

بررسی خطای الگوریتم انطباق خام در ناوبری اینرسی

حامد محمدکریمی^{۱*}، محمدعلی پرهیزکار^۲، مهسا قاسمی^۳

۱- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، h.mohammadkarimi@aut.ac.ir
 ۲- دانشجوی کارشناسی مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، mapf1380@aut.ac.ir
 ۳- دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، mahsa.ghasemi@aut.ac.ir
 *نویسنده مخاطب

چکیده

اولیه لازم است که شرایط اولیه شامل مکان و وضعیت اولیه سیستم مشخص شوند. باید در نظر داشت که دقت انطباق اولیه بر دقت ناوبری تأثیر مستقیم دارد [۶ و ۵]. از این رو فاز انطباق اولیه یکی از مهمترین مراحل عملکرد INS است که به دقت و سرعت بالا نیاز دارد [۷]. این فرآیند در دو مرحله متوالی انجام می‌شود و در هر مرحله به دقت آن افزوده می‌شود. این دو مرحله عبارتند از انطباق خام و انطباق دقیق.

انطباق خام سریع است، اما دقت کمی دارد. از طرفی، در انطباق دقیق زمان لازم برای دستیابی به اطلاعات بیشتر است، اما دقت بالایی دارد. در این مقاله به بررسی انطباق خام پرداخته می‌شود. این مرحله شامل یک تخمین اولیه از سرعت اولیه، موقعیت اولیه و وضعیت اولیه جسم است. سرعت اولیه جسم غالباً صفر در نظر گرفته شده (حالت سکون) و موقعیت اولیه جسم نیز به راحتی قابل استخراج است. برای محاسبه وضعیت اولیه جسم، از موقعیت جسم و مدل زمین برای محاسبه گرانش و دوران اسمی زمین استفاده می‌شود؛ سپس با مقایسه مقادیر نامی گرانش و دوران با مقادیر اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها و جایروهای نرخی، یک تخمین اولیه از وضعیت جسم (ماتریس تبدیل) حاصل می‌شود. موفقیت در این مرحله مستلزم دانش دقیق از مدل زمین و دقت مناسب حسگرهای ناوبری است.

در مرجع [۲] و [۸] برای جبران خطاهای حسگرها از روش پردازش سیگنال پیشرفته [۹ و ۱۰] و حسگرهای اضافی برای تقویت سیستم ناوبری به صورت هم‌زمان استفاده شده است [۱۱ و ۱۲]. ناوبری اینرسی در بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی کاربرد دارد، اما به طور گسترده در زمینه‌های مرتبط با حسگرها [۱۳]، الگوریتم‌های ناوبری مستقل در خودروها [۱۴ و ۱۵]، زیردریایی‌ها و کاربردهای هوایی [۱۶] استفاده می‌شود. در مراجع [۱۷] و [۱۸] به بررسی خطاهای حسگر اینرسی و روش‌های پیشرفته پردازش سیگنال پرداخته شده است. مرجع [۱۹] به بررسی و گسترش مفهوم الگوریتم انطباق خام که در مرجع [۲۰] مطالعه شده، پرداخته است. الگوریتم ارائه شده در [۱۹] برای محاسبه زوایای وضعیت اولیه با استفاده از حسگرهای اینرسی و اندازه‌گیری‌های مغناطیس‌سنج از واحد ADIS16405 طراحی شده است. الگوریتم انطباق دقیق معرفی شده در مرجع [۲۰] از فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF) [۲۱] برای بهبود نتایج وضعیت محاسبه شده توسط الگوریتم انطباق خام استفاده می‌کند. در مرجع [۲۰] نتایج ترکیب هر دو الگوریتم انطباق خام و دقیق برای دستیابی به ناوبری اینرسی با دقت بالاتر نشان داده شده است.

در پژوهش‌های پیشین آنالیز خطای انطباق خام به صورت دقیق انجام نشده است. در این پژوهش، روابط خطای انطباق خام با دقت بسیار بالا

سیستم‌های ناوبری اینرسی برای شروع به کار، به انطباق اولیه نیاز دارند. به این معنا که سیستم ناوبری اینرسی بایستی در ابتدای حرکت، از موقعیت، سرعت و وضعیت اولیه حامل مطلع باشد. در این پژوهش، به بررسی و توسعه روابط انطباق اولیه در حالت خام پرداخته شده است. سرعت بالاتر و پیچیدگی کمتر الگوریتم انطباق اولیه در حالت خام نسبت به انطباق اولیه در حالت دقیق، منجر به صرفه جویی در زمان و هزینه شروع به کار سیستم های ناوبری اینرسی می‌شود. به منظور بهبود دقت الگوریتم انطباق خام، ابتدا، مسئله انطباق خام با فرض ایده‌آل بودن حسگرها مدل‌سازی شده و زوایای اوپلر، که نشانگر وضعیت حامل هستند، استخراج شده‌اند. با توجه به این که خروجی حسگرها با خطا همراه است، با فرض ایده‌آل نبودن حسگرها، آنالیز خطای حسگرها انجام شده و دقت الگوریتم انطباق خام استخراج شده است. در ادامه، با استفاده از شبیه‌سازی، روابط استخراج شده اعتبارسنجی شده‌اند. برای این منظور، با فرض معلوم بودن وضعیت بلوک اینرسی و مدل خطای حسگرها، زوایای رول، پیچ و یاو بلوک تخمین زده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روابط توسعه داده شده دقت بالایی در محاسبه وضعیت دارند.

واژه های کلیدی: ناوبری اینرسی - انطباق اولیه - انطباق خام - خطای انطباق خام - انطباق دقیق

۱- مقدمه

سیستم های ناوبری اینرسی با توجه ویژگی‌هایی مانند خودگردانی بالا و اختفاء قوی، استفاده گسترده‌ای در حامل‌هایی مانند وسایل پرنده بدون سرنشین، راکت‌ها، کشتی‌ها و وسایل نقلیه زمینی دارد [۲۱]. با پیشرفت فناوری در سیستم‌های ناوبری، سیستم ناوبری متصل به بدنه جایگزین سیستم ناوبری اینرسی صفحه پایدار شده است. همچنین، با توجه به نیاز صنایع مختلف به ناوبری به‌ویژه در صنایع هوافضا، رویکرد تحقیقاتی گسترده‌ای در حوزه سیستم‌های ناوبری اینرسی ایجاد شده است [۳].

مفهوم سنتی ناوبری اینرسی معمولاً از یک واحد اندازه‌گیری اینرسی (IMU) استفاده می‌کند که شامل سه شتاب‌سنج به منظور اندازه‌گیری شتاب انتقالی (برای دستیابی به سرعت و موقعیت) و سه ژيروسکوپ نرخی به منظور اندازه‌گیری حرکت چرخشی است. اطلاعات خروجی IMU موقعیت و وضعیت سیستم را مشخص می‌کنند [۱].

یک مرحله مهم قبل از اینکه سیستم ناوبری اینرسی شروع به کار کند، انطباق اولیه است. هدف از انطباق اولیه تعیین ماتریس کسینوس جهت از سیستم حامل به سیستم ناوبری است [۴]. به عبارت دیگر، در انطباق

با توجه به روابط بیان شده، می توان ماتریسی مطابق (۷) تشکیل داد:

$$[-\mathbf{g}]^B \quad [-\mathbf{g}]^B \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B \quad ([-\mathbf{g}]^B \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B) \times [-\mathbf{g}]^B = [\mathbf{T}]^{BN} \left[[-\mathbf{g}]^N \quad [-\mathbf{g}]^N \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N \quad ([-\mathbf{g}]^N \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N) \times [-\mathbf{g}]^N \right] \quad (7)$$

با توجه به رابطه (۷)، می توان $[\mathbf{T}]^{BN}$ را مطابق

(۸) استخراج نمود. با برابر قرار دادن $[\mathbf{T}]^{BN}$ به دست آمده با

مقدار تئوری این ماتریس تبدیل، یعنی ماتریس تبدیل میان دو دستگاه

مختصات بدنی و ناوبری، وضعیت اولیه وسیله استخراج می شود. رابطه (۱۰)

بیانگر وضعیت اولیه وسیله در حالت ایده آل می باشد:

$$[\mathbf{T}]^{BN} \approx \begin{bmatrix} \frac{\tilde{f}_y \sigma_4 + \tilde{f}_z \sigma_3}{\sigma_1} & -\frac{\sigma_2}{g \omega^{EI} \cos(\lambda)} & -\frac{\tilde{f}_x}{g} \\ \frac{\tilde{f}_x \sigma_4 - \tilde{f}_z \sigma_2}{\sigma_1} & \frac{\sigma_3}{g \omega^{EI} \cos(\lambda)} & -\frac{\tilde{f}_y}{g} \\ \frac{\tilde{f}_x \sigma_3 + \tilde{f}_y \sigma_2}{\sigma_1} & -\frac{\sigma_4}{g \omega^{EI} \cos(\lambda)} & -\frac{\tilde{f}_z}{g} \end{bmatrix}$$

where

$$\begin{cases} \sigma_1 = g^2 \omega^{EI} \cos(\lambda) \\ \sigma_2 = \tilde{f}_y \tilde{\omega}_z - \tilde{f}_z \tilde{\omega}_y \\ \sigma_3 = \tilde{f}_x \tilde{\omega}_z - \tilde{f}_z \tilde{\omega}_x \\ \sigma_4 = \tilde{f}_x \tilde{\omega}_y - \tilde{f}_y \tilde{\omega}_x \end{cases} \quad (8)$$

$$[\mathbf{T}]^{BN} = \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right]^{1(\varphi)} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{matrix} \right]^{2(\theta)} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{matrix} \right]^{3(\psi)} \end{bmatrix}^N \quad (9)$$

$$\begin{cases} \psi = \arctan(T_{12}/T_{11}) \\ \theta = \arccos(T_{23} / \sin \varphi) \times -\text{sgn}(T_{13}) \\ \varphi = \arctan(T_{23}/T_{33}) \end{cases} \quad (10)$$

۲- محاسبه اثر خطای حسگرها و دقت الگوریتم

حسگرهای بلوک IMU لزوماً دقیق نبوده و نتایج آن‌ها با مقدار حقیقی نیروها و سرعت‌های زاویه‌ای وارد بر جسم، اختلاف دارند. نتایج حسگرها، درایه‌های ماتریس رابطه (۸) را تشکیل

می دهند؛ لذا زوایای اولیری که از تساوی روابط

(۸) و (۹) به دست می آیند، دارای خطا هستند. در این بخش

از مقاله به مدلسازی خطای حسگرها و نیز دقت الگوریتم انطباق خام پرداخته خواهد شد.

استخراج شده است. در استخراج این روابط، اثر خطای سنسورها و اثر خطای دوران‌های کوچک هم‌زمان لحاظ شده است که دقت بسیار بالایی را نتیجه می دهد.

ساختار مقاله به این صورت است که ابتدا، پس از تعریف دستگاه‌های مختصات مورد نیاز مسئله، مدل سازی ریاضی انجام می شود. در ادامه، خطا و دقت الگوریتم انطباق خام استخراج خواهند شد. در انتها نتایج شبیه سازی ارائه می شوند.

۱- مدلسازی ریاضی و استخراج ماتریس انتقال

همان گونه که در مقدمه مقاله بیان شد، انطباق اولیه، فرآیند یافتن سرعت، موقعیت و وضعیت اولیه جسم، جهت حل معادلات دیفرانسیل ناوبری اینرسی است. سرعت اولیه جسم معمولاً برابر صفر است و موقعیت اولیه وسیله را می توان به سادگی استخراج نمود. لذا آنچه باقی می ماند، تعیین وضعیت اولیه جسم است. همچنین ذکر شد که در انطباق اولیه، از خواص فیزیکی زمین مانند جاذبه و نرخ چرخش آن برای تخمین وضعیت وسیله استفاده می شود. یکی از روش‌های متداول جهت یافتن وضعیت اولیه جسم (انطباق خام)، استفاده از ماتریس انتقال بین دو دستگاه بدنی و ناوبری است. قبل از حرکت وسیله، سیستم ناوبری اینرسی متصل به بدنه، نسبت به زمین ثابت است. بنابراین شتاب‌سنج‌ها، مولفه‌های شتاب متناظر با نیروی عکس‌العمل سطح و ژيروسکوپ‌ها، مولفه‌های سرعت زاویه‌ای زمین را در دستگاه بدنی اندازه‌گیری می کنند.

$$[\tilde{\mathbf{f}}]^B = [-\mathbf{g}]^B = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x \\ \tilde{f}_y \\ \tilde{f}_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B = [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

(۱) و (۲)، داده‌های IMU در هر لحظه از حرکت وسیله هستند.^۱

همچنین می توان به کمک روابط جبر تنسوری چنین نوشت:

$$[-\mathbf{g}]^B = [\mathbf{T}]^{BN} [-\mathbf{g}]^N \quad (3)$$

$$[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B = [\mathbf{T}]^{BN} [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N \quad (4)$$

که در روابط فوق $[-\mathbf{g}]^N$ و $[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N$ در لحظه اولیه، با توجه به دستگاه مختصات ناوبری (NED)، چنین بیان می شوند:

$$[-\mathbf{g}]^N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N = \begin{bmatrix} \omega^{EI} \cos \lambda \\ 0 \\ -\omega^{EI} \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (6)$$

^۱ علامت ~ حاکی از اندازه‌گیری کمیت مورد نظر است.

$$[\varepsilon \mathbf{R}^{\dot{N}N}]^N = \begin{bmatrix} g(\sigma_4 + \sigma_2) - \delta\omega_n g^2 + \delta f_d g \omega^{EI} \cos(\lambda) & \delta\omega_e g - \delta f_e \omega^{EI} \sin(\lambda) & \delta f_n \\ \frac{\sigma_1}{\delta\omega_e g^2 - \delta f_e g \omega^{EI} \sin(\lambda)} & \frac{\sigma_3}{\sigma_4 - \delta\omega_n g + \sigma_2} & \frac{g}{\delta f_e} \\ \frac{\sigma_1}{\delta f_n} & \frac{\sigma_3}{\delta f_e} & \frac{g}{\delta f_d} \\ g & g & g \end{bmatrix}$$

۱-۲- اثر خطای حسگرها

اگر خروجی حسگرها بدون خطا باشند، رابطه (۸) نیز فاقد خطا بوده و با استفاده از این رابطه، زوایای رول، پیچ و یاو به صورت دقیق محاسبه می‌شوند. برای در نظر گرفتن خطای حسگرها، (۷) را چنین بازنویسی می‌نماییم:

$$[\mathbf{T}]^{BN} = \left[[\tilde{\mathbf{f}}]^B \quad [\tilde{\mathbf{f}}]^B \times [\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B \quad ([\tilde{\mathbf{f}}]^B \times [\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B) \times [\tilde{\mathbf{f}}]^B \right] \mathbf{M}^{-1} \quad (11)$$

با استفاده از عملگر اغتشاش δ و روابط حاکم بر آن، می‌توان چنین بیان نمود:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \delta \mathbf{f} = -\mathbf{g}_L + \delta \mathbf{f} \rightarrow [\tilde{\mathbf{f}}]^B = [\delta \mathbf{f}]^B - [\mathbf{g}]^B \quad (12)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI} = \boldsymbol{\omega}^{EI} + \delta \boldsymbol{\omega}^{BI} \rightarrow [\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI}]^B = [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B + [\delta \boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \quad (13)$$

$$[\mathbf{T}]^{BN} = [\mathbf{T}]^{BN} [\bar{\mathbf{T}}]^{\dot{N}N} = [\mathbf{T}]^{BN} [\mathbf{R}^{\dot{N}N}]^N = [\mathbf{T}]^{BN} \left([\mathbf{E}]^N + [\varepsilon \mathbf{R}^{\dot{N}N}]^N \right) \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)، $\varepsilon \mathbf{R}^{\dot{N}N}$ تنسور شبه‌متقارن^۲ تنسور انحراف^۳ یعنی $\varepsilon \mathbf{R}^{\dot{N}N}$ است که انحراف مقدار محاسبه شده ماتریس تبدیل $([\mathbf{T}]^{BN})$ از مقدار واقعی آن $([\mathbf{T}]^{BN})$ را نشان می‌دهد. با قرار دادن روابط (۱۲) تا (۱۴) در رابطه (۱۱)، تفریق (۷) از آن و کمی ساده‌سازی ریاضی، می‌توان رابطه (۱۵) را چنین نوشت:

$$[\mathbf{T}]^{BN} [\varepsilon \mathbf{R}^{\dot{N}N}]^N = \left[[\delta \mathbf{f}]^B, [\delta \mathbf{f}]^B \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B - [\mathbf{g}]^B \times [\delta \boldsymbol{\omega}^{BI}]^B, \dots, -[\delta \mathbf{f}]^B \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B \times [\mathbf{g}]^B - [\mathbf{g}]^B \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^B \times [\delta \mathbf{f}]^B + [\mathbf{g}]^B \times [\delta \boldsymbol{\omega}^{BI}]^B \times [\mathbf{g}]^B \right] \mathbf{M}^{-1} \quad (15)$$

رابطه (۱۵) خطای تخمین وضعیت را به خطای حسگرها ارتباط می‌دهد. برای برآورد دقت فرآیند انطباق خام اولیه، در ابتدا رابطه فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[\varepsilon \mathbf{R}^{\dot{N}N}]^N = \left[[\delta \mathbf{f}]^N, [\delta \mathbf{f}]^N \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N - [\mathbf{g}]^N \times [\delta \boldsymbol{\omega}^{BI}]^N, \dots, -[\delta \mathbf{f}]^N \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N \times [\mathbf{g}]^N - [\mathbf{g}]^N \times [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N \times [\delta \mathbf{f}]^N + [\mathbf{g}]^N \times [\delta \boldsymbol{\omega}^{BI}]^N \times [\mathbf{g}]^N \right] \mathbf{M}^{-1} \quad (16)$$

حال با در نظر گرفتن تعاریف زیر، می‌توان تنسور شبه‌متقارن ماتریس انحراف را مطابق رابطه (۱۸) بیان نمود:

$$[\delta \mathbf{f}]^N = \begin{bmatrix} \delta f_n \\ \delta f_e \\ \delta f_d \end{bmatrix} \quad [\delta \boldsymbol{\omega}^{BI}]^N = \begin{bmatrix} \delta \omega_n \\ \delta \omega_e \\ \delta \omega_d \end{bmatrix} \quad (17)$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = g^2 \omega^{EI} \cos(\lambda) \\ \sigma_2 = \delta f_n \omega^{EI} \sin(\lambda) \\ \sigma_3 = g \omega^{EI} \cos(\lambda) \\ \sigma_4 = \delta f_d \omega^{EI} \cos(\lambda) \end{array} \right. \quad (18)$$

رابطه (۱۸) نشان می‌دهد که در حضور خطای حسگرها، ماتریس $[\varepsilon \mathbf{R}^{\dot{N}N}]^N$ لزوماً شبه‌متقارن نیست، اما در حالت ایده‌آل داریم:

$$[\varepsilon \mathbf{R}^{\dot{N}N}]^N = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon\psi & \varepsilon\theta \\ \varepsilon\psi & 0 & -\varepsilon\varphi \\ -\varepsilon\theta & \varepsilon\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

حال فرض کنید که شرایط زیر که به معنای صفر بودن قطر اصلی ماتریس (۱۸) است، برقرار باشند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta f_d = 0 \\ \delta f_n = \frac{g}{\omega^{EI} \sin \lambda} \delta \omega_n \end{array} \right. \quad (20)$$

در صورتی که شرایط رابطه (۲۰) محقق شوند، دقت الگوریتم انطباق خام از رابطه (۲۱) بدست می‌آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi = \frac{1}{g} \delta f_e \\ \varepsilon\theta = -\frac{1}{g} \delta f_n \\ \varepsilon\psi = \frac{\delta \omega_e g - \delta f_e \omega^{EI} \sin(\lambda)}{g \omega^{EI} \cos(\lambda)} \end{array} \right. \quad (21)$$

طبق رابطه (۲۱)، مولفه‌های خطای وضعیت به عرض جغرافیایی و خطای حسگرهای اینرسی وابسته است. مطابق این رابطه با افزایش دقت حسگرهای اینرسی، دقت الگوریتم شمال یاب نیز افزایش می‌یابد. در مورد خطای کاتال سمت مطابق این رابطه می‌توان گفت:

$$\varepsilon\psi \leq \frac{g |\delta \omega_e| + |\delta f_e| \omega^{EI} |\sin(\lambda)|}{g \omega^{EI} \cos(\lambda)} \quad (22)$$

۲-۲- دقت الگوریتم

با توجه به رابطه (۲۱)، تخمین خطای وضعیت به کمک عملگر اغتشاش ε استخراج شده است. نیاز است برای مقایسه دقت روابط بیان شده، از عملگر اغتشاش δ استفاده شود. در هنگام شبیه سازی، خطای وضعیت به شکل اختلافی میان زوایای اوپلر حقیقی و زوایای دارای خطا بیان می شود که همان بیان عملگر اغتشاش δ است:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_t \quad (23)$$

با توجه به توضیحات بیان شده، بایستی روابط تخمین خطای وضعیت به کمک عملگر اغتشاش δ بیان شوند. به کمک روابط (۲۱) خواهیم داشت [۲۲]:

$$\begin{cases} \varepsilon \varphi = \Delta \theta \sin \hat{\psi} - \Delta \varphi \cos \hat{\psi} \cos \hat{\theta} \\ \varepsilon \theta = -\Delta \theta \cos \hat{\psi} - \Delta \varphi \cos \hat{\theta} \sin \hat{\psi} \\ \varepsilon \psi = \Delta \varphi \sin \hat{\theta} - \Delta \psi \end{cases} \quad (24)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta \varphi = -(\varepsilon \varphi \cos \hat{\psi} + \varepsilon \theta \sin \hat{\psi}) \sec \hat{\theta} \\ \Delta \theta = \varepsilon \varphi \sin \hat{\psi} - \varepsilon \theta \cos \hat{\psi} \\ \Delta \psi = -\varepsilon \psi - (\varepsilon \varphi \cos \hat{\psi} + \varepsilon \theta \sin \hat{\psi}) \tan \hat{\theta} \end{cases}$$

۳- شبیه سازی

برای شبیه سازی و بررسی صحت روابط، ۵۰ سناریو تصادفی تعریف شده و در این سناریوها، زوایای اوپلر و عرض جغرافیایی به صورت تصادفی تولید شده اند (مشابه جدول ۱).

جدول ۱- چند سناریو از ۵۰ سناریوی تصادفی جهت انجام شبیه سازی

| سناریو | λ (Deg) | ψ (Deg) | θ (Deg) | ϕ (Deg) |
|--------|-----------------|--------------|----------------|--------------|
| ۱ | ۵۲.۰۶۳ | ۱۴۳.۵۳۱ | ۷۳.۵۵۱ | ۴۶.۶۱۳ |
| ۲ | ۵۲.۷۰۳ | -۳۹.۹۰۸ | -۷۱ | -۶۲.۹۴۵ |
| ۳ | ۷.۱۲۵ | ۶.۵۵۴ | ۷۷.۴۷۷ | -۵۵.۸۵۳ |
| ۴ | -۷۷.۴ | -۳۲.۰۰۲ | -۷۴.۷ | ۱۱۹.۱۵۱ |
| ۵ | ۴۰.۳۷۴ | -۳۹.۵۲۸ | -۳۴.۶۵۹ | -۲۷.۸۸۸ |

جهت بررسی دقت الگوریتم تخمین خطای ارائه شده، مقداری خطای تصادفی در ۵۰ سناریو (مشابه جدول ۲ و جدول ۳)، بر داده های اولیه ژيروسکوپها و شتابسنجها اعمال می شود:

جدول ۲- چند سناریو از ۵۰ سناریوی خطای شتابسنجها

| سناریو | b_z^a (μg) | b_y^a (μg) | b_x^a (μg) | S_z^a (ppm) | M_{zy}^a (s) | M_{zx}^a (s) |
|--------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------|----------------|----------------|
| ۱ | ۱۲ | ۹ | -۵۰ | ۵۵ | ۱۲۳ | ۱۴۷ |
| ۲ | ۹ | ۱۳ | -۵۸ | ۱۳۳ | ۱۴۸ | ۸۵ |
| ۳ | ۱۵ | ۱۴ | -۴۵ | ۱۱۹ | ۸۳ | ۱۳۰ |
| ۴ | ۷ | ۶ | -۵۲ | ۷۲ | ۱۰۶ | ۱۰۰ |
| ۵ | ۸ | ۵ | -۵۷ | ۷۳ | ۹۹ | ۱۴۰ |

| سناریو | S_z^a (ppm) | M_{xy}^a (s) | M_{xz}^a (s) | M_{yx}^a (s) | S_y^a (ppm) | M_{yz}^a (s) |
|--------|---------------|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|
| ۱ | ۱۴ | -۳۷ | ۶ | ۱۲ | ۶ | -۴۹ |
| ۲ | ۱۵ | -۵۸ | ۶ | ۷ | ۱۴ | -۲۷ |
| ۳ | ۱۱ | -۷۳ | ۱۴ | ۸ | ۱۳ | -۶۷ |
| ۴ | ۱۴ | -۳۴ | ۱۰ | ۷ | ۱۰ | -۴۹ |
| ۵ | ۱۳ | -۳۹ | ۱۳ | ۱۳ | ۹ | -۴۱ |

جدول ۳- چند سناریو از ۵۰ سناریوی خطای ژيروسکوپها

| سناریو | S_x^g (ppm) | M_{zy}^g (s) | M_{zx}^g (s) | M_{yx}^g (s) | S_y^g (ppm) | M_{yz}^g (s) |
|--------|---------------|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|
| ۱ | ۶ | -۲۲ | ۶ | ۵ | ۶ | -۲۲ |
| ۲ | ۵ | -۱۳ | ۶ | ۳ | ۷ | -۲۵ |
| ۳ | ۳ | -۱۰ | ۳ | ۳ | ۴ | -۱۳ |
| ۴ | ۳ | -۱۵ | ۶ | ۶ | ۳ | -۲۲ |
| ۵ | ۳ | -۱۸ | ۷ | ۵ | ۶ | -۲۹ |

| سناریو | M_{zx}^g (s) | M_{zy}^g (s) | S_z^g (ppm) | b_x^g ($\frac{deg}{hr}$) | b_y^g ($\frac{deg}{hr}$) | b_z^g ($\frac{deg}{hr}$) |
|--------|----------------|----------------|---------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| ۱ | ۴ | ۳ | -۱۶ | ۰.۰۱۲ | ۰.۰۰۹ | ۰.۰۰۵ |
| ۲ | ۴ | ۷ | -۳۰ | ۰.۰۱۴ | ۰.۰۰۸ | ۰.۰۰۵ |
| ۳ | ۵ | ۷ | -۲۵ | ۰.۰۰۵ | ۰.۰۰۶ | ۰.۰۰۸ |
| ۴ | ۷ | ۷ | -۱۱ | ۰.۰۱۵ | ۰.۰۰۱ | ۰.۰۰۶ |
| ۵ | ۵ | ۷ | -۲۷ | ۰.۰۱۴ | ۰.۰۰۵ | ۰.۰۰۸ |

به کمک روابط (۲۵) و (۲۶)، به مقادیر حقیقی شتاب و سرعت زاویه ای، خطا اعمال می شود تا داده های ورودی به الگوریتم انطباق خام، مشابه خروجی یک IMU واقعی شود [۱].

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_x \\ \tilde{f}_y \\ \tilde{f}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x^a & M_{xy}^a & M_{xz}^a \\ M_{yx}^a & S_y^a & M_{yz}^a \\ M_{zx}^a & M_{zy}^a & S_z^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x^a \\ b_y^a \\ b_z^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x^a \\ n_y^a \\ n_z^a \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x^g & M_{xy}^g & M_{xz}^g \\ M_{yx}^g & S_y^g & M_{yz}^g \\ M_{zx}^g & M_{zy}^g & S_z^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x^g \\ b_y^g \\ b_z^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x^g \\ n_y^g \\ n_z^g \end{bmatrix} \quad (26)$$

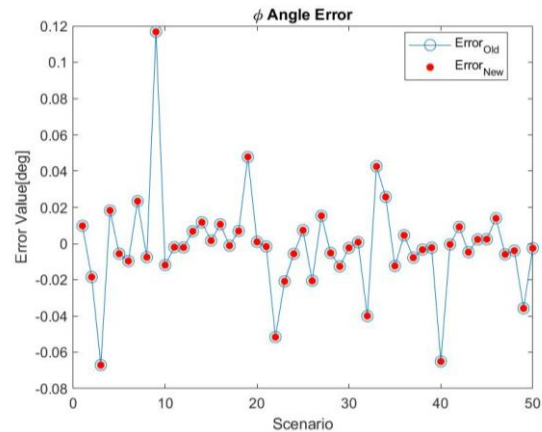
در ادامه مقدار خطای اعمال شده بر زوایای اوپلر اولیه، به کمک اختلاف میان زوایای وضعیت اولیه و ثانویه، محاسبه شده (Error_{old}) و نیز مقدار خطا به کمک روابط (۲۱) و (۲۴) تخمین زده می شوند (Error_{new}). نتایج در ادامه مشاهده می شوند:

استخراج شد. سپس با تغییر عملگر اغتشاش و انجام شبیه‌سازی برای ۵۰ سناریوی تصادفی، دقت روابط استخراج‌شده در تعیین خطای انطباق خام به اثبات رسید.

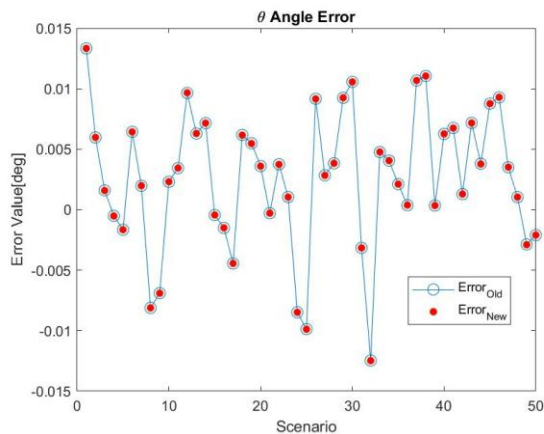
از نتایج روابط اثبات‌شده برای تخمین خطای انطباق خام، می‌توان جهت دقیق‌تر نمودن الگوریتم انطباق خام استفاده نمود. همچنین می‌توان با حل نامعادله‌ای به شکل «خطای انطباق خام، کمتر از خطای انطباق دقیق»، فضای وضعی را استخراج نمود که در آن فضا، انطباق خام دقت بهتری نسبت به انطباق دقیق دارد. مزیت این امر در سرعت بخشیدن به الگوریتم انطباق است؛ زیرا انطباق دقیق نیازمند زمان بیشتری برای تعیین وضعیت اولیه جسم است و در صورت استفاده از فضای وضعی بیان‌شده به کمک انطباق خام، وضعیت اولیه جسم با سرعت و دقت بیشتری استخراج می‌شود.

۵- مراجع

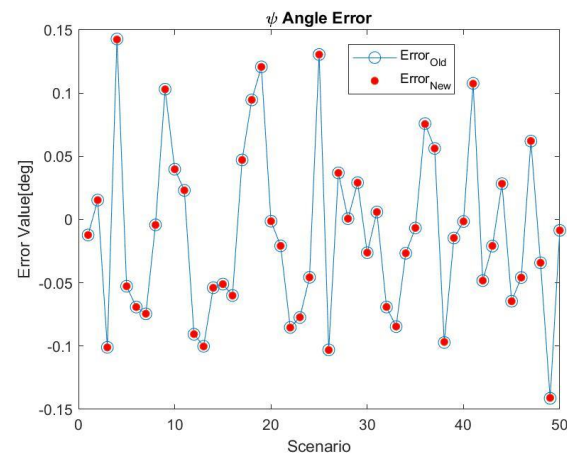
- [1] Titterton D. H., Weston J. L., Strapdown Inertial Navigation Technology, Lavenham, UK : The Lavenham Press ltd (1997)
- [2] Shin E-H., Accuracy Improvement of Low Cost INS/GPS for Land Applications, M.S. thesis, Dept. Geom. Eng., University of Calgary, Calgary, CA, (2001)
- [3] Yang D., Yu W. (2013) Research on initial alignment for large azimuth misalignment angle with Sage_Husa adaptive filtering. J. Infrared and Laser Engineering, 42(8): 2197-2201.
- [4] Zou, Tao, et al. "Fine Alignment Algorithm of Regular Tetrahedral Redundant Strapdown Inertial Navigation System Base on Kalman Filter." 2022 2nd International Conference on Electrical Engineering and Mechatronics Technology (ICEEMT). IEEE, 2022.
- [5] Ning X.G., Huang J.X., Li J.X. (2021) A latitude self estimation method of strapdown inertial navigation under complex interference. J. Journal of Chinese Inertial Technology, 29(03): 288-292+299.
- [6] Yang D., Yu W. (2013) Research on initial alignment for large azimuth misalignment angle with Sage_Husa adaptive filtering. J. Infrared and Laser Engineering, 42(8): 2197-2201.
- [7] Yu, M. J. Comparison of SDINS in-flight alignment using equivalent error models. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 35 (1999), 1046 1054.
- [8] Shin E-H., Estimation Techniques for Low-Cost Inertial Navigation, Ph.D. dissertation, Dept. Geom. Eng., University of Calgary, Calgary, CA, (2005)
- [9] Savage P. G., Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: Attitude Algorithms, J. Guidance, Control, and Dynamics, 21 (1998), No. 1, 19 28
- [10] Savage P. G., Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 2: Velocity and position algorithms, J. Guidance, Control, and Dynamics, 21 (1998), No. 2, 208-221
- [11] Salychov O., Applied Inertial Navigation: Problems and Solutions. ISBN 5-7038-2395-1 : Bauman MSTU Press (2004)
- [12] Farrell, J. A., Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors. McGraw-Hill (2008).



شکل ۱- نتایج تخمین خطای زاویه ϕ



شکل ۲- نتایج تخمین خطای زاویه θ



شکل ۳- نتایج تخمین خطای زاویه ψ

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی روشی برای تخمین خطای انطباق خام پرداخته شد. در ابتدا ماتریسی به کمک خروجی‌های بلوک IMU تشکیل شده و به کمک آن، زوایای تعیین‌کننده وضعیت (زوایای اوپلر) به شکل ایده‌آل محاسبه شدند.

پس از آن به کمک عملگرهای اغتشاش و نیز روابط جبر ماتریسی و تنسوری، اثر خطای حسگرها بررسی شده و بردار خطایی برای زوایای اوپلری

- [13] Zhu R., Zhou Z., A Small Low-Cost Hybrid Orientation System and Its Error Analysis, *IEEE Sensors Journal*, 9 (2009), No. 3, 223-230
- [14] Neul R., Gomez U.-M., Kehr K., Bauer W., Classen J., Doring C., Esch E., Gotz S., Hauer J., Kuhlmann B., Lang C., Veith M., Willig R., Micromachined Angular Rate Sensors for Automotive Applications, *IEEE Sensors Journal*, 7 (2007), No. 2, 302-309
- [15] Abdel-Hamid W., Accuracy Enhancement of Integrated MEMS-IMU/GPS Systems for Land Vehicular Navigation Applications, Ph.D. dissertation, Dept. Geom. Eng., University of Calgary, Calgary, CA, (2005)
- [16] Vadlamani A. K., de Haag M. U., Synthesis of Airborne Laser Measurements for Navigation Algorithms, *IEEE Sensors Journal*, 8 (2008), No. 8, 1411-1412
- [17] Reinstein M., Sipos M., Rohac J., Error Analyses of Attitude and Heading Reference Systems, *Przeglad Elektrotechniczny*, 85 (2009), No. 8, 114-118
- [18] Reinštein M., Rohac J., Sipos M., Algorithms for Heading Determination using Inertial Sensors , *Przeglad Elektrotechniczny* 86 (2010), No. 9, 243-246
- [19] Reinstein, Michal. "Evaluation of fine alignment algorithm for inertial navigation." *Przeglad Elektrotechniczny* 87.7 (2011): 255-258.
- [20] Sotak M., Coarse alignment algorithm for ADIS16405, *Przeglad Elektrotechniczny* 86 (2010), No. 9, 247-251
- [21] Grewal M. S., Andrews A. P., *Kalman Filtering - Theory and Practice using MATLAB*. New York : Wiley-Interscience (2001)
- [22] H. Mohammadkarimi, H. Nobahari, S. M. Esmailifar and S. Mozafari, "A new Analytical Method to improve Attitude correction in Inertial Navigation Systems," *AUT Journal of Modeling and Simulation*, vol. 54, no. 1, June 2022.