

استفاده از روش انتگرال کوادراتیک خطی برای کنترل یک هواپیمای سبک

روزبه مرادی^{۱*}، سید فرهاد گلزان^۲

۱- استادیار، گروه هوافضا، دانشکده انرژی‌های تجدیدپذیر، دانشگاه صنعتی ارومیه، ابتدای جاده بند، ایمیل:

rouzbeh_moradi@uut.ac.ir

۲- رئیس هیات مدیره، صنایع هوایی آریا سبک‌بال، فرودگاه ارومیه، ایمیل: Golzan.sf@gmail.com

*نویسنده مخاطب

چکیده

هواپیماهای سبک وزن عموماً دارای جرم کمتر از ۵۶۰۰ کیلوگرم هستند. از این هواپیماها معمولاً برای آموزش پرواز، تاکسی‌های هوایی و مصارف شخصی استفاده می‌شود. هواپیمای پایپر PA-28-161 Warrior III یک هواپیمای سبک وزن چهارنفره است که اولین گواهی خود را در سال ۱۹۹۴ دریافت نمود. در این مقاله، از روش انتگرال کوادراتیک خطی برای کنترل این هواپیما استفاده شده است. ماتریس بهره فیدبک بر اساس دینامیک خطی-شده بدست آمده و بر روی سیستم غیرخطی پیاده‌سازی شده است. مانورهای متداولی مانند پرواز صعودی و چرخش با ارتفاع ثابت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که سیستم کنترل حلقه بسته توانایی انجام مانورهای مد نظر را دارد.

واژه‌های کلیدی: هواپیمای سبک وزن، انتگرال کوادراتیک خطی، کنترل

حلقه بسته

۱- مقدمه

هواپیماهای سبک وزن دارای وزن کمتر از ۵۶۰۰ کیلوگرم بوده و عموماً برای آموزش پرواز، تاکسی‌های هوایی و مصارف شخصی استفاده می‌شوند [۱]. با توجه به گستردگی استفاده از این نوع هواپیما، طراحی سیستم کنترلی که بتواند مانورهای مورد نظر را انجام دهد می‌تواند دارای اهمیت باشد. مراجع [۲]–[۴] مساله کنترل هواپیمای سبک را بررسی کرده‌اند. مرجع [۲] مساله کنترل هواپیمای سبک وزنی را که یکی از دو موتور خود را از دست داده بررسی نموده است. مانورهای هدینگ و صعود در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مرجع [۳] یک سیستم کنترل اتوماتیک برای محور طولی هواپیمای سبک پیشنهاد داده است. مقاله [۴] ردیابی وضعیت را با استفاده از روش‌های دینامیک معکوس غیرخطی^۲ برای یک هواپیمای سبک وزن انجام داده است.

با توجه به مطالعات انجام گرفته در حوزه کنترل هواپیمای سبک وزن، مساله کنترل بهینه و بررسی مانورهای متعدد جز مواردی هستند که نیاز به بررسی بیشتری دارند. در این مقاله از روش انتگرال کوادراتیک خطی^۳ که یک روش بهینه است برای کنترل PA-28-161 Warrior III استفاده شده است. از طرفی، برخی از مانورهای اساسی هواپیما مانند پرواز صعودی^۴ و چرخش با ارتفاع ثابت مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

تصویر هواپیمای PA-28-161 Warrior III در شکل ۱ نشان داده شده است:



شکل ۱- هواپیمای PA-28-161 Warrior III [۵]

در این مقاله از روش LQI برای کنترل این هواپیما استفاده شده است. همان‌طور که اشاره شد، این روش بهینه بوده و می‌توان از آن برای کنترل سیستم‌های خطی چند ورودی-چند خروجی استفاده نمود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که سیستم کنترلی قادر است مانورهای خواسته شده را بر اساس الزامات مد نظر انجام دهد.

۲- مدل سازی دینامیک هواپیما

هواپیما یک سیستم شش درجه آزادی است که می‌تواند در سه جهت مستقل حرکت انتقالی و در سه جهت مستقل حرکت دورانی انجام دهد. برای مدل‌سازی کامل دینامیک هواپیما، علاوه بر معادلات حرکت، باید نیروها و گشتاورهای آئرو دینامیکی، نیروهای ناشی از موتور و نیروهای ناشی از جاذبه نیز مد نظر شوند.

مدل دینامیکی هواپیما غیرخطی بوده و برای استفاده از روش‌های کنترل خطی، باید مدل دینامیکی حول شرایط تریم خطی شود. معادلات سینتیک انتقالی و دورانی در دستگاه مختصات بدنی و نسبت به چهار چوب اینرسی در روابط (۱) تا (۶) ارائه شده‌اند [۶]:

4-Climbing flight

5-Level turn

6-Multi input-Multi output

1 -Attitude tracking

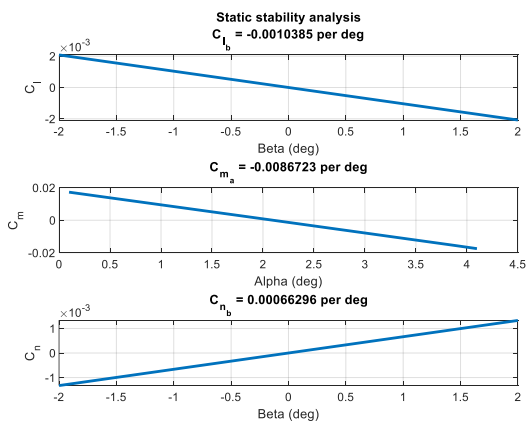
2 -Nonlinear dynamic inversion

3 -Linear Quadratic Integral (LQI)

با پرواز در چنین شرایطی، معادله برداری (V) برقرار بوده و هواپیما پرواز سرعت-ارتفاع ثابت انجام خواهد داد.

۴- بررسی پایداری استاتیکی

پایداری استاتیکی تمایل ذاتی هواپیما برای بازگشت به شرایط تعادل اولیه است. برای تحلیل پایداری استاتیکی طولی، منحنی ضریب گشتاور پیچینگ (C_m) کل هواپیما بر حسب زاویه حمله مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور حصول پایداری استاتیکی طولی، مقدار مشتق ضریب گشتاور پیچینگ نسبت به زاویه حمله باید منفی باشد. برای حصول پایداری استاتیکی عرضی-سمتی، مشتق ضرایب گشتاور رولینگ (C_l) و باوینگ (C_n) نسبت به زاویه سرش جانبی به ترتیب باید منفی و مثبت باشند [۶]. نمودارهای $C_l - \beta$ ، $C_m - \alpha$ و $C_n - \beta$ در شکل ۲ نشان داده شده‌اند:



شکل ۲- نمودارهای $C_n - \beta$ ، $C_l - \beta$ ، $C_m - \alpha$

مقدار شیب این منحنی‌ها در بالای هر شکل نشان داده شده است. با توجه به این نمودارها می‌توان گفت در این شرایط، هواپیما دارای پایداری استاتیکی در هر سه کانال طولی، عرضی و سمتی می‌باشد.

۵- بررسی پایداری دینامیکی

برای بررسی پایداری دینامیکی، ابتدا معادلات غیرخطی هواپیما حول شرایط تعادل اولیه (تریم) خطی شده و سپس مقادیر ویژه ماتریس A مورد بررسی قرار می‌گیرند [۶].

مقادیر ویژه ماتریس A بدین صورت خواهند بود:

$$\begin{aligned} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & -2.6732 + 4.7637i \\ & -2.6732 - 4.7637i \\ & -20.9564 \\ & -0.0213 + 0.1640i \\ & -0.0213 - 0.1640i \\ & -0.0009 \\ & -0.5115 + 3.0985i \\ & -0.5115 - 3.0985i \\ & -0.0053 \end{aligned}$$

$$m(\dot{U} + QW - RV) = F_1 \quad (1)$$

$$m(\dot{V} + RU - PW) = F_2 \quad (2)$$

$$m(\dot{W} + PV - QU) = F_3 \quad (3)$$

$$\dot{P}I_{xx} + QR(I_{zz} - I_{yy}) - (\dot{R} + PQ)I_{xz} = M_1 \quad (4)$$

$$\dot{Q}I_{yy} - PR(I_{zz} - I_{xx}) + (P^2 - R^2)I_{xz} = M_2 \quad (5)$$

$$\dot{R}I_{zz} + PQ(I_{yy} - I_{xx}) + (QR - \dot{P})I_{xz} = M_3 \quad (6)$$

در این روابط کمیت‌ها بصورت زیر تعریف می‌شوند:

جرم	m
ممان‌های اینرسی اصلی	I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}
ممان اینرسی ضربی	I_{xz}
سرعت‌های انتقالی	U, V, W
سرعت‌های دورانی	P, Q, R
برآیند نیروهای وارد شده به مرکز جرم	F_1, F_2, F_3
برآیند گشتاورها حول مرکز جرم	M_1, M_2, M_3

برآیند نیروها از سه نیروی آئرو دینامیکی، پیشرانشی و جاذبی تشکیل شده است. با توجه به فرض کوچک بودن گشتاور ناشی از تراست موتور، عبارات گشتاور صرفاً از گشتاورهای آئرو دینامیکی تشکیل می‌شوند.

با در نظر گرفتن شش معادله سینماتیکی (به پیوست مراجعه شود)، مجموعه ۱۲ معادله و ۱۲ متغیر وجود خواهند داشت. این ۱۲ متغیر عبارتند از:

$$X_e, Y_e, Z_e, U, V, W, P, Q, R, \phi, \theta, \psi$$

با توجه به تعریف دستگاه مختصات اینرسی چسبیده به زمین [۶]:

$$h = -Z_e$$

h ارتفاع هواپیما از سطح زمین می‌باشد.

۳- تریم هواپیما

تریم به وضعیتی گفته می‌شود که در آن برآیند نیروها و گشتاورهای وارد شده به هواپیما به گونه‌ای هستند که هواپیما قادر است بدون ورودی کنترلی وضعیت خود را حفظ کند [۷].

در این مقاله برای تریم هواپیما، انحراف سطوح کنترلی، زاویه حمله و شرایط پروازی (ارتفاع و عدد ماخ) به گونه‌ای بدست آمده‌اند تا برآیند نیروها و گشتاورهای وارد شده به هواپیما برابر صفر باشند:

$$\sum_{i=1}^3 F_i = \sum_{i=1}^3 M_i = 0 \quad (7)$$

در چنین شرایطی، هواپیما شتاب انتقالی و دورانی نداشته و در صورت انجام حرکت ارتفاع-سرعت ثابت در همین شرایط به پرواز خود ادامه می‌دهد. برای هواپیمای در نظر گرفته شده، شرط تریم هواپیما بصورت نشان داده شده در جدول ۱ بدست می‌آید:

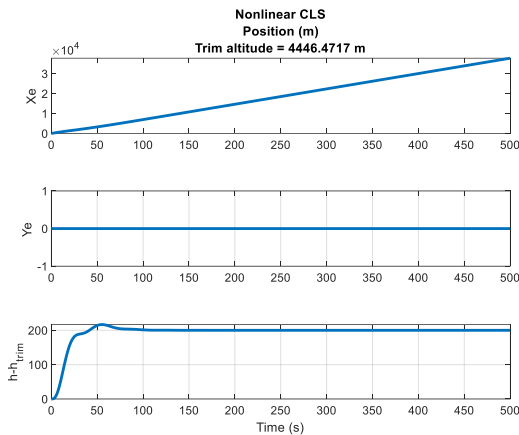
جدول ۱- شرط تریم

$\delta_{e_{trim}} (deg)$	-1.1693
$\alpha_{trim} (deg)$	2.0982
M_{trim}	0.237
$h_{trim} (m)$	4446.5

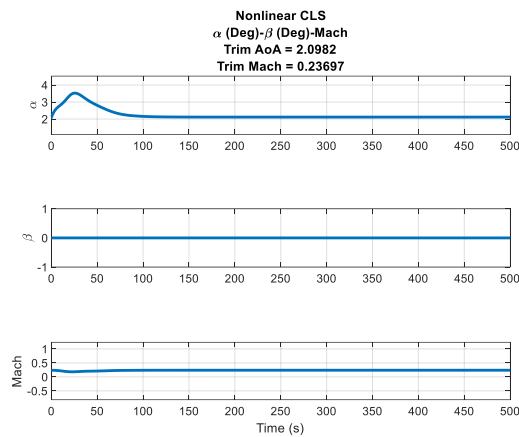
³ -Directional

¹ -Longitudinal

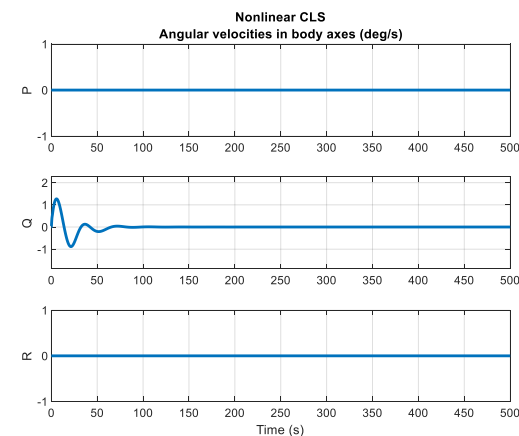
² -Lateral



شکل ۴- موقعیت هواپیما در چهارچوب اینرسی



شکل ۵- زوایای حمله، سرش جانبی و عدد ماخ بر حسب زمان



شکل ۶- سرعت‌های زاویه‌ای بر حسب زمان

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، با توجه به منفی بودن بخش حقیقی مقادیر ویژه ماتریس A ، سیستم دارای پایداری دینامیکی است.

۶- طراحی کنترل کننده

همان‌طور که در مقدمه نیز اشاره گردید، در این مقاله از روش LQI برای کنترل هواپیما استفاده شده است. این روش چند ورودی-چند خروجی و بهینه بوده و قابلیت انجام ردیابی^۱ بردار خروجی را دارد. بنابراین می‌توان از این روش برای کنترل هواپیمای مورد نظر استفاده نمود. با توجه به توضیحات ارائه شده در نرم افزار متلب، برای یک سیستم خطی با معادلات فضای حالت زیر:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (8)$$

$$y = Cx + Du$$

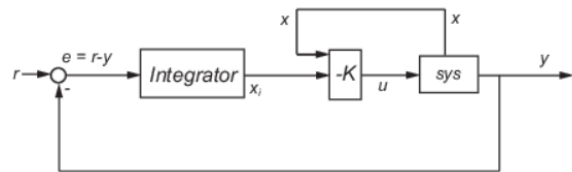
قانون کنترل حلقه بسته بدست آمده از روش LQI بصورت زیر خواهد بود:

$$u = -K \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

در این رابطه x_i خروجی انتگرال‌گیر (شکل ۳) می‌باشد. این قانون کنترلی تضمین می‌کند که خروجی y ورودی مرجع r را دنبال می‌کند. LQI قانون کنترلی $u = -Kz = -K[x; x_i]$ را به گونه‌ای تعیین می‌کند که تابع هزینه زیر مینیمم شود:

$$J(u) = \int_0^{\infty} \{z^T Qz + u^T R u + 2z^T N u\} dt \quad (10)$$

ماتریسهای Q, R, N و ماتریس‌های وزنی هستند. ساختار کنترل کننده حلقه بسته در شکل ۳ نشان داده شده است:



شکل ۳- ساختار کنترل کننده حلقه بسته (متلب)

۷- شبیه‌سازی

در این قسمت، دو مانور متداول مورد بررسی قرار خواهند گرفت. لازم به ذکر است که دینامیک هواپیما در کلیه شبیه‌سازی‌ها غیرخطی در نظر گرفته شده است.

1-7 مانور افزایش ارتفاع

در این مانور، هدف افزایش ارتفاع وسیله می‌باشد. برای این منظور، ورودی مرجع برای ارتفاع به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

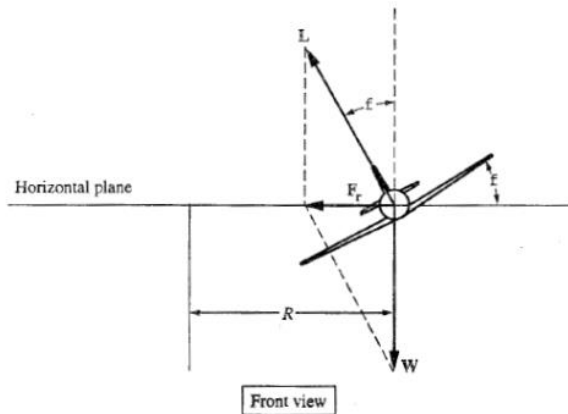
$$r_h = h_{trim} + 200m \quad (11)$$

رابطه (۱۱) بیان می‌کند که کنترلر باید ارتفاع هواپیما نسبت به ارتفاع اولیه (تریم) را به اندازه ۲۰۰ متر افزایش دهد.

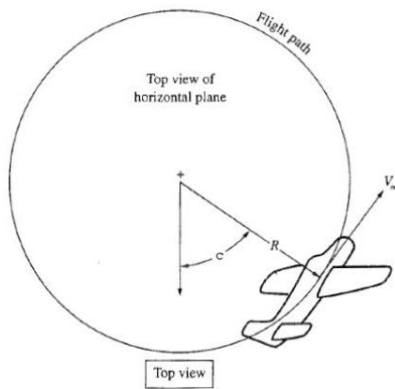
شکل‌های ۴ تا ۸ پاسخ سیستم کنترلی را نشان می‌دهند:

² -Reference input

¹ -Tracking



شکل ۹- نمای از روبروی هواپیما در حال چرخش با ارتفاع ثابت [۸]



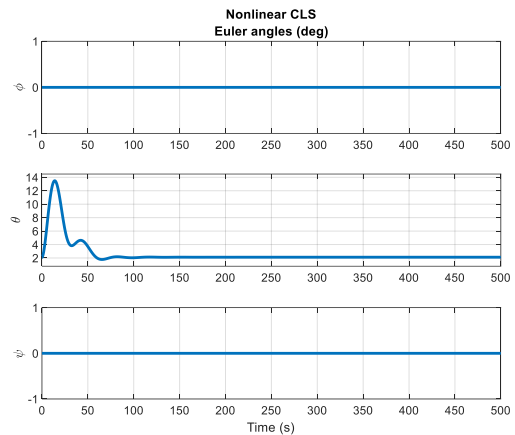
شکل ۱۰- نمای از بالای هواپیما در حال چرخش با ارتفاع ثابت [۸]

توضیحات بیشتر در رابطه با این مانور در مرجع [۸] ارائه شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌گردد، در این مانور، هواپیما با یک زاویه رول ثابت و زاویه یابو افزایشی در حال پرواز بوده و در عین حال ارتفاع آن نیز ثابت می‌باشد. ورودی‌های مرجع برای این مانور بصورت زیر تعریف شده‌اند:

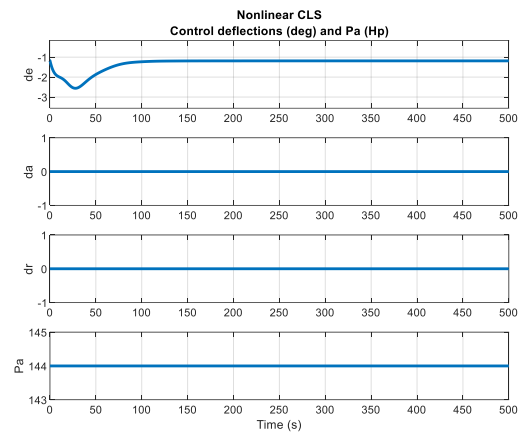
$$\begin{aligned} r_h &= h_{trim} + 200m \\ r_\phi &= 10^\circ \\ r_\psi &= \frac{2\pi}{t_f} t \end{aligned} \quad (11)$$

t_f زمان نهایی می‌باشد (پس از طی این زمان هواپیما یک دور کامل چرخیده است).

شکل‌های ۱۱ تا ۱۵ پاسخ‌های متناظر با مانور چرخش با ارتفاع ثابت را برای هواپیمای مورد نظر نشان می‌دهند:



شکل ۷- زوایای اویلر بر حسب زمان



شکل ۸- انحراف سطوح کنترل و توان هواپیما بر حسب زمان

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، سیستم کنترلی توانسته است تا ارتفاع وسیله را پس از حدود ۷۰ ثانیه به شرایط مطلوب برساند. در عین حال زاویه حمله و عدد ماخ نیز نهایتاً به مقدار اولیه (تریم) خود بازگشته‌اند. جهت افزایش ارتفاع، کنترلر از زاویه پیچ استفاده کرده است. از آنجایی که حرکت در صفحه عمود محلی انجام می‌شود، صرفاً از الویتور برای تغییر زاویه پیچ و متعاقباً ارتفاع استفاده شده است.

در این شبیه‌سازی، ماتریس‌های \mathbf{Q} و \mathbf{R} به این صورت انتخاب شده‌اند (ماتریس \mathbf{N} صفر در نظر گرفته شده است):

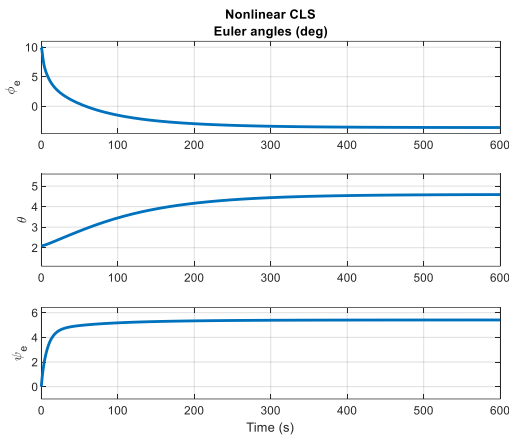
$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= 0.001\mathbf{I} \\ \mathbf{R} &= 100\mathbf{I} \end{aligned} \quad (10)$$

\mathbf{I} ماتریس یکه است.

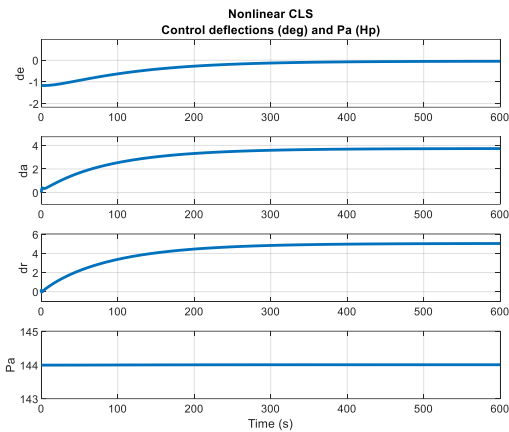
2-7 مانور چرخش با ارتفاع ثابت

در این مانور هدف انجام چرخش (رول ثابت و یابو افزایشی بصورت تابع شیب) در یک ارتفاع ثابت می‌باشد.

تصویر این مانور در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است:



شکل ۱۴-زوایای اویلر بر حسب زمان



شکل ۱۵-انحراف سطوح کنترل و توان هواپیما بر حسب زمان

بر اساس شکل ۱۱ ملاحظه می‌گردد که هواپیما حرکت دایروی با شعاع حدود ۷ کیلومتر در ارتفاع ثابت (ارتفاع تریم) را در مدت ۶۰۰ ثانیه انجام داده است.

شکل ۱۲ زوایای حمله، سرش جانبی و عدد ماخ را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد در این نوع حرکت به دلیل درگیر بودن حرکت عرضی-سمتی، زاویه سرش جانبی افزایش پیدا کرده و زاویه حمله دچار تغییرات زیادی نشده است.

شکل ۱۳ تغییرات بردار سرعت زاویه‌ای را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، P و Q به سرعت به صفر رسیده‌اند و R بدلیل تغییر زاویه یابو به یک مقدار ثابت غیر صفر رسیده است.

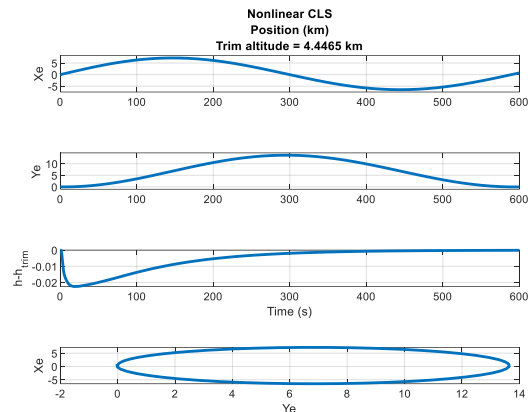
شکل ۱۴ خطای زوایای رول و یابو و مقدار زاویه پیچ را نشان می‌دهد. سیگنال خطا به این صورت تعریف می‌شود:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (11)$$

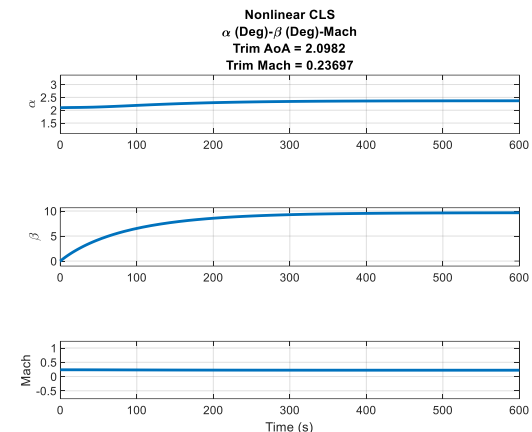
همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، خطای زوایای رول و یابو بترتیب به حدود ۳/۵- و ۵/۴ درجه رسیده است. یکی از دلایل وجود این خطا می‌تواند اثرات ناخواسته سطوح ایلرون و رادر بر روی حرکت سمتی و عرضی باشد (بترتیب).

در این شبیه‌سازی، ماتریس‌های Q و R به این صورت انتخاب شده‌اند (ماتریس N صفر در نظر گرفته شده است):

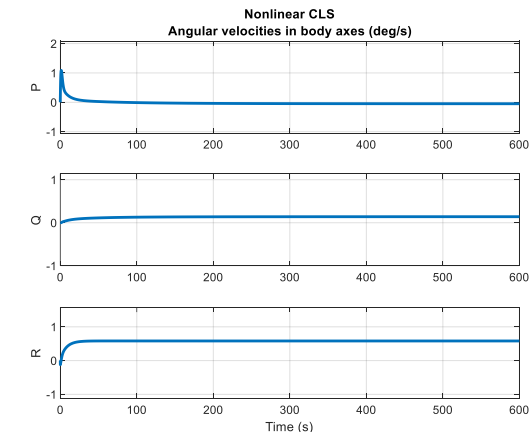
$$\begin{aligned} Q &= 1000I \\ R &= 0.1I \end{aligned} \quad (12)$$



شکل ۱۱-موقعیت هواپیما در چهارچوب اینرسی



شکل ۱۲-زوایای حمله، سرش جانبی و عدد ماخ بر حسب زمان



شکل ۱۳-سرعت‌های زاویه‌ای بر حسب زمان

- [7] <https://www.skybrary.aero/articles/trim-systems>
 [8] J. Anderson, "Aircraft Performance & Design," McGraw-Hill Education; 1st edition (December 5, 1998)
 [9] Advanced aircraft analysis (AAA)
 [10] PA-28-161 Warrior III Pilot operating handbook

8- نتیجه گیری

هواپیمای PA-28-161 Warrior III دارای جرم حدود ۱ تن بوده و در رسته هواپیماهای سبک وزن قرار دارد. هواپیماهای سبک وزن معمولاً برای آموزش پرواز، تاکسی هوایی و مصارف شخصی استفاده می شوند. در این مقاله، مساله طراحی کنترلر حلقه بسته برای این هواپیما مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور ابتدا شرایط تریم هواپیما حاصل گردید. سپس پایداری استاتیکی و دینامیکی بررسی شدند. در نهایت از روش انتگرال کوادراتیک خطی برای کنترل سیستم استفاده شد. مانورهای افزایش ارتفاع و چرخش با ارتفاع ثابت در شبیه سازی ها بررسی شدند. نشان داده شد که سیستم کنترل حلقه بسته قادر است مانورهای مد نظر را انجام دهد.

10- پیوست

مشخصات جرمی PA-26-181-Warrior III [۹]

$$m = 1100 \text{ kg}$$

$$I_{xx} = 1144, I_{yy} = 1784, I_{zz} = 2656, I_{xz} = -108 \text{ kg.m}^2$$

$$x_{cg} = 2.4, y_{cg} = 0, z_{cg} = -0.42 \text{ m}$$

مشخصات هندسی PA-26-181-Warrior III

مشخصات هندسی این هواپیما در مرجع [۱۰] موجود می باشد.

معادلات سینماتیکی هواپیما [۶]

معادله سینماتیکی انتقالی هواپیما:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_e \\ \dot{Y}_e \\ \dot{Z}_e \end{bmatrix} = \mathbf{TM}^{eb} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

در این رابطه \mathbf{TM}^{eb} ماتریس انتقال از دستگاه بدنی به اینرسی می باشد.

معادلات سینماتیکی دورانی هواپیما:

$$P = -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi}$$

$$Q = \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi$$

$$R = \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi$$

زوایای ϕ ، θ و ψ به ترتیب زوایای رول، پیچ و یاء هستند.

9- مراجع

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Light_aircraft.
 [2] D. McLean and C. Descombes, "An automatic trim recovery control system for engine-out take-off and initial climb of twin-engined light aircraft," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 16, Issue 5, 1994.
 [3] C. Vidan, S. I Badea, "Longitudinal automatic control system for a light weight aircraft," in 2016 *International Conference of Aerospace Sciences*, Bucharest, Romania.
 [4] B. Jayaraman, D. Kumar Giri, A. Kanti Ghosh, "Attitude tracking control of a light aircraft using classical and incremental nonlinear dynamic inversion approaches," in 2021 *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, Athens, Greece
 [5] <https://www.globalair.com/aircraft-for-sale/specification>
 [6] T. R Yechout, "Introduction to Aircraft Flight Mechanics: Performance, Static Stability, Dynamic Stability, Classical Feedback Control, and State-Space Foundations," AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics); 2nd Revised edition (May 1, 2014)