ارائه یک رویتگر بهینه جدید مبتنی بر پیش‌بینی برای تخمین متغیرهای حالت ژیروسکوپ MEMS

سعید کاشفی[۱]*، مجید حاجتی پور[۲]
۱- دکتری برق- کنترل، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه کاشان، s.kashefi@grad.kashanu.ac.ir
۲- استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه کاشان، hajatipour@kashanu.ac.ir
*نویسنده مخاطب: سعید کاشفی

چکیده

در این مقاله برای ژیروسکوپ MEMS که به‌دلیل پارامترهای متغیر بازمان و اغتشاش دارای عدم تطابق بین دو محور ارتعاشی است، یک رویتگر بهینه برای تخمین متغیرهای حالت آن بر مبنای روش جدید ارائه می‌گردد. در این روش ابتدا بسط سری تیلور حالت‌های سیستم ژیروسکوپ و رویتگر آن در یک افق پیش‌بینی با مرتبه دلخواه استخراج شده و در ادامه یک حل تحلیلی مبتنی بر حل مسئله کمینه‌سازی خطای پیش‌بینی بدست می‌آید که یک شکل حلقه بسته رویتگر بهینه را ارائه می‌دهد. بهره رویتگر بهینه از میان تمامی بهره‌هایی که ازحل مسئله کمینه‌سازی خطای پیش‌بین بدست آمده و پایداری را برآورده می‌کنند، انتخاب می‌گردد. در نهایت کارایی این روش در تخمین حالت‌ها با نتایج شبیه‌سازی نشان داده می‌شود.

واژه های کلیدی : *ژیروسکوپ MEMS - رویتگربهینه- پیش‌بینی- پارامتر متغیربا زمان.*

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر از ژیروسکوپ‌های MEMS به دلیل اندازه کوچک، مصرف برق و هزینه کم به وفور در اندازه‌گیری و کنترل استفاده شده است [۱-۵]. علاوه‌براین ژیروسکوپ‌های MEMS به دلیل قابلیت اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای معمولاً درکاربردهایی مانند خودرو و سیستم‌های ناوبری استفاده می‌شوند. اما عملکرد ژیروسکوپ MEMS متاثر از اغتشاشات خارجی و پارامترهای متغیر با زمان است که اثرات آن‌ها فرکانس نوسانی را ایجاد کرده که موجب عدم تطابق بین دو محور ارتعاشی می‌گردد[۶]. بنابراین، نیاز به استفاده از رویکرد کنترل مناسب بویژه کنترل مقاوم برای حل این چالش وجود دارد[۱و۲]و [۶و۷]. از آنجا که در طراحی و پیاده سازی کنترل نیاز به متغیرهای حالت سیستم می‌باشد، لذا می‌توان از رویتگر به منظور تخمین متغیرهای حالت بهره گرفت.

در بررسی رویتگرهای بهینه، خانواده فیلترکالمن و تخمین‌گرهای افق متحرک (MHE[۱]) بخوبی شناخته شده‌اند. در این دسته از تخمین‌گرها، بهره براساس بهینه‌سازی تابع هزینه تعریف شده تنظیم می‌گردد. به عنوان مثال در تخمین‌گرهای افق متحرک، تخمین به حل بَرخط[۲] مسئله بهینه‌سازی افق محدود، پنجره تخمین تعریف شده در حضور قیود، نویز و اغتشاش بستگی دارد [۸-۱۱]. اگرچه رویتگرهای بهینه مانند افق متحرک می‌توانند تاحدی در برابر نویز واغتشاش مقاوم باشند، اما دارای برخی مشکلات و چالش‌ها در حالت پیاده سازی هستند.

بطورکلی در این نوع از رویتگرها، بهینه‌سازی به صورت بَرخط بوده و می‌تواند در حالت پیاده‌سازی به‌دلیل وجود بعضی محدودیت‌ها، غیر محدب گردد [۱۲و۱۳] و در نتیجه ممکن است سبب گرفتاری در کمینه‌های محلی و به عبارتی، دور شدن از شرایط بهینه شود.

علاوه‌براین، بهینه‌سازی بَرخط به عملیات محاسباتی سنگینی نیازمند است که در حالت پیاده‌سازی، این مسئله مستلزم محاسبات سریع ودر عین حال زمان نمونه برداری خیلی کوتاه می‌باشد و این موضوع می‌تواند یک چالش برای سیستم‌های با دینامیک سریع محسوب شود. با این وجود، در برخی از مطالعات به صورت محدود سعی بر غلبه بر این دشواری با استفاده از روش تقریب برای بهینه سازی بُرون خط ، در تخمین‌گرهای افق متحرک شده است [۱۳-۱۵]. در [۱۳] یک ایده با هدف شناسایی بُرون خط رابطه بین توالی داده‌های اندازه‌گیری (ورودی/خروجی) و حالت اولیه متناظر آنها، در ابتدای پنجره متحرک ارائه شده و در ادامه در [۱۴] پیاده سازی این ایده با استفاده از ویژگی تقریبگری شبکه‌های عصبی انجام شده است.

در مورد سایر رویتگرهای بهینه، برخی مطالعات محدود در زمینه تخمین بهینه متغیرهای حالت انجام شده است [۱۶-۱۸]. تخمین بهینه برمبنای کمینه‌سازی خطای تخمین حالت برای سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان با نرخ همگرایی دلخواه و بصورت بُرون خط در [۱۶] به شکل رویتگر مرتبه کامل[۳] و در [۱۷] به شکل رویتگر مرتبه‌کاهش یافته[۴] ارائه شده است. علاوه براین، مرجع [۱۸] یک رویتگر بهینه بر مبنای کمینه‌سازی خطای تخمین خروجی سیستم (نه تمامی حالت‌های سیستم) و مبتنی بر حل بُرون خط مسئله بهینه‌سازی ارائه می‌کند و سپس با حل بَرخط مسئله بهینه‌سازی و تقریب تِرم بهینه رویتگر با استفاده از ایده برنامه ریزی پویا[۵]، این رویتگر بهینه ارائه می‌شود.

با این وجود در تمامی این روش‌ها صرفنظر از خطی یا غیرخطی بودن سیستم و عدم وجود تمامی حالت‌ها در تابع هزینه، کمینه‌سازی خطای تخمین در زمان فعلی بدون رویکرد پیش‌بینی انجام شده است. از طرف دیگر در مورد پیش‌بینی حالت‌های یک سیستم غیرخطی به‌صورت بهینه مطالعات قابل توجهی وجود ندارد. لذا یک رویکرد مناسب می‌تواند تقریب دینامیک متغیر با زمان با مرتبه دلخواه باشدکه در این مقاله به آن پرداخته می‌شود. در این روش، حالت‌های سیستم و تخمین آنها از طریق بکارگیری بسط سری تیلور با مرتبه دلخواه در جهت افزایش دقت تخمین، تقریب زده می‌شوند. اگرچه تقریب حالت‌های یک سیستم ممکن است، ارائه تحلیل پایداری سیستم را پیچیده‌ترکند، اما می‌تواند نگرش مستقیمی

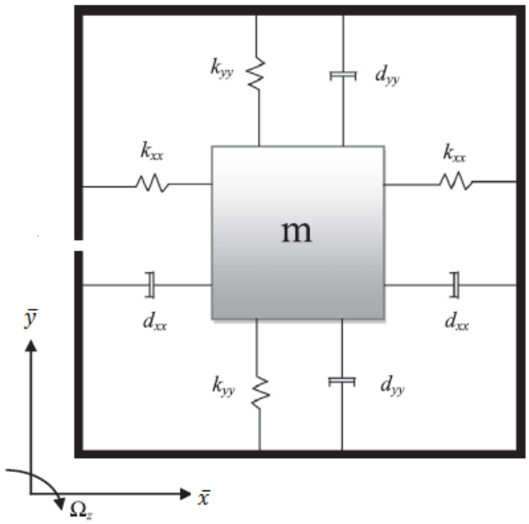
[۱] Moving Horizon Estimator
[۲] On-line

[۳] Full-order observer
[۴] Reduced-order observer
[۵] Approximate dynamic programming

از رفتار وعملکرد دینامیک غیرخطی سیستم فراهم نماید و رفتار گذرای سیستم اصلی را به‌طور موثرتری بیان و ارائه شود

۲- مدل‌سازی و معادلات سیستم

شکل۱ یک ژیروسکوپ MEMS محور z را نشان می‌دهد. ژیروسکوپ ارتعاشی MEMS شامل یک جرم ثابت است که توسط فنرهای تعبیه شده معلق است که در آن از مکانیزم های حسگر و یک محرک الکترواستاتیک برای وادار کردن حرکت نوسانی و سرعت جرم ثابت و حس کردن موقعیت استفاده می‌شود. قابی که جرم روی آن نصب شده است با سرعت ثابت حرکت کرده و ژیروسکوپ با سرعت زاویه‌ای Ω_z که به آهستگی تغییر می‌کند، می‌چرخد. نیروهای گریز از مرکز $m\Omega_z^2\bar{x}$ و $m\Omega_z^2\bar{y}$ بدلیل کوچک بودن جابجایی ها قابل صرفنظر بوده و نیروی کوریولیس در جهتی عمود بر محورهای محرک و دورانی ایجاد می شود.



شکل ۱- ساختار ژیروسکوپ MEMS

معادلات دینامیکی این ژیروسکوپ را می‌توان بصورت زیر نوشت[۶].

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{\Omega})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}_b\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} \qquad (۱)$$

که در آن

$$\boldsymbol{q} = [\bar{x}, \bar{y}]^T, \boldsymbol{u} = \left[u_{\bar{x}}, u_{\bar{y}}\right]^T$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{xy} & d_{yy} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z \\ \Omega_z & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K}_b = \begin{bmatrix} \omega_x^2 & \omega_{xy} \\ \omega_{xy} & \omega_y^2 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$
$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_{xx}}{m\omega_0^2}}, \omega_y = \sqrt{\frac{k_{yy}}{m\omega_0^2}}, \omega_{xy} = \frac{k_{xy}}{m\omega_0^2},$$

و ω_0 ، m به ترتیب فرکانس طبیعی هر محور ژیروسکوپ و جرم معلق است.

می‌توان معادلات سیستم (۱) را بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\big) \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}], \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = [\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}], \qquad (۴)$$
$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = -(\boldsymbol{D} + 2\boldsymbol{\Omega})\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{K}_b\boldsymbol{q} + \boldsymbol{u}$$

فرض۱. تابع $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ شرط لیپ‌شیتز را نسبت به $\boldsymbol{x}$ برآورده می‌کند. یعنی برای تمامی $\boldsymbol{x}$ و $\hat{\boldsymbol{x}}$ ها یک عدد ثابت مثبت α وجود دارد بطوریکه:

$$\|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - f(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u})\| \le \alpha\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\| \qquad (۵)$$

۳- طراحی رویتگر بهینه مبتنی بر پیش‌بینی

در ابتدا متغیر حالت $\boldsymbol{x_i}(\boldsymbol{t})$ در یک افق پیش‌بینی با سری تیلور تا مرتبه $\boldsymbol{r} \ge \boldsymbol{n} = \boldsymbol{2}$ تقریب زده می‌شود.

$$x_i(t+\tau) \cong x_i(t) + \tau\dot{x}_i(t) + \cdots + \frac{\tau^r}{r!}x_i^{[r]}(t) \qquad (۶)$$
$$T_1 \le \tau \le T_2$$

یا به عبارت دیگر

$$x_i(t+\tau) \cong \boldsymbol{\vartheta}^T\boldsymbol{X}_i(t), \boldsymbol{\vartheta} = \left[1, \tau, \ldots, \frac{\tau^r}{r!}\right]^T \qquad (۷)$$

و

$$\boldsymbol{X}_i(t) = \left[x_i(t), x_i^{[1]}(t), \ldots, x_i^{[r]}(t)\right]^T$$
$$= \begin{bmatrix} x_i(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_2(t), \\ f(x, \boldsymbol{u}), \ldots, z_{i+r-3}\left(x, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{[i+r-3]}\right) \end{bmatrix}^T, \qquad (۸)$$
$$i = 1,2$$

که در آن

$$\begin{aligned} z_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) &= f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ z_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, t) &= f^{[1]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ &= \frac{\partial f(x, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{x} + \frac{\partial f(x, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}}, \\ z_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}) &= f^{[2]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ &\vdots \\ z_{r-n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{[r-2]}) &= f^{[r-2]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \\ &\vdots \\ z_{r-1}\left(x, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{[r-1]}\right) &= f^{[r-1]}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \end{aligned} \qquad (۹)$$

براساس روابط فوق معادلات دینامیک رویتگر پیشنهادی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}(u_o(t)) \\ \hat{y}(t) &= \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن $u_o(t)$ ترم اصلی رویتگر بهینه بوده‌که در ادامه بدست می‌آید. از طرفی دینامیک خطای تخمین با استفاده از روابط (۲) و(۹) بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\dot{\boldsymbol{E}}(t)=\boldsymbol{AE}(t)+\boldsymbol{B}(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-u_o) \qquad (۱۱)$$
$$e_y(t)=\boldsymbol{CE}(t)$$

که در آن $\boldsymbol{E}(t)=[e_1(t),e_2(t)]^T$، $i=1,2$ و $e_i(t)=x_i(t)-\hat{x}_i(t)$ خطای تخمین هر حالت است.

به‌منظور تعیین $u_o(t)$، مشابه رابطه (۶) پیش‌بینی تخمین حالت $\hat{x}_i(t)$ در افق آتی با استفاده از بسط سری تیلور بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{x}_i(t+\tau)\cong\hat{x}_i(t)+\tau\dot{\hat{x}}_i(t)+\cdots+\frac{\tau^r}{r!}\hat{x}_i^{[r]}(t) \qquad (۱۲)$$
$$T_1\le\tau\le T_2,$$

یا به عبارت دیگر

$$\hat{x}_i(t+\tau)\cong\boldsymbol{\vartheta}^T\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t) \qquad (۱۳)$$

که در آن

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\cong\left[\hat{x}_i(t),\hat{x}_i^{[1]}(t),\dots,\hat{x}_i^{[r]}(t)\right]^T \qquad (۱۴)$$
$$=\begin{bmatrix}\hat{x}_i(t),\hat{x}_{i+1}(t),\dots,\hat{x}_2(t),\\ u_o(t),\dots,u_o^{[i+r-3]}(t)\end{bmatrix}^T$$

از طرفی پیش‌بینی خطای تخمین حالت ها به شکل برداری بصورت زیر قابل بیان است:

$$\boldsymbol{E}(t+\tau)=[e_1(t+\tau),e_2(t+\tau)]^T \qquad (۱۵)$$

براساس روابط (۷) و (۱۳)، این پیش‌بینی خطای تخمین را می‌توان این‌چنین بیان نمود:

$$\boldsymbol{E}(t+\tau)=$$
$$[x_1(t+\tau)-\hat{x}_1(t+\tau),$$
$$x_2(t+\tau)-\hat{x}_2(t+\tau)]^T \qquad (۱۶)$$
$$\cong[\left(\boldsymbol{X}_1(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_1(t)\right),\left(\boldsymbol{X}_1(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_2(t)\right)]^T\boldsymbol{\vartheta}$$

هدف اصلی، یافتن $u_o(t)$ به عنوان بخشی از رویتگر پیشنهادی است، بطوریکه پیش‌بینی خطای تخمین حالت‌های سیستم طبق تابع هزینه زیر کمینه گردد.

$$J=\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{E}^T(t+\tau)\boldsymbol{E}(t+\tau)d\tau \qquad (۱۷)$$

که در آن T_1 و T_2 به ترتیب زمان‌های پیش‌بینی پایین و بالا هستند.

قضیه۱. سیستم غیرخطی (۳) و تابع هزینه (۱۷) را در نظر بگیرید. برمبنای پیش بینی خطای تخمین تعریف شده در (۱۵)، سیگنال $u_o(t)$ در رویتگر پیشنهادی (۱۰) که تابع هزینه (۱۷) را کمینه می‌کند، بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$u_o(t)=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{KE}(t) \qquad (۱۸)$$

که در آن $\boldsymbol{K}=[k_1,k_2]$ و در ادامه تعیین می‌گردد.

اثبات. با استفاده از رابطه (۱۶)، تابع هزینه (۱۷) را می‌توان بصورت زیر تقریب زد.

$$J\cong\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{T_1}^{T_2}\left(\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)^T\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}^T(\boldsymbol{X}_i(t)$$
$$-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t))d\tau$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)^T\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}^T\,d\tau\,(\boldsymbol{X}_i(t) \qquad (۱۹)$$
$$-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t))$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)^T\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)$$

که طبق رابطه (۷) داریم:

$$\boldsymbol{\Lambda}=\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}^T\,d\tau$$
$$=\begin{bmatrix}T_2-T_1 & \dots & \dfrac{T_2^{r+1}-T_1^{r+1}}{(n+1)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{T_2^{r+1}-T_1^{r+1}}{(r+1)!} & \dots & \dfrac{T_2^{2r+1}-T_1^{2r+1}}{r!\,r!\,(2r+1)}\end{bmatrix}, \qquad (۲۰)$$
$$\boldsymbol{\Lambda}\in R^{r+1}$$

آنگاه شرط لازم برای بهینه سازی عبارتست از

$$\frac{\partial J}{\partial u_o}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)^T}{\partial u_o}\Lambda\left(\boldsymbol{X}_i(t)\right. \qquad (۲۱)$$
$$\left.-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right)=0$$

برای حل رابطه (۲۱)، با استفاده از روابط (۸) و (۱۴) داریم:

$$\left[\boldsymbol{X}_i(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_i(t)\right]$$
$$=\left[e_i(t),e_{i+1}(t),\dots,e_2(t),f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\right.$$
$$-u_o(t),\dots,z_{i+r-}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dots,\boldsymbol{u}^{[i+r-3]}\right) \qquad (۲۲)$$
$$\left.-u_o^{[i+r-3]}(t)\right]^T$$
$$=[\overline{\boldsymbol{E}}_i,\boldsymbol{H}_i]^T$$

که در آن

$$\overline{\boldsymbol{E}}_i=[e_i,\dots,e_n]^T,$$
$$i=1,2\ ,\overline{\boldsymbol{E}}_i\in R^{(3-i)},$$

$$\boldsymbol{H}_i=\left[f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\right. \qquad (۲۳)$$
$$-u_o(t),\dots,z_{i+r-3}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dots,\boldsymbol{u}^{[i+r-3]}\right)$$
$$\left.-u_o^{[i+r-3]}(t)\right]^T,$$
$$i=1,2\ ,\ \boldsymbol{H}_i\in R^{r-3+i}$$

لذا براساس (۲۲) و (۲۳)، رابطه (۲۱) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}&\left[0_{1\times r} \quad ,\left(\frac{\partial H_1}{\partial u_0}\right)^T\right]\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{X}_1(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_1(t)\right)\\ &+\left[0_{1\times 1} \quad ,\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}_n}{\partial u_0}\right)_{r\times 1}\right]^T\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{X}_2(t)-\widehat{\boldsymbol{X}}_2(t)\right)\\ &=\left[0_{1\times r} \quad ,\left(\frac{\partial H_1}{\partial u_0}\right)^T\right]\boldsymbol{\Lambda}\begin{bmatrix}\bar{E}_1\\ H_1\end{bmatrix}+\cdots\\ &+\left[0_{1\times 1} \quad ,\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}_2}{\partial u_0}\right)_{r\times 1}\right]^T\boldsymbol{\Lambda}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{E}}_2\\ \boldsymbol{H}_2\end{bmatrix}=0\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

و در نتیجه رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\left[\Lambda_{r+1,1},\dots,\Lambda_{r+1,r+1}\right]\begin{bmatrix}\bar{E}_1\\ H_1\end{bmatrix}+\cdots\\ &+\left[\Lambda_{2,1},\dots,\Lambda_{2,r+1}\right]\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{E}}_2\\ \boldsymbol{H}_2\end{bmatrix}=0\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

که در آن $\Lambda_{i,j}$ بیانگر المان سطر i ام و ستون j ام ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ است. با ساده سازی رابطه (۲۴) داریم:

$$\begin{aligned}&\gamma_r\left(z_{r-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dots,\boldsymbol{u}^{[r-1]}\right)-u_o^{[r-1]}\right)+\cdots\\ &+\gamma_1(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-u_o(t))\\ &=\sum_{i=1}^{n}\bar{k}_i e_i(t)=\ \bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}(t)\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

که در آن γ_i و $\bar{\boldsymbol{K}}=\left[\bar{k}_1,\bar{k}_2\right]$ معلوم و برمبنای ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ تعیین می‌گردند.

$$u_o(t)=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t) \qquad (۲۷)$$

حال برای محاسبه صحیح بردار $\boldsymbol{K}$ از آنجاکه مشتق‌های زمانی عبارت $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ تا مرتبه $r-1$ در رابطه (۸) مشخص شده‌اند، داریم:

$$\begin{aligned}u_o(t)&=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t)\\ \dot{u}_o(t)&=z_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}})+\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{E}}(t)\\ &\vdots\\ u_o^{[r-1]}&=z_{r-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dots,\boldsymbol{u}^{[r-1]}\right)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^{[r-1]}\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

سپس با توجه به $u_o(t)$ در رابطه (۲۸)، رابطه دینامیک خطا در (۱۱) را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(t)+\boldsymbol{B}\left(-\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t)\right)=\boldsymbol{A}_{c1}\boldsymbol{E}\\ e_y(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(t)\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{c1}&=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k_1 & -k_2\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

با استفاده از رابطه (۲۹) مشتقات خطای E بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}(t)&=\boldsymbol{A}_{c1}\boldsymbol{E}(t)\\ \boldsymbol{E}^{[2]}(t)&=\boldsymbol{A}_{c1}^{(2)}E(t)\\ &\vdots\\ \boldsymbol{E}^{[r-1]}(t)&=\boldsymbol{A}_{c1}^{(r-1)}\boldsymbol{E}(t)\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

از جایگذاری (۳۱) در (۲۸) واستفاده از حاصل رابطه (۲۸) در (۲۶) رابطه ماتریسی زیر بدست می‌آید که از حل آن به سادگی بردار K حاصل شده و اثبات کامل می‌گردد.

$$\gamma_r\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_{c1}^{(r-1)}+\cdots+\gamma_1\boldsymbol{K}+\bar{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{0} \qquad (۳۲)$$

لذا براساس نتیجه قضیه۱ یعنی رابطه (۲۷)، دینامیک رویتگر پیشنهادی (۱۰) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\big(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t)\big)\\ \hat{y}(t)&=\boldsymbol{C}\hat{x}(t)\end{aligned} \qquad (۳۳)$$

از آنجا که در این رویتگر، از سیگنال $\boldsymbol{x}$ استفاده شده است،در ادامه برای رویتگر پیشنهادی، سیگنال جدید $\hat{u}_o(t)$ تعریف شده به صورت زیر، به‌جای سیگنال $u_o(t)$، بکار گرفته می‌شود:

$$\hat{u}_o(t)=f(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})+K\boldsymbol{E}(t) \qquad (۳۴)$$

و همچنین در پایان این مقاله نشان داده خواهد شد که $\lim_{t\to\infty}\hat{u}_o(t)=u_o(t)$.

حال دینامیک خطا را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\dot{\boldsymbol{E}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(t)+B(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\hat{u}_o(t)) \qquad (۳۵)$$

جایگذاری (۳۴) در (۳۵) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(t)+\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(t)+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\\ &\qquad-f(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}))\\ &=\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{E}(t)+\boldsymbol{B}(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}))\end{aligned} \qquad (۳۶)$$

حال ماتریس $\bar{\boldsymbol{A}}_c=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$ را تعریف می‌کنیم. با توجه رویت‌پذیر بودن $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$، دینامیک خطا بصورت زیر قابل باز نویسی است.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{L}e_y(t)+\boldsymbol{B}(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}))\\ &=\bar{\boldsymbol{A}}_c\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\big(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\big)\\ e_y(t)&=y(t)-\hat{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{E}(t)\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

که بیانگر آن است که دینامیک رویتگر بهینه پیشنهادی بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{L}e_y(t)+\boldsymbol{B}(f(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u},t))\\ \hat{y}(t)&=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

از رابطه زیر می‌توان برای بدست آوردن $\boldsymbol{L}$ استفاده کرد.

$$\lambda(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})=\lambda(\boldsymbol{A}_c) \qquad (۳۹)$$

که λ مقدار ویژه ماتریس و مطابق قضیه (۱)، $\boldsymbol{A}_c$ بطور بهینه تعیین می‌گردد.

فرض۲. برای هر عدد مثبت ε و $\bar{\gamma}$، وجود دارد ماتریس‌های معین مثبت Q و P بطوریکه

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{c}}{}^{T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{c}}+2\bar{\gamma}\boldsymbol{P}+\varepsilon(\boldsymbol{PB})(\boldsymbol{PB})^{T}+\frac{1}{\varepsilon}\alpha^{2}\boldsymbol{I}=-\boldsymbol{Q} \qquad (۴۰)$$

قضیه۲. رویتگر غیرخطی بهینه (۳۸) و دینامیک خطای تخمین (۳۷) مفروض است. با توجه به فرض‌های (۱) و (۲) دینامیک خطای تخمین، پایدار نمایی است.

اثبات. برای اثبات پایداری نمایی متغیر جدید زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\boldsymbol{E}_{a}(t)=e^{\bar{\gamma}t}\boldsymbol{E}(t) \qquad (۴۱)$$

که در آن $\bar{\gamma}$ عدد ثابت مثبت است.

تابع لیاپانوف زیر که در آن $\boldsymbol{P}$ ماتریس معین مثبت تعریف شده در فرض (۲) است.

$$V=\boldsymbol{E}_{a}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{a} \qquad (۴۲)$$

مشتق‌گیری از تابع لیاپانوف نتیجه می‌دهد.

$$\dot{V}=\dot{\boldsymbol{E}}_{a}{}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{a}+\boldsymbol{E}_{a}^{T}P\dot{\boldsymbol{E}}_{a} \qquad (۴۳)$$

استفاده از رابطه (۴۱) و جایگذاری (۳۷) در (۴۳) داریم.

$$\begin{aligned}\dot{V}=e^{2\bar{\gamma}t}\Big\{&\boldsymbol{E}^{T}\left(\bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{c}}{}^{T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{c}}+2\bar{\gamma}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{E}\\&+\big(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\\&-f(\widehat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\big)^{T}(\boldsymbol{PB})^{T}\boldsymbol{E}\\&+\boldsymbol{E}^{T}\boldsymbol{PB}(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\\&-f(\widehat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u}))\Big\}\end{aligned} \qquad (۴۴)$$

از طرفی، بطور کلی برای هر ماتریس **X,Y** و هر عدد مثبت ε نامساوی‌های زیر برقرار است.

$$\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{T}\boldsymbol{X}\leq\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X}+\varepsilon\boldsymbol{Y}^{T}\boldsymbol{Y} \qquad (۴۵)$$

حال برای $X=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\widehat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})$ ، $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{PB})^{T}\boldsymbol{E}$ و استفاده از فرض (۲) بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}&\big(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\widehat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\big)^{T}(\boldsymbol{PB})^{T}\boldsymbol{E}\\&\qquad+\boldsymbol{E}^{T}\boldsymbol{PB}\big(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\widehat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\big)\\&\leq\frac{1}{\varepsilon}|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\widehat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})|^{2}+\varepsilon\boldsymbol{E}^{T}\boldsymbol{PB}(\boldsymbol{PB})^{T}\boldsymbol{E}\\&\leq\frac{1}{\varepsilon}\alpha^{2}\boldsymbol{E}^{T}\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{E}^{T}\boldsymbol{PB}(\boldsymbol{PB})^{T}\boldsymbol{E}\end{aligned} \qquad (۴۶)$$

بنابراین، با استفاده از رابطه (۴۶) در (۴۴) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{V}\leq e^{2\bar{\gamma}t}\boldsymbol{E}^{T}\Big(&\bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{c}}{}^{T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{c}}+2\bar{\gamma}\boldsymbol{P}+\varepsilon\boldsymbol{PB}(\boldsymbol{PB})^{T}\\&+\frac{1}{\varepsilon}\alpha^{2}\boldsymbol{I}\Big)\boldsymbol{E}\end{aligned} \qquad (۴۷)$$

حال با استفاده از فرض (۲) رابطه (۲-۸۵) نتیجه می‌دهد.

$$\dot{V}<-e^{2\bar{\gamma}t}Q\|\boldsymbol{E}\| \qquad (۴۸)$$

بنابراین، $\boldsymbol{E}_{a}(t)$ پایدار مجانبی و در نتیجه $\boldsymbol{E}(t)$ با توجه به رابطه $\boldsymbol{E}(t)=e^{-\bar{\gamma}t}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{a}}(t)$ پایدار نمایی است. در نتیجه خطای تخمین در (۳۷) پایدار نمایی بوده و اثبات کامل است.

در قضیه (۲) همگرایی نمایی خطای تخمین به صفر اثبات شد. بر همین اساس، برای تمامی $t\geq 0$ وجود دارد یک عدد مثبت β بطوریکه

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\widehat{\boldsymbol{x}}(t)\|\leq\beta\|\boldsymbol{x}(0)-\widehat{\boldsymbol{x}}(0)\|e^{-\bar{\gamma}t} \qquad (۴۹)$$

که طبق فرض (۲) داریم.

$$\|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-f(\widehat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{u})\|<\alpha\beta\|\boldsymbol{x}(0)-\widehat{\boldsymbol{x}}(0)\|e^{-\bar{\gamma}t} \qquad (۵۰)$$

در نتیجه عبارت پیش‌بین رویتگر پیشنهادی، یعنی $\hat{u}_{o}(t)$ در (۳۴) بطور مجانبی به مقدار بهینه خود در رابطه (۱۸) میل می کند و یا به عبارتی

$$\lim_{t\to\infty}\hat{u}_{o}(t)=u_{o}(t) \qquad (۵۱)$$

در نتیجه، این رابطه نشان می دهد عبارت $\hat{u}_{o}(t)$ در رویتگر پیشنهادی بطور نمایی به مقدار بهینه $u_{o}(t)$ آن در میل می‌کند. سرعت همگرایی رویتگر پیشنهادی به مقدار $\bar{\gamma}$ در رابطه (۴۹) محدود می شود. با انتخاب زمان‌های پیش‌بینی T_1 و T_2، مقادیر ویژه ماتریس A_c در (۲۰) تغییر می‌کند و نرخ همگرایی نمایی بدست می‌آید.

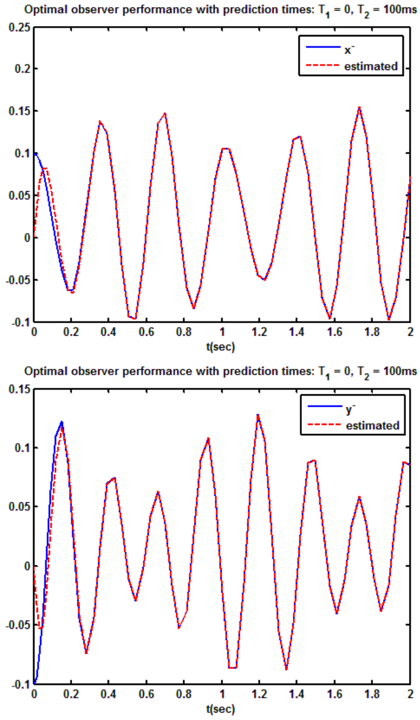
۴- شبیه‌سازی

در شبیه سازی پارامترهای ژیروسکوپ بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود. دقت شود فرکانس طبیعی هر محور ژیروسکوپ $\omega_0=1kHz$ در رابطه (۲) فرض شده است.

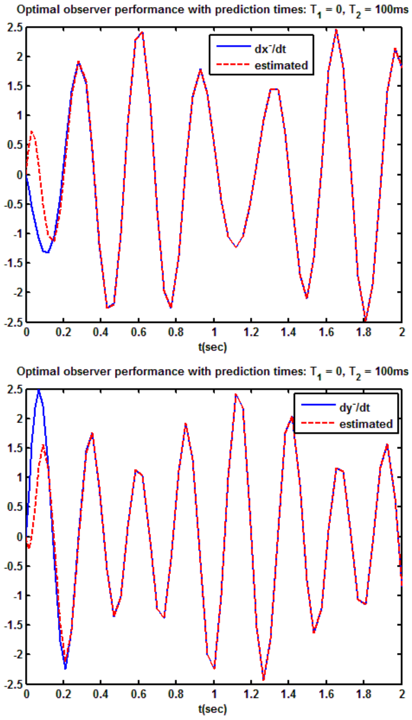
.

$k_{xy}=12.779N/m$	$m=1.8\times10^{-7}kg$
$k_{xx}=63.995N/m$	$d_{xy}=3.6\times10^{-7}Ns/m$
$k_{yy}=95.92N/m$	$d_{xx}=1.8\times10^{-6}Ns/m$
$d_{yy}=1.8\times10^{-6}Ns/m$	$d_{yy}=1.8\times10^{-6}Ns/m$
$\omega_y^2=355.3$	$\omega_x^2=355.3$
$\Omega_z=0.1$	$\omega_{xy}=70.99$

شرایط اولیه سیستم و رویتگر به ترتیب بصورت $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})=[\boldsymbol{0}.\boldsymbol{1},-\boldsymbol{0}.\boldsymbol{1},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}]^{T}$ و $\widehat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{0})=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}]^{T}$ و ورودی کنترل $\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{10},\boldsymbol{10}]^{T}$ است. با استفاده از روند طراحی اشاره شده، به ازای زمان‌های پیش‌بینی $\boldsymbol{T_1=0},\ \boldsymbol{T_2=100ms}$ و مرتبه بسط تیلور $\boldsymbol{r=2}$ بهره رویتگر بصورت $\boldsymbol{L=[26.67,400]}$ بدست می‌آید. شکل‌های (۲)و (۳) نتایج شبیه‌سازی رویتگر پیشنهادی را نشان می‌دهد. همانطورکه از نمودار شکل‌ها مشاهده می‌شود، عملکرد رویتگر پیشنهادی مناسب و همگرایی حالت‌های رویتگر به حالت‌های واقعی سیستم بخوبی انجام می‌گیرد.



شکل ۲- جابجایی و تخمین آن در هر دو محور MEMS



شکل۳- نرخ جابجایی و تخمین آن در هر دو محور MEMS

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید در طراحی رویتگر بهینه ژیروسکوپ معرفی گردید. در ابتدا، خطای پیش‌بینی با استفاده از بسط سری تیلور با مرتبه دلخواه که تقریب مناسبی از رفتار سیستم غیرخطی را نتیجه می‌دهد، تقریب زده می‌شود. این بدان معناست که هیچ محدودیتی در مرتبه بسط سری تیلور وجود ندارد و بنابراین از نظر تئوری راه حل تحلیلی ارائه شده در این مقاله می‌تواند با هر دقت مشخصی به مسئله پیش‌بینی نزدیک شود. سپس، تابع هزینه شامل خطای پیش‌بینی به صورت تحلیلی کمینه‌سازی شده و منجر به ارائه بهره بهینه رویتگر پیشنهادی می‌شود.

علاوه‌براین، در این رویتگر پیشنهادی، پایداری نمایی خطای تخمین اثبات شد. ازآنجا که در این رویکرد نیازی به بهینه‌سازی بَرخط نیست، پیاده سازی رویتگر پیشنهادی به سادگی قابل انجام است. علاوه براین، زمان‌های مختلف پیش‌بینی منجر به بهره‌های رویتگر مختلفی می‌شودکه نرخ‌های هم‌گرایی خطای تخمین مختلفی نیز ارائه می‌دهد. به این ترتیب، بهره رویتگر را می‌توان از میان بهره‌های متناظر با سرعت همگرایی مطلوب انتخاب کرد. کارایی این رویتگر از طریق شبیه‌سازی نشان داده شد.

۶- مراجع

[1] J. Fei and C. Batur, “A novel adaptive sliding mode control with application to MEMS gyroscope,” *ISA Trans 2009*, vol. 48, no. 1, pp. 73–80, 2009.

[2] C. Batur, T. Sreeramreddy and Q. Khasawneh, “Sliding mode control of a simulated MEMS gyroscope,” *ISA Trans*, vol. 45, no. 1, pp. 99–108, 2006.

[3] TH. Hanley, BJ. Gallacher and HTD. Grigg, “On the exploitation of mode localization in surface acoustic wave MEMS,” *Mech Syst Signal Process*, 2016.

[4] S. Chong, S. Rui, L. Jie,Z. Xiaoming, T. Jun, S. Huiliang and C. Huiliang, “Temperature drift modeling of MEMS gyroscope based on genetic-Elman neural network,” *Mech Syst Signal Process*, vol. 72, pp. 897–905, 2016.

[5] M. Fazlyab, MZ. Pedram, H. Salarieh and A. Alasty, “Parameter estimation and interval type-2 fuzzy sliding mode control of a z-axis MEMS gyroscope,” *ISA Trans*, vol. 52, no. 6, pp. 900–11, 2013.

[6] W. Yan, S. Hou, Y. Fang and J. Fei, “Robust adaptive nonsingular terminal sliding mode control of MEMS gyroscope using fuzzy-neural-network compensator,” *Int J Mach Learn Cybern*, 1–13, 2016.

[7] M. Rahmani, “MEMS gyroscope control using a novel compound robust control,” *ISA Trans*, vol. 73, pp. 38–43, 2018.

[8] PE. Moraal, and J.W. Grizzle, “Observer design for non-linear systems with discrete-time measurement,” *IEEE Transaction on Automatic Contro*l, vol. 40, no. 3, 395-404, 1995.

[9] C.V. Rao, J.B. Rawlings and , D.Q. Mayne,

"Constrained state estimation for non-linear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximation," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 48, no. 2, 246-258, 2003.

[10] P. Kühl, M. Diehl, T. Kraus, J.P. Schlöder, and, H.G. Bock, "A real-time algorithm for moving horizon state and parameter estimation," Computer and Chemical Engineering Computer and Chemical Engineering, vol. 35, no. 2, 71-83, 2011.

[11] A. Alessandri, M. Baglietto, and, G. Battistelli, "Receding horizon estimation for discrete time linear systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 48, no. 3, 473-478, 2003.

[12] M. Almir, Non-linear Moving Horizon Observers: Theory and Real-Time Implementation. In: Besançon G Non-linear Observers and Application, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, Berlin, Heidelberg, 139-179.

[13] M. Almir, "A new identification framework for off-Line computation of moving-horizon observers," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 58, no. 6, 1877-1882, 2013.

[14] A. Alessandri, M. Baglietto and, G. Battistelli "Moving-horizon state estimation for non-linear discrete-time systems: New stability results and approximation schemes," *Automatica*, vol. 44, no. 7, 1733-1765, 2008.

[15] A. Alessandri, M. Baglietto and, G. Battistelli "Moving-horizon state estimation for non-linear systems using neural networks," *Transaction on Neural Networks*, vol. 22, no. 5, 768-780, 2011.

[16] K. Ramar, and, V. Gourishankar "Optimal observers with specified eigenvalues," International Journal of Control, vol. 27, no. 2, 239-244, 1976.

[17] Fu.I. Chou, and, M.Y. Cheng . "Optimal design of reduced-order observers with specified eigenvalues and performance measurement of minimizing estimation errors using evolutionary optimization," Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, vol. 38, no. 2, 728-739, 2019.

[18] J. Na, M. G. Herrmann, and K. Vamvoudakis, "Adaptive optimal observer design via approximate dynamic programming," in American Control Conference IEEE, Seatle, Washington, 2017, pp. 3288-3293.