت پیوسته با ضرایب بازه ای را با در نظر گرفتن محدودیت هایی مورد بررسی قرار داد. در این مقاله پایداری این سیستم ها را بطور کلی و بدون محدودیت هایی بیان می گردد. بازه بسته کراندار $\mathbb{s}=[s^1,s^2]=\{x\in R|s^1\le x\le s^2\}$, $s^1,s^2\in\mathbb{R}$ را در نظربگیرید. هر عدد در $\mathbb{s}$ بصورت $s(\lambda)=s^1+\lambda(s^2-s^1)$, $0\le\lambda\le 1$ نشان داده می شود. $s^2=\max\limits_{0\le\lambda\le1}s(\lambda)$, $s^1=\min\limits_{0\le\lambda\le1}s(\lambda)$ به ترتیب, نقاط انتهایی راست و چپ بازه $\mathbb{s}=[s^1,s^2]$ می باشند[1].

فرض کنید $\mathbb{s}=[s^1,s^2]=\{s(\lambda_1)|\lambda_1\in[0,1]\}$ و $\mathbb{y}=[y^1,y^2]=\{y(\lambda_2)|\lambda_2\in[0,1]\}$ بازه های بسته و کراندار از اعداد حقیقی باشند. عملگرهای جبری بازه ها با استفاده از نمایش پارامتری آنها, بدین صورت بیان می گردد[2].

$$\mathbb{S}\oplus\mathbb{Y}=\{s(\lambda_1)+y(\lambda_2)|\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]\}$$
$$\mathbb{S}\ominus\mathbb{Y}=\{s(\lambda_1)-y(\lambda_2)|\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]\}$$
$$\mathbb{S}\odot\mathbb{Y}=\{s(\lambda_1)\cdot y(\lambda_2)|\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]\}$$
$$k\mathbb{S}=\{ks(\lambda)|\lambda\in[0,1]\}$$
$$\mathbb{S}/\mathbb{Y}=\{s(\lambda_1)/y(\lambda_2)\,|\lambda_1,\lambda_2\in[0,1],y(\lambda_2)\neq 0\}$$

نمادهای ذیل را در نظربگیرید:

$I(\mathbb{R})$: مجموعه کلیه بازه های بسته از اعداد حقیقی.

$I(\mathbb{R})^n$: مجموعه کلیه n = تایی هایی از بازه های بسته از اعداد حقیقی.

$(I(\mathbb{R}))^{m\times n}$: مجموعه کلیه ماتریس های بازه ای با m سطر و n ستون.

$J[0,1]^{m\times n}$: مجموعه کلیه ماتریس های حقیقی با m سطر و n ستون بطوریکه کلیه درایه های آنها متعلق به $[0,1]$ هستند.

تعریف2-1: یک ماتریس بازه ای توسط مجموعه ای نامتناهی از ماتریس های حقیقی, ارائه می گردد. اگر $\boldsymbol{S}$ ماتریس بازه ای باشد لذا

---

[1] هادی شکوهی امیری: h.shokoohi@gmail.com

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ S_\Lambda \middle| \begin{array}{c} S_\Lambda = \left[s_{ij}(\lambda_{ij})\right]_{m\times n} \ , \ \Lambda = [\lambda_{ij}]_{m\times n} \in J[0,1]^{m\times n} \ , \ s_{ij}(\lambda_{ij}) = s_{ij}^1 + \lambda_{ij}\left(s_{ij}^2 - s_{ij}^1\right) \\ i = 1,\dots,m \ , \ j = 1,\dots,n \end{array} \right\}$$

تعریف1-3: ماتریس بازه ای $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ معین مثبت می باشد اگر و تنهااگر به ازای هر ماتریس حقیقی $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$, ماتریس اسکالری S_Λ معین مثبت باشد.

تعریف1-4: ماتریس بازه ای $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ نیمه معین مثبت می باشد اگر و تنهااگر بتوان ماتریس $\Lambda_1 \in J[0,1]^{m\times n}$ یافت بطوریکه ماتریس اسکالری S_{Λ_1} نیمه معین مثبت باشد و به ازای سایر ماتریس های $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$ ماتریس های اسکالری S_Λ معین مثبت یا نیمه معین مثبت باشند.

سیستم خطی بدون ورودی (بدون داشتن کنترل) با ضرایب بازه ای بصورت مسئله (1) در نظر گرفته می شود.

$$\dot{x} = \boldsymbol{\mathcal{A}}x \tag{1}$$

که در آن $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in (I(\mathbb{R}))^{n\times n}$ ماتریس بازه ای می باشد. باتوجه به تعریف ماتریس بازه ای, سیستم (1) , به ازای کلیه ماتریس های $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$ با سیستم (2) هم ارز می باشد.

$$\dot{x} = A_\Lambda x \tag{2}$$

به ازای هر $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$, سیستم **(2)** یک سیستم خطی با ضرایب اعدادحقیقی می باشد. با استفاده از روش پیکارد[3] , ماتریس تغییر وضعیت سیستم (2) بصورت $\phi(t,t_0) = e^{A_\Lambda(t-t_0)}$ می باشد و دارای جواب $x(t) = \phi(t,t_0)x(t_0)$ می باشد.

2- نقطه تعادل و پایداری لیاپانوف

تعریف2-1: x_1 نقطه تعادل سیستم (2) می باشد اگر و تنهااگر مسئله مقدار اولیه $\dot{x}\,(t) = A_\Lambda x(t) \ , \ x(t_0) = x_1$ به ازای کلیه مقادیر $t \geq t_0$, دارای جواب منحصربفرد $x(t) = x_1$ باشد.

به عبارت دیگر x_1 نقطه تعادل سیستم (2) است اگر و تنهااگر به ازای کلیه مقادیر $t \geq t_0$: $\left(I - e^{A_\Lambda(t-t_0)}\right)x_1 = 0$.

تعریف2-2: x_1 نقطه تعادل سیستم (1) می باشد اگر و تنهااگر به ازای کلیه ماتریس های $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$, x_1 نقطه تعادل سیستم (2) باشد.

تذکر1-1: اگر $x = [x_1,\dots,x_n]^T$ آنگاه $|x|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ را طول بردار $\boldsymbol{x}$ در R^n می باشد و در این مقاله آن بصورت $|x|$ نشان داده می شود.

تعریف2-3: اگر x_1 نقطه تعادل سیستم **(2)** باشد آنگاه سیستم (2) در نقطه x_1 پایدار می باشد اگروتنهااگر به ازای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ یک عدد حقیقی $\delta > 0$ موجود باشد که اگر $|x(t_0) - x_1| < \delta$ آنگاه به ازای t های به اندازه کافی بزرگ $\left|e^{A_\Lambda(t-t_0)}x(t_0) - x_1\right| < \varepsilon$ باشد.

تعریف2-4: اگر x_1 نقطه تعادل سیستم **(2)** باشد آنگاه سیستم (2) در نقطه x_1 پایدار مجانبی می باشد اگروتنهااگر

$$\lim_{t\to+\infty} e^{A_\Lambda(t-t_0)}x(t_0) = x_1$$

تعریف2-5: اگر x_1 نقطه تعادل سیستم **(2)** باشد آنگاه سیستم (2) در نقطه x_1 ناپایدار می باشد اگروتنهااگر عدد حقیقی $\varepsilon_0 > 0$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $\delta_0 > 0$, حالت اولیه $x(t_0)$ و دنباله $\{t_k\}$ که $t_k \longrightarrow +\infty$ موجود باشد که به ازای کلیه مقادیر $k > 0$:

$$|x(t_0) - x_1| < \delta_0 \qquad \& \qquad \left|e^{A_\Lambda(t-t_0)}x(t_0) - x_1\right| \geq \varepsilon_0$$

تعریف6-2: سیستم **(1)** در نقطه تعادل x_1 پایدار مجانبی است اگر و تنهااگر به ازای هر ماتریس $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$, سیستم **(2)** در نقطه تعادل x_1 پایدار مجانبی باشد.

تعریف7-2: سیستم **(1)** در نقطه تعادل x_1 پایدار می باشد اگر و تنهااگر ماتریس $\Lambda_1 \in J[0,1]^{m\times n}$ موجود باشد که سیستم **(2)** به ازای ماتریس Λ_1 پایدار باشد و به ازای سایر ماتریس های $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$ پایدار یا پایدار مجانبی باشد

تعریف8-2: سیستم **(1)** در نقطه تعادل x_1 ناپایدار می باشد اگر و تنهااگر ماتریس $\Lambda_2 \in J[0,1]^{m\times n}$ موجود باشد بطوریکه سیستم **(2)** به ازای ماتریس Λ_2 ناپایدار باشد.

سیستم **(1)** در نقطه تعادل x_1 پایدار مجانبی باشد, پایدار نیز می باشد و پایدار بودن نقطه تعادل لزومی بر پایدار مجانبی بودن آن نقطه تعادل نیست. در سیستم **(2)** با استفاده از تغییرات مناسب در **[3]** , به ازای هر ماتریس $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$, $x_1 = 0$ می تواند نقطه تعادل سیستم **(2)** باشد. در نتیجه $x_1 = 0$ نیز می تواند نقطه تعادل سیستم **(1)** باشد.

مثال1-2: مثال-1-2: در سیستم (1) ماتریس بازه ای $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ را بصورت $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} [-1,2] & 0 \\ 0 & [-5,3] \end{bmatrix}$ در نظربگیرید.

$$A_\Lambda = \begin{bmatrix} -1+3\lambda_{11} & 0 \\ 0 & -5+8\lambda_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad e^{A_\Lambda(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{(-1+3\lambda_{11})(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{(-5+8\lambda_{22})(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

مبدا مختصات, $x_1 = (0,0)$ نقطه تعادل منحصربفرد سیستم می باشد.

. به ازای هر ماتریس $\Lambda \in J[0,1]^{2\times 2}$که $= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$ و هرگاه $x(t_0) = (\delta_1, \delta_2)^T$ آنگاه

$$\Lambda x(t) = e^{A_\Lambda(t-t_0)} x(t_0) = (\delta_1 e^{(-1+3\lambda_{11})(t-t_0)}, \delta_2 e^{(-5+8\lambda_{22})(t-t_0)})^T$$

به ازای ماتریس های $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$ که $0 < \lambda_{11} < \frac{1}{3}$, $0 < \lambda_{22} < \frac{5}{8}$, $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$ یعنی سیستم پایدار مجانبی می باشد. هرگاه $\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$ آنگاه $x(t) = (\delta_1, \delta_2)$ و ازاینرو سیستم فقط پایدار است و پایدار مجانبی نمی باشد.

اگر $\frac{1}{3} < \lambda_{11} \le 1$, $\frac{5}{8} < \lambda_{22} \le 1$ ازاینرو با انتخاب t به اندازه کافی بزرگ مقدار $|x(t)|$ از هر عدد حقیقی دلخواهی بزرگتر می شود و سیستم در این حالت پایدار نمی باشد. در نتیجه ماتریس $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \in J[0,1]^{2\times 2}$ موجود می باشد که سیستم پایدار نیست لذا سیستم بطور کل پایدار نخواهد بود.

تعریف9-2: تابع $v(x)$ که در خصوصیات ذیل صدق کند, تابع لیاپانوف می باشد**[1]**:

1- $v(x)$ و مشتقات نسبی $\frac{\partial v}{\partial x_i}(i = 1, \dots, n)$ پیوسته باشند.

2- $v(x)$ معین مثبت و $\dot{v}(x)$ معین منفی باشد.

تعریف10-2: به ازای هر ماتریس $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$, $v_\Lambda : R^n \longrightarrow R$ تابع لیاپانوف باشد,

$v_\Lambda = \{ v_\Lambda(x) | v_\Lambda : R^n \longrightarrow R \,, \Lambda \in J[0,1]^{m\times n} \}$ تابع لیاپانوف با ضرایب بازه ای می باشد.

لم1-2: مبدا مختصات نقطه تعادل سیستم (1) باشد. هرگاه یک تابع لیاپانوف با ضرایب بازه ای در همسایگی مبدا مختصات موجود باشد, آنگاه این نقطه تعادل بطور مجانبی پایدار می باشد. هرگاه $\dot{v}_\Lambda(x)$ نیمه معین منفی باشد, آنگاه مبدا مختصات یک نقطه پایدار می باشد.

برهان- یک تابع لیاپانوف با ضرایب بازه ای در همسایگی مبدا مختصات موجود است پس به ازای هر ماتریس اسکالر $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$, $v_\Lambda(x)$ تابع لیاپانوف در همسایگی مبدا مختصات است و مبدا مختصات یک نقطه تعادل با پایداری مجانبی برای سیستم (2) به ازای هر ماتریس اسکالر $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$ می باشد. از اینرو مبدا مختصات یک نقطه تعادل با پایداری مجانبی

برای سیستم (1) می باشد. هرگاه $\dot{v}_{\Lambda}(x)$ نیمه معین منفی باشد, پس ماتریس اسکالر $\Lambda_1 \in J[0,1]^{m\times n}$ موجود است که $\dot{v}_{\Lambda_1}(x)$ نیمه معین منفی است و مبدا مختصات برای سیستم $\dot{x} = A_{\Lambda_1}x$ پایدار می باشد[1] و در اینصورت سیستم (1) پایدار است. برای پایداری سیستم **(2)** بایستی ماتریس متقارن P یافت شود که $v_{\Lambda}(x) = x'Px$ تابع معین مثبت باشد و $\dot{v}_{\Lambda}(x) = x'[A'_{\Lambda}P + PA_{\Lambda}]x$ معین منفی باشد. از عبارت $A'_{\Lambda}P + PA_{\Lambda} = -I$ به ازای ماتریس اسکالر $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$ و بااستفاده از روش سیلوستر [1] ماتریس معین مثبت P بدست می آید. در نتیجه به ازای ماتریس های $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$ که از عبارت $A'_{\Lambda}P + PA_{\Lambda} = -I$ ماتریس های معین مثبت P حاصل گردد, پس سیستم (2) به ازای این ماتریس های $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$ پایدار مجانبی است و ماتریس بازه ای $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ که از این ماتریس های $\Lambda \in J[0,1]^{m\times n}$ حاصل گردیده است, سیستم (1) به ازای این ماتریس بازه ای $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ پایدار مجانبی می باشد.

مثال2-2: پایداری سیستم در مثال 1-2 بررسی شد و در این مثال پایداری سیستم را با استفاده از تابع لیاپانوف مورد بررسی قرار می گیرد.

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} [-1,2] & 0 \\ 0 & [-5,3] \end{bmatrix} \;, \; A_{\Lambda} = \begin{bmatrix} -1+3\lambda_{11} & 0 \\ 0 & -5+8\lambda_{22} \end{bmatrix}$$

$$A'_{\Lambda}P + PA_{\Lambda} = -I$$

$$\begin{bmatrix} -1+3\lambda_{11} & 0 \\ 0 & -5+8\lambda_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1+3\lambda_{11} & 0 \\ 0 & -5+8\lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{11}(-1+3\lambda_{11}) & p_{12}(-6+3\lambda_{11}+8\lambda_{22}) \\ p_{12}(-6+3\lambda_{11}+8\lambda_{22}) & 2p_{22}(-5+8\lambda_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

در صورتی درایه $p_{12}(-6+3\lambda_{11}+8\lambda_{22})$ همیشه صفر می باشد که $p_{12} = 0$. با مساوی قرار دادن سایر درایه ها در تساوی دو ماتریس فوق, $p_{12} = \frac{-1}{2(-1+3\lambda_{11})}$ و $p_{22} = \frac{-1}{2(-5+8\lambda_{22})}$ حاصل می شود. لذا ماتریس $P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2(-1+3\lambda_{11})} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2(-5+8\lambda_{22})} \end{bmatrix}$ بدست می آید. برای معین مثبت بودن ماتریس P , بایستی $0 < \lambda_{11} < \frac{1}{3}$ و $0 < \lambda_{22} < \frac{5}{8}$ که در اینصورت سیستم پایدار می باشد. هرگاه $\lambda_{11} = \frac{1}{3}$ و $\lambda_{22} = \frac{5}{8}$ تابع لیاپانوف نیمه معین مثبت بوده و سیستم پایدار می باشد. اگر $\frac{1}{3} < \lambda_{11} < 1$ یا $\frac{5}{8} < \lambda_{22} < 1$ سیستم ناپایدار می باشد. در نتیجه ماتریس $\Lambda \in J[0,1]^{2\times 2}$ موجود است که سیستم پایدار نمی باشد و لذا سیستم ناپایدار است

مراجع

[1] وحیدیان , علی و بزرگ نیا , ابوالقاسم. (1372) *مقدمه ای بر نظریه کنترل و کنترل بهینه*. انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

[2] A.K. Bhurjee and G. Panda, 2012. Efficient Solution of interval optimization problem, Math Meth Oper Re 76:273-288.
[3] C.K. Chui and G. Chen,1989. Linear Systems and Optimal Control, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
[4] T. Kaczorek(2018). *Stability of interval positive continuous-time linear system,* Technical Sciences, Vol. 66, No. 1.