آنالیز دقت انطباق اینرسی در حالت سکون

حامد محمدکریمی[۱*]، مهدی مبتکر[۲]، مهسا قاسمی[۳]

۱- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، h.mohammadkarimi@aut.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی هوافضا، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، m.mobtaker@aut.ac.ir

۳- دانشجوی دکتری هوافضا، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، mahsa.ghasemi@aut.ac.ir

*نویسنده مخاطب

چکیده

یکی از مراحل مهم قبل از شروع به کار سامانه ناوبری اینرسی، انطباق اولیه است. در این پژوهش، به بررسی و توسعه روابط انطباق دقیق پرداخته شده‌است. ابتدا، خطای معادلات ناوبری در حالت کلی مدل‌سازی شده و به طور خاص برای شرایط سکون زمینی بازنویسی می‌شود. سپس، به‌منظور کاهش خطای تخمین، معادلات به‌دست‌آمده به دو زیرفضای مشاهده‌پذیر و مشاهده‌ناپذیر تقسیم شده‌است. هدف این پژوهش، براورد دقت الگوریتم انطباق دقیق در هر وضعیت است. به این منظور، به توسعه روابطی پرداخته می‌شود که در آن مولفه‌های وضعیت وسیله مشاهده می‌شود. در ادامه، با استفاده از روابط استخراج‌شده و حذف بایاس تخمین زده‌شده از خروجی حسگرها در دستگاه بدنی، روابط جدیدی برای براورد دقت انطباق به‌دست آمده‌است. در انتها، روابط استخراج‌شده با داده‌های ۵۰ سناریو مختلف اعتبارسنجی شده‌است.

واژه های کلیدی: *ناوبری اینرسی– انطباق اولیه – زیرفضای مشاهده‌پذیر - زیرفضای مشاهده‌ناپذیر – انطباق دقیق*

۱- مقدمه

از ویژگی‌های سیستم ناوبری اینرسی می‌توان به خودگردانی بالا و اختفاء قوی اشاره کرد. از این رو در حامل‌هایی مانند وسایل پرنده بدون سرنشین، راکت‌ها، کشتی‌ها و وسایل نقلیه زمینی استفاده می‌شود[۱و۲]. با پیشرفت سیستم‌های ناوبری اینرسی در زمینه‌های مرتبط، به‌ویژه در زمینه هوافضا، این سیستم‌ها به یک کانون تحقیقاتی مهم تبدیل شده‌اند[۳]. با توسعه تکنولوژی، سیستم ناوبری متصل به بدنه جایگزین سیستم ناوبری اینرسی صفحه‌پایدار شده و تحقیقات وسیعی در این زمینه انجام شده‌است. سیستم‌های ناوبری اینرسی به طور گسترده در سلاح‌ها و تجهیزات نظامی استفاده می‌شود. برای مثال، اطمینان از نقطه زنی دقیق سلاح‌ها و تجهیزات با دقت ناوبری بالا سنجیده می‌شود[۳]. یک مرحله مهم قبل از اینکه سیستم ناوبری اینرسی شروع به کار کند، انطباق اولیه است. دقت انطباق اولیه بر دقت ناوبری تأثیر مستقیم دارد [۴ و ۵]. بنابراین فاز انطباق اولیه یکی از مراحل حیاتی در شروع به کار INS بوده و مستلزم دقت و سرعت بالا است [۶]. الگوریتم انطباق اولیه برای ناوبری اینرسی یک روش ریاضی برای تعیین وضعیت اولیه بین قاب بدنی و قاب ناوبری [۷]، [۸] است. الگوریتم‌های مختلفی برای انطباق اولیه وجود دارد که هر کدام پاسخ‌گوی شرایط خاصی هستند. این الگوریتم‌ها را می‌توان به موارد زیر تقسیم کرد [۹]:

انطباق دقیق/ خام: با توجه به میزان خطای وضعیت.

انطباق استاتیک / در حرکت: با توجه به دینامیک وسیله ناوبری‌شده در روند ناوبری.

انطباق خام سرعت بالایی دارد اما دقت آن کم است. در مقابل، فرایند انطباق دقیق کند است اما دقت آن بالاتر است. در این مقاله، به بررسی انطباق دقیق پرداخته می‌شود. در این مرحله از یک تخمین‌گر، مثلاً فیلتر کالمن، برای افزایش دقت انطباق خام استفاده می‌شود؛ فیلتر طراحی‌شده بر اساس خروجی حسگرها و مدل خطای آن‌ها و همچنین معادلات خطی‌شده ناوبری، انطباق خام را اصلاح می‌کند. سپس اختلاف ماتریس تبدیل تخمین زده‌شده و ماتریس تبدیل واقعی، با بردار انحراف به‌دست آمده و الگوریتم ناوبری اندازه بردار به‌دست‌آمده را حداقل می‌کند.

در مراجع [۱۰] و [۱۱] خطاهای حسگر اینرسی و روش‌های پیشرفته پردازش سیگنال بررسی شده‌است. مرجع [۱۳] در ادامه تحقیقات مرجع [۱۲] است. در این مرجع به بررسی و گسترش مفهوم الگوریتم انطباق خام [۱۲] پرداخته شده‌است. به منظور محاسبه زوایای وضعیت اولیه با استفاده از حسگرهای اینرسی و اندازه‌گیری‌های مغناطیس‌سنج از واحد ADIS16405 یک الگوریتم ارائه شده‌است. الگوریتم انطباق دقیق معرفی شده به منظور بهبود نتایج وضعیت محاسبه‌شده توسط الگوریتم انطباق خام، از فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF)[۱۴] استفاده می‌کند. در این مرجع الگوریتم انطباق خام و دقیق ترکیب شده‌است که منجر به ناوبری اینرسی با دقت بالاتر شده‌است.

یکی از کاربرد های INS در صنایع دریایی است. در ادامه مقالاتی در رابطه با انطباق اولیه تحت شرایط پهلوگیری دریایی بررسی شده‌است.

در شرایط پهلوگیری دریایی، با حرکات خطی و زاویه‌ای وسیله، انطباق INS مختل می‌شود. سامانه INS باید در برابر حرکات تصادفی مانند اختلالات رول، پیچ و یاو و همچنین نوسانات شدید مقاومت کند [۱۵]. به‌عبارتی در طول فرآیند انطباق، شتاب‌ها و سرعت‌های زاویه‌ای اختلالی وجود دارد. از روش‌های متداول انطباق می‌توان به روش حلقه قطب‌نما (compass loop) و روش فیلتر کالمن اشاره کرد. در روش حلقه قطب‌نما که از قطب‌نما برای استفاده می‌کند، وسیله نباید حرکت خطی انجام دهد [۱۶]، بنابراین در شرایط پهلوگیری دریایی که شتاب‌های اختلالی وجود دارد نمی‌توان از این روش استفاده کرد. روش دیگر، روش استاندارد فیلتر کالمن است. این روش از تئوری کنترل مدرن برای تخمین زوایای انطباق استفاده می‌کند. استفاده از این روش برای حرکات خطی و زاویه‌ای امکان پذیر است [۱۷]. شتاب اختلالی و سرعت‌های زاویه‌ای تاثیر مستقیم بر دقت و زمان تخمین دارد [۱۸، ۱۹] و در این حالت مدت زمان تخمین به بیش

از ۲۵ دقیقه افزایش می‌یابد. این یعنی قبل از واردشدن به شرایط کار INS، مدت زمان قابل توجهی صرف انطباق اولیه می‌شود. از آن‌جا که سرعت انتقال اطلاعات ناوبری به وسیله مهم است، بدیهی است که مدت زمان طولانی برای انطباق اولیه قابل قبول نیست. در سال‌های اخیر، انطباق خام برای انطباق INS دریایی معرفی شده‌است. این روش از بردار گرانش بیان شده در قاب اینرسی به‌عنوان مرجع استفاده می‌کند. در مرجع [۲۰] در انطباق خام، به‌منظور محاسبه مقدار دقیق ماتریس وضعیت اولیه بین قاب بدنی و قاب اینرسی، از تصویر بردار گرانش بیان‌شده در قاب اینرسی استفاده شده‌است.

این روش در برابر حرکات تصادفی تحت شرایط پهلوگیری وسیله مقاوم است. علاوه بر این، با توسعه فناوری رایانه ناوبری، یک رایانه ناوبری مدرن می‌تواند داده‌های متعدد IMU (واحد اندازه گیری اینرسی) را ذخیره کند. استفاده از داده‌های ذخیره‌شده IMU طول داده‌های مورد نیاز برای اجرای ناوبری را کاهش می‌دهد [۲۱].

بنابراین می‌توان مدت زمان انطباق اولیه را کاهش داد و یک روش انطباق دقیق با سرعت بالا به‌دست آورد. با توجه به [۲۰] و [۲۱] و ایده استفاده از داده‌های ذخیره‌شده IMU، در [۲۲] با استفاده از تصویر بردار گرانش بیان‌شده در قاب اینرسی، و داده‌های ذخیره‌شده IMU یک روش انطباق INS سریع پیشنهاد شده‌است. از طرفی، استفاده از تصویر گرانش بیان‌شده در قاب اینرسی، با استفاده از فیلتر کالمن، می‌تواند از اثرات شتاب‌های اختلالی و سرعت‌های زاویه‌ای در انطباق INS جلوگیری کند [۲۳].

از سوی دیگر، استفاده مکرر از داده‌های ذخیره‌شده IMU می تواند مدت زمان فرآیند انطباق را کاهش دهد. در این روش، داده‌های IMU در حافظه کامپیوتر ناوبری ذخیره می‌شود. سپس با استفاده از این داده‌ها ماتریس وضعیت اولیه تخمین زده می‌شود، این یعنی از مدت زمان انطباق طولانی اجتناب می‌کنیم. بنابراین، روش پیشنهادی الزامات دقت بالا و انطباق سریع تحت شرایط پهلوگیری دریایی را برآورده می‌کند.

در پژوهش‌های بررسی شده، روابط انطباق دقیق متاثر از بایاس سنسورها است. در پژوهش حاضر، این روابط با توجه به وضعیت وسیله توسعه داده می‌شوند که بنابر اطلاع نویسندگان تا به حال از این رویکرد استفاده نشده‌است. با بهره‌گیری از روابط جدید و حذف بایاس تخمین زده‌شده از خروجی حسگرها در دستگاه بدنی، براورد دقیقی از دقت الگوریتم انطباق اینرسی به‌دست آمده‌است.

ساختار مقاله حاضر به این صورت است: در بخش دوم، به استخراج روابط خطای معادلات متغیرهای ناوبری در حالت کلی و در حالت سکون زمینی پرداخته می‌شود. در بخش سوم، معادلات استخراج‌شده به دو زیرفضای مشاهده‌پذیر و مشاهده‌ناپذیر تقسیم می‌شود. در بخش چهارم، رابطه جدیدی برای دقت نهایی زوایای انطباق و سمت به دست می‌آید. در بخش پنجم، نتایج شبیه‌سازی ارائه شده‌است.

۲- استخراج مدل خطای متغیرهای ناوبری

به‌منظور انطباق دقیق در سیستم ناوبری اینرسی، از فیلترهای تخمین‌گر مانند فیلتر کالمن استفاده می‌شود. از این رو مدل خطای متغیرهای ناوبری استخراج می‌شود. لذا در این بخش، معادلات استفاده‌شده در مسئله انطباق دقیق استخراج شده و در شرایط حالت سکون بازنویسی خواهد شد.

۲-۱- خطای معادله موقعیت

با استفاده از روابط سینماتیکی، معادلات موقعیت در رابطه (۱) بیان شده‌است:

$$\begin{aligned}
\dot{\ell} &= \frac{v_{\mathrm{e}}}{(R_{\mathrm{normal}}+h)\cos\lambda} \\
\dot{\lambda} &= \frac{v_{\mathrm{n}}}{R_{\mathrm{meridian}}+h} \\
\dot{h} &= -v_{\mathrm{d}}
\end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن v_{n}، v_{e} و v_{d} مولفه‌های سرعت وسیله در دستگاه مختصات جغرافیایی (NED) و ℓ، λ، h، R_{meridian} و R_{norm} به ترتیب طول جغرافیایی، عرض جغرافیایی، ارتفاع جسم از سطح زمین، شعاع انحنای زمین در صفحه نصف‌النهار محلی و شعاع انحنای تقاطع صفحه عمود بر نصف‌النهار محلی با سطح زمین است.

با دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۱) و با فرض ناوبری در نزدیک سطح زمین کروی، خطای معادله موقعیت از رابطه (۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\varepsilon\dot{\ell} &\approx \frac{\varepsilon v_{\mathrm{e}}(\mathrm{R_e}\cos\lambda)-(\varepsilon h\cos\lambda-\mathrm{R_e}\sin\lambda\varepsilon\lambda)v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}^2\cos^2\lambda} \\
&= \frac{1}{\mathrm{R_e}\cos\lambda}\varepsilon v_{\mathrm{e}}-\frac{v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}^2\cos\lambda}\varepsilon h+\frac{v_{\mathrm{e}}\sin\lambda}{\mathrm{R_e}\cos^2\lambda}\varepsilon\lambda \\
\varepsilon\dot{\lambda} &\approx \frac{\varepsilon v_{\mathrm{n}}(\mathrm{R_e})-(\varepsilon h)v_{\mathrm{n}}}{\mathrm{R_e}^2}=\frac{1}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{n}}-\frac{v_{\mathrm{n}}}{\mathrm{R_e}^2}\varepsilon h \\
\varepsilon\dot{h} &= -\varepsilon v_{\mathrm{d}}
\end{aligned} \tag{۲}$$

۲-۲- خطای معادله وضعیت

به منظور بررسی خطای معادله وضعیت، دستگاه جغرافیایی NED به‌عنوان دستگاه ناوبری انتخاب شده‌است و $\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}$ تنسور دوران دستگاه ناوبری به تخمین دستگاه ناوبری است، که در رابطه (۳) بیان شده‌است (علامت $\hat{}$ به معنای کمیت محاسبه‌شده‌است) :

$$\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}=\mathbf{E}+\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}} \tag{۳}$$

که در این رابطه $\mathbf{E}$ تنسور یکانی و $\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}$ تنسور شبه متقارن تنسور اغتشاش ($\varepsilon\mathbf{r}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}$) است که در رابطه (۴) مدل شده‌است:

$$[\varepsilon\mathbf{r}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}]^{\hat{\mathrm{N}}}=[\varepsilon\mathbf{r}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}]^{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}\varepsilon\varphi\\ \varepsilon\theta\\ \varepsilon\psi\end{bmatrix} \tag{۴}$$

در این رابطه $\varepsilon\varphi$، $\varepsilon\theta$ و $\varepsilon\psi$ به ترتیب خطای محاسبه زوایای رول، پیچ و یاو است. در رابطه (۵) اغتشاش بردار سرعت زاویه‌ای چهارچوب بدنی نسبت‌به چهارچوب ناوبری بیان شده‌است.

$$\begin{aligned}
\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}} &= \hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{BN}}-\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}}=\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}\hat{\mathrm{N}}}-\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}}=\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}}+\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}\hat{\mathrm{N}}}-\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}} \\
&= \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}\hat{\mathrm{N}}}+\left(\mathbf{E}-\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}\right)\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}}=\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}\hat{\mathrm{N}}}-\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}}
\end{aligned} \tag{۵}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}} &= \left(\mathrm{D}^{\mathrm{N}}\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}\right)\bar{\mathbf{R}}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}=\left(\mathrm{D}^{\mathrm{N}}(\mathbf{E}+\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}})\right)(\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}) \\
&= \mathrm{D}^{\mathrm{N}}\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}-\left(\mathrm{D}^{\mathrm{N}}\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}\right)\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}} \\
&\approx \mathrm{D}^{\mathrm{N}}\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}
\end{aligned} \tag{۶}$$

در نهایت با استفاده از معادلات (۵) و (۶) می‌توان نوشت:

$$\mathrm{D}^{\mathrm{N}}\varepsilon\mathbf{r}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}=-\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}}-\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{\mathrm{N}}\mathrm{N}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{BN}} \tag{۷}$$

سرعت‌های زاویه‌ای از رابطه (۸) به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}^{BN} = \boldsymbol{\omega}^{BI} - \boldsymbol{\omega}^{NE} - \boldsymbol{\omega}^{EI} \\ \varepsilon\boldsymbol{\omega}^{BN} = \varepsilon\boldsymbol{\omega}^{BI} - \varepsilon\boldsymbol{\omega}^{NE} - \varepsilon\boldsymbol{\omega}^{EI} \end{cases} \tag{۸}$$

که در این رابطه، $\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{BI}$ از رابطه (۹) به‌دست می‌آید (علامت $\tilde{}$ به معنای کمیت اندازه‌گیری‌شده است).

$$\begin{aligned} \varepsilon\boldsymbol{\omega}^{BI} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{BI} - \mathbf{R}^{\hat{N}N}\boldsymbol{\omega}^{BI} = (\boldsymbol{\omega}^{BI} + \delta\boldsymbol{\omega}^{BI}) - \mathbf{R}^{\hat{N}N}\boldsymbol{\omega}^{BI} = \\ &(\mathbf{E} - \mathbf{R}^{\hat{N}N})\boldsymbol{\omega}^{BI} + \delta\boldsymbol{\omega}^{BI} = -\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}\boldsymbol{\omega}^{BI} + \delta\boldsymbol{\omega}^{BI} \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن $\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}$ بردار نویزهای جایروهای نرخی است. با جایگذاری روابط (۸) و (۹) در رابطه (۷)، معادله تنسوری وضعیت به‌دست می‌آید که در انطباق دقیق استفاده می‌شود. با بیان عددی این معادله در دستگاه ناوبری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} [D^N\varepsilon\mathbf{r}^{\hat{N}N}]^N &= [\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{NE}]^N + [\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N + [\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^N[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N \\ &+ [\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^N[\boldsymbol{\omega}^{NE}]^N - [\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^N \end{aligned} \tag{۱۰}$$

در ادامه، مولفه‌های سمت راست رابطه (۱۰) بسط داده شده‌است. رابطه (۱۱) بیانگر خطای سرعت زاویه‌ای چهارچوب ناوبری نسبت به چهارچوب زمین، بیان‌شده در چهارچوب ناوبری است.

$$\begin{aligned} [\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{NE}]^N &= [\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{NE}]^{\hat{N}} = [\hat{\boldsymbol{\omega}}^{NE}]^{\hat{N}} - [\boldsymbol{\omega}^{NE}]^N \\ &\approx \begin{bmatrix} -\dfrac{v_e}{R_e^2}\varepsilon h + \dfrac{1}{R_e}\varepsilon v_e \\ \dfrac{v_n}{R_e^2}\varepsilon h - \dfrac{1}{R_e}\varepsilon v_n \\ -\dfrac{v_e\sec^2\lambda}{R_e}\varepsilon\lambda + \dfrac{v_e\tan\lambda}{R_e^2}\varepsilon h - \dfrac{\tan\lambda}{R_e}\varepsilon v_e \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۱}$$

رابطه (۱۲) نشان‌دهنده خطای سرعت زاویه‌ای چهارچوب زمین نسبت به چهارچوب اینرسی، بیان‌شده در دستگاه ناوبری است.

$$\begin{aligned} [\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N &= [\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{EI}]^{\hat{N}} = [\hat{\boldsymbol{\omega}}^{EI}]^{\hat{N}} - [\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N \\ &= \begin{bmatrix} \omega_d\varepsilon\lambda \\ 0 \\ -\omega_n\varepsilon\lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

در ادامه داریم:

$$\begin{aligned} [\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^N[\boldsymbol{\omega}^{EI}]^N &= \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon\psi & \varepsilon\theta \\ \varepsilon\psi & 0 & -\varepsilon\varphi \\ -\varepsilon\theta & \varepsilon\varphi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega^{EI}\cos\lambda \\ 0 \\ -\omega^{EI}\sin\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon\psi & \varepsilon\theta \\ \varepsilon\psi & 0 & -\varepsilon\varphi \\ -\varepsilon\theta & \varepsilon\varphi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_n \\ 0 \\ \omega_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_d\varepsilon\theta \\ \omega_n\varepsilon\psi - \omega_d\varepsilon\varphi \\ -\omega_n\varepsilon\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

$$[\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^N[\boldsymbol{\omega}^{NE}]^N \approx \begin{bmatrix} \dfrac{v_n}{R_e}\varepsilon\psi - \dfrac{v_e\tan\lambda}{R_e}\varepsilon\theta \\ \dfrac{v_e}{R_e}\varepsilon\psi + \dfrac{v_e\tan\lambda}{R_e}\varepsilon\varphi \\ -\dfrac{v_e}{R_e}\varepsilon\theta - \dfrac{v_n}{R_e}\varepsilon\varphi \end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

بردار نویز جایروهای نرخی، بیان‌شده در دستگاه ناوبری:

$$[\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^N = [T]^{NB}[\delta\boldsymbol{\omega}^{BI}]^B = \begin{bmatrix} T_{11}^{NB}\delta\omega_x + T_{12}^{NB}\delta\omega_y + T_{13}^{NB}\delta\omega_z \\ T_{21}^{NB}\delta\omega_x + T_{22}^{NB}\delta\omega_y + T_{23}^{NB}\delta\omega_z \\ T_{31}^{NB}\delta\omega_x + T_{32}^{NB}\delta\omega_y + T_{33}^{NB}\delta\omega_z \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

درنهایت با جایگذاری روابط (۱۱) تا (۱۵) در رابطه (۱۰)، خطای معادلات وضعیت در رابطه (۱۶) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{\varphi} &= \omega_d\varepsilon\lambda - \frac{v_e}{R_e^2}\varepsilon h + \frac{1}{R_e}\varepsilon v_e + (\omega_d - \frac{v_e\tan\lambda}{R_e})\varepsilon\theta \\ &+ \frac{v_n}{R_e}\varepsilon\psi - T_{11}^{NB}\delta\omega_x - T_{12}^{NB}\delta\omega_y - T_{13}^{NB}\delta\omega_z \\ \varepsilon\dot{\theta} &= \frac{v_n}{R_e^2}\varepsilon h - \frac{1}{R_e}\varepsilon v_n + (\frac{v_e\tan\lambda}{R_e} - \omega_d)\varepsilon\varphi + \\ &(\omega_n + \frac{v_e}{R_e})\varepsilon\psi - T_{21}^{NB}\delta\omega_x - T_{22}^{NB}\delta\omega_y - T_{23}^{NB}\delta\omega_z \\ \varepsilon\dot{\psi} &= -(\omega_n + \frac{v_e\sec^2\lambda}{R_e})\varepsilon\lambda + \frac{v_e\tan\lambda}{R_e^2}\varepsilon h - \frac{\tan\lambda}{R_e}\varepsilon v_e \\ &- \frac{v_n}{R_e}\varepsilon\varphi - (\omega_n + \frac{v_e}{R_e})\varepsilon\theta - T_{31}^{NB}\delta\omega_x - T_{32}^{NB}\delta\omega_y - T_{33}^{NB}\delta\omega_z \end{aligned} \tag{۱۶}$$

۲-۲- خطای معادله سرعت

با توجه به قانون دوم نیوتن، معادله سرعت به‌دست می‌آید:

$$D^N\mathbf{v}_B^E = \mathbf{f} + \mathbf{g} - (2\boldsymbol{\Omega}^{EI} + \boldsymbol{\Omega}^{NE})\mathbf{v}_B^E \tag{۱۷}$$

که در آن $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ به ترتیب بیانگر نیروی مخصوص غیرجاذبی و شتاب گرانش محلی است. با دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۱۷) داریم:

$$D^N\varepsilon\mathbf{v}_B^E = \varepsilon\mathbf{f} + \varepsilon\mathbf{g} - (2\varepsilon\boldsymbol{\Omega}^{EI} + \varepsilon\boldsymbol{\Omega}^{NE})\mathbf{v}_B^E - (2\boldsymbol{\Omega}^{EI} + \boldsymbol{\Omega}^{NE})\varepsilon\mathbf{v}_B^E \tag{۱۸}$$

داریم: برای بردار $\varepsilon\mathbf{f}$

$$\begin{aligned} \varepsilon\mathbf{f} &= \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{R}^{\hat{N}N}\mathbf{f} = (\mathbf{f} + \delta\mathbf{f}) - \mathbf{R}^{\hat{N}N}\mathbf{f} \\ &= \delta\mathbf{f} + (\mathbf{E} - \mathbf{R}^{\hat{N}N})\mathbf{f} = \delta\mathbf{f} - \varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}\mathbf{f} \end{aligned} \tag{۱۹}$$

در این رابطه، $\delta\mathbf{f}$ نویز شتاب‌سنج‌ها است. با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۱۸) و بیان معادله در دستگاه ناوبری، رابطه (۲۰) استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned} [D^N\varepsilon\mathbf{v}_B^E]^N &= [\delta\mathbf{f}]^N - [\varepsilon\mathbf{R}^{\hat{N}N}]^N[\mathbf{f}]^N + [\varepsilon\mathbf{g}]^N \\ &- \left[2[\varepsilon\boldsymbol{\Omega}^{EI}]^N + [\varepsilon\boldsymbol{\Omega}^{NE}]^N\right][\mathbf{v}_B^E]^N - \left[2[\boldsymbol{\Omega}^{EI}]^N + [\boldsymbol{\Omega}^{NE}]^N\right][\varepsilon\mathbf{v}_B^E]^N \end{aligned} \tag{۲۰}$$

در ادامه به بسط عبارت‌های موجود در رابطه (۲۰) خواهیم پرداخت.

$$[\delta\mathbf{f}]^N = [T]^{NB}[\delta\mathbf{f}]^B = \begin{bmatrix} T_{11}^{NB} & T_{12}^{NB} & T_{13}^{NB} \\ T_{21}^{NB} & T_{22}^{NB} & T_{23}^{NB} \\ T_{31}^{NB} & T_{32}^{NB} & T_{33}^{NB} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta f_x \\ \delta f_y \\ \delta f_z \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

$$[\mathbf{f}]^N = [T]^{NB}[\mathbf{f}]^B = \begin{bmatrix} T_{11}^{NB} & T_{12}^{NB} & T_{13}^{NB} \\ T_{21}^{NB} & T_{22}^{NB} & T_{23}^{NB} \\ T_{31}^{NB} & T_{32}^{NB} & T_{33}^{NB} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n \\ f_e \\ f_d \end{bmatrix} \tag{۲۲}$$

$$[\varepsilon\mathbf{g}]^{\hat{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{g} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g + \delta g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta g \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

رابطه (۲۳)، بیانگر اغتشاش بردار گرانش است.

$$[\varepsilon\boldsymbol{\Omega}^{EI}]^N = \begin{bmatrix} 0 & \omega_n\varepsilon\lambda & 0 \\ -\omega_n\varepsilon\lambda & 0 & -\omega_d\varepsilon\lambda \\ 0 & \omega_d\varepsilon\lambda & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

در رابطه (۲۴)، تنسور اغتشاش تنسور سرعت زاویه‌ای چهارچوب زمین نسبت به چهارچوب اینرسی در دستگاه ناوبری بیان شده‌است.

$$[\boldsymbol{\Omega}^{EI}]^N = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_d & 0 \\ \omega_d & 0 & -\omega_n \\ 0 & \omega_n & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۵}$$

$$[\varepsilon\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{NE}}]^{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}-\dfrac{v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}^2}\varepsilon h+\dfrac{1}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{e}}\\ \dfrac{v_{\mathrm{n}}}{\mathrm{R_e}^2}\varepsilon h-\dfrac{1}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{n}}\\ -\dfrac{v_{\mathrm{e}}\sec^2\lambda}{\mathrm{R_e}}\varepsilon\lambda+\dfrac{v_{\mathrm{e}}\tan\lambda}{\mathrm{R_e}^2}\varepsilon h-\dfrac{\tan\lambda}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{e}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

$$\to[\varepsilon\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{NE}}]^{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}$$

در رابطه (۲۶) نیز تنسور سرعت اغتشاش تنسور سرعت زاویه‌ای چهارچوب جغرافیایی(ناوبری) نسبت به چهارچوب زمین در دستگاه ناوبری بیان شده است.

$$[\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{NE}}]^{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}}\tan\lambda & -\dfrac{v_{\mathrm{n}}}{\mathrm{R_e}}\\ -\dfrac{v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}}\tan\lambda & 0 & -\dfrac{v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}}\\ \dfrac{v_{\mathrm{n}}}{\mathrm{R_e}} & \dfrac{v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}} & 0\end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۲۱) تا (۲۷) در رابطه (۲۰)، خطای معادلات سرعت به صورت رابطه (۲۸) استخراج می‌شود.

(۲۸)

$$\begin{aligned}
\varepsilon\dot{v}_{\mathrm{n}}&=\mathrm{T}_{11}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{12}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{13}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{z}}-(\frac{{v_{\mathrm{e}}}^2\sec^2\lambda}{\mathrm{R_e}}+2\omega_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{e}})\varepsilon\lambda\\
&+\frac{({v_{\mathrm{e}}}^2\tan\lambda-v_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{d}})}{\mathrm{R_e}^2}\varepsilon h+\frac{v_{\mathrm{d}}}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{n}}+(2\omega_{\mathrm{d}}-\frac{2v_{\mathrm{e}}\tan\lambda}{\mathrm{R_e}})\varepsilon v_{\mathrm{e}}\\
&+\frac{v_{\mathrm{n}}}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{d}}+f_{\mathrm{e}}\varepsilon\psi-f_{\mathrm{d}}\varepsilon\theta\\
\varepsilon\dot{v}_{\mathrm{e}}&=\mathrm{T}_{21}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{22}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{23}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{z}}+(\frac{v_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{n}}\sec^2\lambda}{\mathrm{R_e}}+2\omega_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}}+2\omega_{\mathrm{d}}v_{\mathrm{d}})\varepsilon\lambda\\
&-\frac{(v_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{n}}\tan\lambda+v_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{d}})}{\mathrm{R_e}^2}\varepsilon h+(\frac{v_{\mathrm{e}}\tan\lambda}{\mathrm{R_e}}-2\omega_{\mathrm{d}})\varepsilon v_{\mathrm{n}}+\frac{(v_{\mathrm{n}}\tan\lambda+v_{\mathrm{d}})}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{e}}\\
&+(\frac{v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}}+2\omega_{\mathrm{n}})\varepsilon v_{\mathrm{d}}-f_{\mathrm{n}}\varepsilon\psi+f_{\mathrm{d}}\varepsilon\varphi\\
\varepsilon\dot{v}_{\mathrm{d}}&=\mathrm{T}_{31}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{32}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{33}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{z}}+\delta\mathrm{g}-2\omega_{\mathrm{d}}v_{\mathrm{e}}\varepsilon\lambda+\frac{({v_{\mathrm{e}}}^2+{v_{\mathrm{n}}}^2)}{\mathrm{R_e}^2}\varepsilon h\\
&-\frac{2v_{\mathrm{n}}}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{n}}-(\frac{2v_{\mathrm{e}}}{\mathrm{R_e}}+2\omega_{\mathrm{n}})\varepsilon v_{\mathrm{e}}+f_{\mathrm{n}}\varepsilon\theta-f_{\mathrm{e}}\varepsilon\varphi
\end{aligned}$$

۲-۴- معادلات خطا در حالت سکون زمینی

در بخش‌های قبلی معادلات کلی خطای متغیرهای ناوبری استخراج شد. در این بخش معادلات استخراج‌شده را برای انطباق زمینی بازنویسی می‌کنیم.

در انطباق زمینی، موقعیت وسیله نسبت به زمین مفروض است؛ بنابرین می‌توانیم از متغیرهای موقعیت ($\varepsilon\lambda$ و εh) صرف نظر کنیم. همچنین فرض می‌کنیم که خطاهای بایاس ثابت، فاکتور مقیاس و عدم هم‌محوری ، طی فرایند کالیبراسیون حذف شده‌اند. لذا δf و $\delta\omega$ معرف نویز سفید حسگرهای اینرسی خواهند بود. همچنین فرض می‌کنیم بایاس شتاب‌سنج‌ها و دریفت ژیروسکوپ‌ها ثابت بوده و تصاویر آنها در دستگاه ناوبری به صورت رابطه (۲۹) نمایش داده می‌شوند.

$$\begin{bmatrix}\mathrm{b_n}\\ \mathrm{b_e}\\ \mathrm{b_d}\end{bmatrix}=[\mathrm{T}]^{\mathrm{NB}}\begin{bmatrix}\mathrm{b_x}\\ \mathrm{b_y}\\ \mathrm{b_z}\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}\mathrm{d_n}\\ \mathrm{d_e}\\ \mathrm{d_d}\end{bmatrix}=[\mathrm{T}]^{\mathrm{NB}}\begin{bmatrix}\mathrm{d_x}\\ \mathrm{d_y}\\ \mathrm{d_z}\end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

در ادامه با اعمال شرایط سکون زمینی ($[\bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{E}}]^{\mathrm{N}}=[0\quad 0\quad 0]$، $[\bar{\mathbf{f}}]^{\mathrm{N}}=[-\bar{\mathbf{g}}]^{\mathrm{N}}=[0\quad 0\quad -\mathrm{g}]$) و همچنین فرضیات مطرح‌شده، خطای معادلات متغیرهای ناوبری در حالت سکون زمینی به‌دست می‌آید. قبل از ورود به بازنویسی معادلات، تعاریف زیر را مطرح می‌کنیم:

(۳۰)

$$\begin{bmatrix}\mathrm{T}_{11}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{12}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{13}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{z}}\\ \mathrm{T}_{21}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{22}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{23}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{z}}\\ \mathrm{T}_{31}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{32}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{33}^{\mathrm{NB}}\delta f_{\mathrm{z}}\end{bmatrix}=[\mathrm{T}]^{\mathrm{NB}}\begin{bmatrix}\delta f_{\mathrm{x}}\\ \delta f_{\mathrm{y}}\\ \delta f_{\mathrm{z}}\end{bmatrix}=[\mathrm{T}]^{\mathrm{NB}}\begin{bmatrix}\mathrm{b_x}+w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{a}}\\ \mathrm{b_y}+w_{\mathrm{y}}^{\mathrm{a}}\\ \mathrm{b_z}+w_{\mathrm{z}}^{\mathrm{a}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{b_n}+w_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}\\ \mathrm{b_e}+w_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}\\ \mathrm{b_d}+w_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}}\end{bmatrix}$$

(۳۱)

$$\begin{bmatrix}\mathrm{T}_{11}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{12}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{13}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{z}}\\ \mathrm{T}_{21}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{22}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{23}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{z}}\\ \mathrm{T}_{31}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{x}}+\mathrm{T}_{32}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{y}}+\mathrm{T}_{33}^{\mathrm{NB}}\delta\omega_{\mathrm{z}}\end{bmatrix}=[\mathrm{T}]^{\mathrm{NB}}\begin{bmatrix}\delta\omega_{\mathrm{x}}\\ \delta\omega_{\mathrm{y}}\\ \delta\omega_{\mathrm{z}}\end{bmatrix}=[\mathrm{T}]^{\mathrm{NB}}\begin{bmatrix}\mathrm{d_x}+w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{g}}\\ \mathrm{d_y}+w_{\mathrm{y}}^{\mathrm{g}}\\ \mathrm{d_z}+w_{\mathrm{z}}^{\mathrm{g}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{d_n}+w_{\mathrm{n}}^{\mathrm{g}}\\ \mathrm{d_e}+w_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}\\ \mathrm{d_d}+w_{\mathrm{d}}^{\mathrm{g}}\end{bmatrix}$$

حال معادلات را به این صورت بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\dot{v}_{\mathrm{n}}&=\mathrm{b_n}+w_{\mathrm{n}}^{\mathrm{a}}+2\omega_{\mathrm{d}}\varepsilon v_{\mathrm{e}}+\mathrm{g}\varepsilon\theta\\
\varepsilon\dot{v}_{\mathrm{e}}&=\mathrm{b_e}+w_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}-2\omega_{\mathrm{d}}\varepsilon v_{\mathrm{n}}-\mathrm{g}\varepsilon\varphi\\
\varepsilon\dot{v}_{\mathrm{d}}&=\mathrm{b_d}+w_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}}-2\omega_{\mathrm{n}}\varepsilon v_{\mathrm{e}}\\
\varepsilon\dot{\varphi}&=-\mathrm{d_n}-w_{\mathrm{n}}^{\mathrm{g}}+\frac{1}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{e}}+\omega_{\mathrm{d}}\varepsilon\theta\\
\varepsilon\dot{\theta}&=-\mathrm{d_e}-w_{\mathrm{e}}^{\mathrm{g}}-\frac{1}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{n}}-\omega_{\mathrm{d}}\varepsilon\varphi+\omega_{\mathrm{n}}\varepsilon\psi\\
\varepsilon\dot{\psi}&=-\mathrm{d_d}-w_{\mathrm{d}}^{\mathrm{g}}-\frac{\tan\lambda}{\mathrm{R_e}}\varepsilon v_{\mathrm{e}}-\omega_{\mathrm{n}}\varepsilon\theta\\
\dot{\mathrm{b}}_{\mathrm{n}}&=\dot{\mathrm{b}}_{\mathrm{e}}=\dot{\mathrm{b}}_{\mathrm{d}}=\dot{\mathrm{d}}_{\mathrm{n}}=\dot{\mathrm{d}}_{\mathrm{e}}=\dot{\mathrm{d}}_{\mathrm{d}}=0
\end{aligned} \quad (۳۲)$$

۳- تصویر معادلات در فضاهای مشاهده‌پذیر و مشاهده‌ناپذیر

در این بخش معادلات ناوبری در حالت سکون به دو زیرفضای مشاهده‌پذیر و مشاهده‌ناپذیر تقسیم می‌شوند. بنابر نظر مرجع [۲۴] خطای تخمین در زیرفضای مشاهده‌پذیر، از نظر تئوری می‌تواند به صفر میل کند؛ لذا استفاده از این زیرفضا موجب افزایش دقت تخمین می‌شود.

اکنون معادلات (۳۲) را به صورت فضای حالت می‌نویسیم:

$$\dot{\overline{\varepsilon\mathbf{x}}}=\mathbf{A}\varepsilon\mathbf{x}+\mathbf{G}\mathbf{w} \quad (۳۳)$$

$$\varepsilon\mathbf{x}=[\varepsilon v_{\mathrm{n}}\quad\varepsilon v_{\mathrm{e}}\quad\varepsilon v_{\mathrm{d}}\quad\varepsilon\varphi\quad\varepsilon\theta\quad\varepsilon\psi\quad\mathrm{b_n}\quad\mathrm{b_e}\quad\mathrm{b_d}\quad\mathrm{d_n}\quad\mathrm{d_e}\quad\mathrm{d_d}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{w}=[w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{a}}\quad w_{\mathrm{y}}^{\mathrm{a}}\quad w_{\mathrm{z}}^{\mathrm{a}}\quad w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{g}}\quad w_{\mathrm{y}}^{\mathrm{g}}\quad w_{\mathrm{z}}^{\mathrm{g}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
0 & 2\omega_{\mathrm{d}} & 0 & 0 & \mathrm{g} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-2\omega_{\mathrm{d}} & 0 & 0 & -\mathrm{g} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -2\omega_{\mathrm{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1/\mathrm{R_e} & 0 & 0 & \omega_{\mathrm{d}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
-1/\mathrm{R_e} & 0 & 0 & -\omega_{\mathrm{d}} & 0 & \omega_{\mathrm{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & -\tan\lambda/\mathrm{R_e} & 0 & 0 & -\omega_{\mathrm{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$
\mathbf{G}=\begin{bmatrix}
T_{11}^{NB} & T_{12}^{NB} & T_{13}^{NB} & 0 & 0 & 0\\
T_{21}^{NB} & T_{22}^{NB} & T_{23}^{NB} & 0 & 0 & 0\\
T_{31}^{NB} & T_{32}^{NB} & T_{33}^{NB} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -T_{11}^{NB} & -T_{12}^{NB} & -T_{13}^{NB}\\
0 & 0 & 0 & -T_{21}^{NB} & -T_{22}^{NB} & -T_{23}^{NB}\\
0 & 0 & 0 & -T_{31}^{NB} & -T_{32}^{NB} & -T_{33}^{NB}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

با تولید ماتریس مشاهده‌پذیری مشخص می‌شود که مرتبه این ماتریس ۹ است. برای تفکیک زیرفضاها لازم است تا ۹ سطر از ماتریس مشاهده‌پذیری را با سه سطر دلخواه دیگر ترکیب کرده و یک ماتریس مربعی به ابعاد ۱۲ (برابر با تعداد متغیرهای فیلتر) تولید کنیم، به‌گونه‌ای که مرتبه ماتریس تولیدشده برابر با ۱۲ شده و یک ماتریس همانندی تشکیل شود. با ضرب ماتریس همانندی تشکیل شده در بردار متغیرهای حالت، فضا به دو زیرفضای مشاهده‌پذیر و مشاهده‌ناپذیر تقسیم خواهد شد. در اینجا ماتریس $\mathbf{T}$ به عنوان ماتریس همانندی در نظر گرفته شده است.

(۳۴)

$$
\mathbf{T}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2\omega_d & 0 & 0 & g & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-2\omega_d & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -2\omega_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1/R_e & 0 & 0 & \omega_d & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
-1/R_e & 0 & 0 & -\omega_d & 0 & \omega_n & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & -\tan\lambda/R_e & 0 & 0 & -\omega_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

با ضرب ماتریس همانندی معرفی شده در بردار متغیرهای حالت ($\varepsilon\mathbf{x}$)، فضا به دو زیرفضای مشاهده‌پذیر و مشاهده‌ناپذیر تقسیم می‌شود. با انجام این کار خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}_{12\times1}=\mathbf{T}_{12\times12}\varepsilon\mathbf{x}_{12\times1}\\
&\mathbf{y}_1=\varepsilon v_n\\
&\mathbf{y}_2=\varepsilon v_e\\
&\mathbf{y}_3=\varepsilon v_d\\
&\mathbf{y}_4=b_n+g\varepsilon\theta+2\omega_d\varepsilon v_e\\
&\mathbf{y}_5=b_e-g\varepsilon\varphi-2\omega_d\varepsilon v_n\\
&\mathbf{y}_6=b_d-2\omega_n\varepsilon v_e\\
&\mathbf{y}_7=-d_n+\omega_d\varepsilon\theta+\varepsilon v_e/R_e\\
&\mathbf{y}_8=-d_e+\omega_n\varepsilon\psi-\omega_d\varepsilon\varphi-\varepsilon v_n/R_e\\
&\mathbf{y}_9=-d_d-\omega_n\varepsilon\theta-\tan\lambda\,\varepsilon v_e/R_e\\
&\mathbf{y}_{10}=b_e\\
&\mathbf{y}_{11}=d_e\\
&\mathbf{y}_{12}=d_d
\end{aligned}
\qquad (۳۵)
$$

در فضای جدید $\mathbf{y}_1$ تا $\mathbf{y}_9$ در زیرفضای مشاهده‌پذیر هستند و $\mathbf{y}_{10}$ تا $\mathbf{y}_{12}$ در زیرفضای مشاهده‌ناپذیر قرار دارند. حال می‌خواهیم معادلات حالت در فضای جدید را بدست بیاوریم. به این منظور خواهیم داشت:

$$
\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{y}+\mathbf{TGw}=\mathbf{Ly}+\mathbf{Mw} \qquad (۳۶)
$$

با انجام محاسبات، ماتریس های $\mathbf{L}$ و $\mathbf{M}$ بدست خواهند آمد. حال با استفاده از سه معادله اول فضای مشاهده‌پذیر، شش معادله بعدی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}_4-2\omega_d\mathbf{y}_2=b_n+g\varepsilon\theta\\
&\mathbf{y}_5+2\omega_d\mathbf{y}_1=b_e-g\varepsilon\varphi\\
&\mathbf{y}_6+2\omega_n\mathbf{y}_2=b_d\\
&\mathbf{y}_7-\mathbf{y}_2/R_e=-d_n+\omega_d\varepsilon\theta\\
&\mathbf{y}_8+\mathbf{y}_1/R_e=-d_e+\omega_n\varepsilon\psi-\omega_d\varepsilon\varphi\\
&\mathbf{y}_9+\tan\lambda\,\mathbf{y}_2/R_e=-d_d-\omega_n\varepsilon\theta
\end{aligned}
\qquad (۳۷)
$$

در روابط فوق، سمت چپ معادلات معلوم هستند؛ در سمت راست این ۶ معادله، ۹ مجهول وجود دارد که می‌بایست تخمین زده شوند.

۴- محاسبه دقت نهایی

در این قسمت دقت غیرقابل دسترس الگوریتم محاسبه می‌شود؛ برای این کار فرض می‌شود که فیلتر ایده‌آل است. با توجه به رابطه (۳۷) داریم:

$$
\begin{aligned}
&b_d=\mathbf{y}_6+2\omega_n\mathbf{y}_2\\
&\varepsilon\theta=\frac{\mathbf{y}_4-2\omega_d\mathbf{y}_2-b_n}{g}\quad (b_n=0)\\
&d_n=-\mathbf{y}_7+\mathbf{y}_2/R_e+\omega_d\varepsilon\theta\\
&d_d=-\mathbf{y}_9-\tan\lambda\,\mathbf{y}_2/R_e-\omega_n\varepsilon\theta\\
&\varepsilon\varphi=\frac{-\mathbf{y}_5-2\omega_d\mathbf{y}_1+b_e}{g}\quad (b_e=0)\\
&\varepsilon\psi=\frac{\mathbf{y}_8+\mathbf{y}_1/R_e+\omega_d\varepsilon\varphi+d_e}{\omega_n}\quad (d_e=0)
\end{aligned}
\qquad (۳۸)
$$

۴-۱- دقت نهایی زوایای تراز

برای ادامه کار تخمین بایاس حسگرها را با علامت ^ نمایش می‌دهیم. از تخمین بایاس در دستگاه ناوبری (توسط فیلتر)، تخمین مقادیر بایاس در دستگاه بدنی، مطابق رابطه (۳۹) به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\hat{b}_x\\ \hat{b}_y\\ \hat{b}_z\end{bmatrix}&=[T]^{BN}\begin{bmatrix}0\\0\\b_d\end{bmatrix}=[T]^{BN}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\T_{31}^{NB}&T_{32}^{NB}&T_{33}^{NB}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}T_{11}^{BN}&T_{12}^{BN}&T_{13}^{BN}\\T_{21}^{BN}&T_{22}^{BN}&T_{23}^{BN}\\T_{31}^{BN}&T_{32}^{BN}&T_{33}^{BN}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\T_{13}^{BN}&T_{23}^{BN}&T_{33}^{BN}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}(T_{13}^{BN})^2&T_{13}^{BN}T_{23}^{BN}&T_{13}^{BN}T_{33}^{BN}\\T_{23}^{BN}T_{13}^{BN}&(T_{23}^{BN})^2&T_{23}^{BN}T_{33}^{BN}\\T_{33}^{BN}T_{13}^{BN}&T_{33}^{BN}T_{23}^{BN}&(T_{33}^{BN})^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (۳۹)
$$

می‌دانیم که $[T]^{BN}$ به صورت زیر است:

(۴۰)

$$
[T]^{BN}=\begin{bmatrix}
\cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta\\
\cos\psi\sin\theta\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi\\
\cos\psi\sin\theta\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi
\end{bmatrix}
$$

با جایگذاری رابطه (۴۰) در رابطه (۳۹) خواهیم داشت:

(۴۱)

$$
\begin{bmatrix}\hat{b}_x\\ \hat{b}_y\\ \hat{b}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
\sin^2\theta & -0.5\sin2\theta\sin\varphi & -0.5\sin2\theta\cos\varphi\\
-0.5\sin2\theta\sin\varphi & \cos^2\theta\sin^2\varphi & 0.5\cos^2\theta\sin2\varphi\\
-0.5\sin2\theta\cos\varphi & 0.5\cos^2\theta\sin2\varphi & \cos^2\theta\cos^2\varphi
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}
$$

در این مرحله سعی در حذف بایاس تخمین زده‌شده از خروجی حسگرها (در دستگاه بدنی) داریم:

$$\begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{k} - \begin{bmatrix} \hat{b}_{\mathrm{x}} \\ \hat{b}_{\mathrm{y}} \\ \hat{b}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{k} = \mathbf{E}^{k} \begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{0} ; \quad k = 0,1,2,... \tag{۴۲}$$

$$\mathbf{E}^{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin^2\theta & -0.5\sin 2\theta\sin\varphi & -0.5\sin 2\theta\cos\varphi \\ -0.5\sin 2\theta\sin\varphi & \cos^2\theta\sin^2\varphi & 0.5\cos^2\theta\sin 2\varphi \\ -0.5\sin 2\theta\cos\varphi & 0.5\cos^2\theta\sin 2\varphi & \cos^2\theta\cos^2\varphi \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که ماتریس $\mathbf{E}^k$ با افزایش k به سرعت همگرا می‌شود؛ به طوریکه داریم:

(۴۳)

$$\mathbf{E}^{k} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & 0.5\sin 2\theta\sin\varphi & 0.5\sin 2\theta\cos\varphi \\ 0.5\sin 2\theta\sin\varphi & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\theta & -0.5\cos^2\theta\sin 2\varphi \\ 0.5\sin 2\theta\cos\varphi & -0.5\cos^2\theta\sin 2\varphi & 1-\cos^2\theta\cos^2\varphi \end{bmatrix}; \quad k = 2,3,4,...$$

با جایگذاری رابطه (۴۳) در رابطه (۴۲) خواهیم داشت:

(۴۴)

$$\begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{k} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & 0.5\sin 2\theta\sin\varphi & 0.5\sin 2\theta\cos\varphi \\ 0.5\sin 2\theta\sin\varphi & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\theta & -0.5\cos^2\theta\sin 2\varphi \\ 0.5\sin 2\theta\cos\varphi & -0.5\cos^2\theta\sin 2\varphi & 1-\cos^2\theta\cos^2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{0}; \quad k = 3,4,...$$

عبارت فوق به این معناست که با گذشت زمان (چند تکرار فیلتر ایده‌آل)، مقدار نهایی بایاس باقی‌مانده به‌دست می‌آید. این بایاس باقی‌مانده، قابل حذف نبوده و به بایاس سنسور و وضعیت جسم بستگی دارد. با داشتن بایاس باقی‌مانده در دستگاه بدنی می‌توان بایاس باقی‌مانده در دستگاه ناوبری را محاسبه کرد. در نهایت با استفاده از رابطه (۴۰) و (۴۴) خواهیم داشت:

(۴۵)

$$\begin{bmatrix} b_{\mathrm{n}} \\ b_{\mathrm{e}} \\ b_{\mathrm{d}} \end{bmatrix}_{k} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{0} ; k = 3,4,...$$

با استفاده از رابطه فوق و معادلات استحراج شده برای $\varepsilon\varphi$ و $\varepsilon\theta$ در روابط (۳۸) خواهیم داشت:

(۴۶)

$$\varepsilon\varphi\big|_{\min} = \frac{\begin{Bmatrix} +(\sin\psi\cos\theta)b_{\mathrm{x}} + (\sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi)b_{\mathrm{y}} \\ +(\sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi)b_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix}}{\mathrm{g}}$$

(۴۷)

$$\varepsilon\theta\big|_{\min} = -\frac{\begin{Bmatrix} +(\cos\psi\cos\theta)b_{\mathrm{x}} + (\cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi)b_{\mathrm{y}} \\ +(\cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi)b_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix}}{\mathrm{g}}$$

روابط (۴۶) و (۴۷) بیانگر دقت نهایی تخمین زوایای تراز می‌باشند.

۴-۱- دقت نهایی زاویه سمت

مشابه بخش قبلی، پس از تخمین دریفت ژیروسکوپ‌ها به این صورت عمل می‌کنیم:

(۴۸)

$$\begin{bmatrix} \hat{d}_{\mathrm{x}} \\ \hat{d}_{\mathrm{y}} \\ \hat{d}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = [\mathrm{T}]^{\mathrm{BN}} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{n}} \\ 0 \\ d_{\mathrm{d}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{12}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{13}^{\mathrm{BN}} \\ \mathrm{T}_{21}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{22}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{23}^{\mathrm{BN}} \\ \mathrm{T}_{31}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{32}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{33}^{\mathrm{BN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{21}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{31}^{\mathrm{BN}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{T}_{13}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{23}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{33}^{\mathrm{BN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (\mathrm{T}_{11}^{\mathrm{BN}})^2 + (\mathrm{T}_{13}^{\mathrm{BN}})^2 & \mathrm{T}_{11}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{21}^{\mathrm{BN}} + \mathrm{T}_{13}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{23}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{11}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{31}^{\mathrm{BN}} + \mathrm{T}_{13}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{33}^{\mathrm{BN}} \\ \mathrm{T}_{21}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{11}^{\mathrm{BN}} + \mathrm{T}_{23}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{13}^{\mathrm{BN}} & (\mathrm{T}_{21}^{\mathrm{BN}})^2 + (\mathrm{T}_{23}^{\mathrm{BN}})^2 & \mathrm{T}_{21}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{31}^{\mathrm{BN}} + \mathrm{T}_{23}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{33}^{\mathrm{BN}} \\ \mathrm{T}_{31}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{11}^{\mathrm{BN}} + \mathrm{T}_{33}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{13}^{\mathrm{BN}} & \mathrm{T}_{31}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{21}^{\mathrm{BN}} + \mathrm{T}_{33}^{\mathrm{BN}}\mathrm{T}_{23}^{\mathrm{BN}} & (\mathrm{T}_{31}^{\mathrm{BN}})^2 + (\mathrm{T}_{33}^{\mathrm{BN}})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

اکنون می‌خواهیم دریفت تخمین‌زده‌شده را از خروجی حسگرها حذف کنیم:

(۴۹)

$$\begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{k} - \begin{bmatrix} \hat{d}_{\mathrm{x}} \\ \hat{d}_{\mathrm{y}} \\ \hat{d}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{k} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \mathbf{C} \right\} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{0} = \mathbf{E}^{k} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{0} ; \quad k = 0,1,2,...$$

مشاهده می‌شود که ماتریس $\mathbf{E}^k$ با افزایش k به‌سرعت همگرا می‌شود. به‌عبارت دیگر با گذشت زمان (دو تکرار فیلتر ایده‌آل و یا چندین تکرار فیلتر غیرایده‌آل)، مقدار نهایی دریفت باقی‌مانده بدست می‌آید. این دریفت باقی مانده، قابل حذف نبوده و به دریفت سنسور و وضعیت جسم بستگی دارد. با داشتن دریفت باقی‌مانده در دستگاه بدنی می‌توان دریفت باقی‌مانده در دستگاه ناوبری را محاسبه کرد.

(۵۰)

$$\begin{bmatrix} d_{\mathrm{n}} \\ d_{\mathrm{e}} \\ d_{\mathrm{d}} \end{bmatrix}_{k+1} = [\mathrm{T}]^{\mathrm{NB}} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{k+1} = [\mathrm{T}]^{\mathrm{NB}} \mathbf{E}^{k} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{0} = \mathbf{D}_{k} \begin{bmatrix} d_{\mathrm{x}} \\ d_{\mathrm{y}} \\ d_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}_{0} ; \quad k = 0,1,2,...$$

با انجام محاسبات خواهیم داشت:

(۵۱)

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad k = 2,3,...$$

$$\mathbf{D}_{21} = \cos\theta\sin\psi$$

$$\mathbf{D}_{22} = 0.25\sin(\varphi+\psi-\theta) - 0.25\sin(\varphi+\psi+\theta) + 0.25\sin(\varphi-\psi+\theta) - 0.25\sin(\varphi-\psi-\theta) + 0.5\cos(\varphi+\psi) + 0.5\cos(\varphi-\psi)$$

$$\mathbf{D}_{23} = 0.25\cos(\varphi+\psi-\theta) - 0.25\cos(\varphi+\psi+\theta) + 0.25\cos(\varphi-\psi+\theta) - 0.25\cos(\varphi-\psi-\theta) - 0.5\sin(\varphi+\psi) - 0.5\sin(\varphi-\psi)$$

با استفاده از رابطه (۵۱) و معادله به‌دست آمده برای $\varepsilon\psi$ در رابطه (۳۸) خواهیم داشت:

$$\varepsilon\psi\big|_{\min} = \frac{\begin{Bmatrix} +[\cos\theta\sin\psi]d_{\mathrm{x}} \\ +[0.25\sin(\varphi+\psi-\theta) - 0.25\sin(\varphi+\psi+\theta) + 0.25\sin(\varphi-\psi+\theta) \\ -0.25\sin(\varphi-\psi-\theta) + 0.5\cos(\varphi+\psi) + 0.5\cos(\varphi-\psi)]d_{\mathrm{y}} \\ +[0.25\cos(\varphi+\psi-\theta) - 0.25\cos(\varphi+\psi+\theta) + 0.25\cos(\varphi-\psi+\theta) \\ -0.25\cos(\varphi-\psi-\theta) - 0.5\sin(\varphi+\psi) - 0.5\sin(\varphi-\psi)]d_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix}}{\omega_{\mathrm{n}}} - \tan\lambda \frac{\begin{Bmatrix} +[\sin\psi\cos\theta]b_{\mathrm{x}} + [\sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi]b_{\mathrm{y}} \\ +[\sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi]b_{\mathrm{z}} \end{Bmatrix}}{\mathrm{g}} \tag{۵۲}$$

رابطه فوق بیانگر دقت نهایی تخمین زاویه سمت می‌باشد.

۵- شبیه‌سازی

پس از استخراج روابط دقت نهایی زوایای سمت و تراز که به وسیله تخمین مقادیر بایاس شتاب‌سنج و دریفت ژیروسکوپ و سپس حذف خطای تخمینی از خروجی حسگرها به‌دست آمده‌است، قصد داریم تا روابط بدست‌آمده را شبیه‌سازی و صحه‌گذاری کنیم.

روابطی که در گذشته برای دقت نهایی زوایای سمت و تراز وجود داشت و به‌طور مستقیم از روابط (۳۸) استخراج شده بود به شرح زیر است:

$$\min\{\varepsilon\varphi\} = \frac{b_e}{g} \tag{۵۳}$$

$$\min\{\varepsilon\theta\} = \frac{-b_n}{g} \tag{۵۴}$$

$$\min\{\varepsilon\psi\} = \frac{\omega_d b_e}{g\omega_n} + \frac{d_e}{\omega_n} \tag{۵۵}$$

برای شبیه‌سازی از ۵۰ سناریوی مختلف و تصادفی برای وضعیت و موقعیت، و همچنین ۵۰ داده برای بایاس و دریفت شتاب‌سنج و ژیروسکوپ متناظر با سناریوها استفاده شده است، که چند نمونه از آنها در جدول‌های (۱) و (۲) نمایش داده شده است.

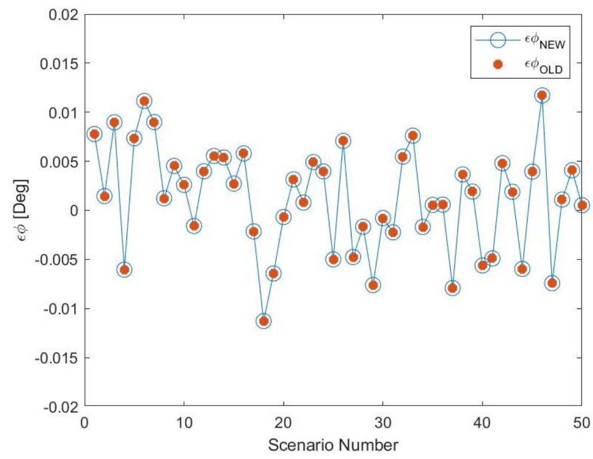
جدول ۱- برخی از داده های مربوط به وضعیت و موقعیت در سناریوهای مختلف

سناریو	φ (deg)	θ (deg)	ψ (deg)	λ (deg)
۱	۴۶/۶۱۳	۷۳/۵۵۱	۱۴۳/۵۳۱	۵۲/۰۶۳
۲	-۶۲/۹۴۵	-۷۱/۰۰۰	-۳۹/۹۰۸	۵۲/۷۰۳
۳	-۵۵/۸۵۳	۷۷/۴۷۷	۶/۵۵۴	۷/۱۲۵
۴	۱۱۹/۱۵۱	-۷۴/۷۰۰	-۳۲/۰۰۲	-۷۷/۴۰۰
۵	-۲۷/۸۸۸	-۳۴/۶۵۹	۳۹/۵۲۸	۴۰/۳۷۴

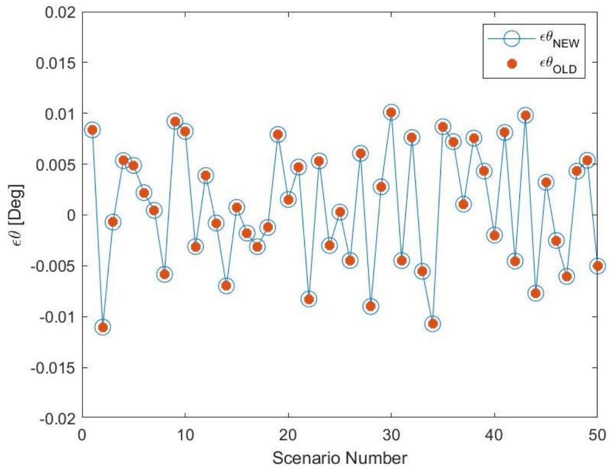
جدول ۲- برخی از داده های مربوط به بایاس و دریفت در سناریوهای مختلف

سناریو	$b_x(\mu g)$	$b_y(\mu g)$	$b_z(\mu g)$	$d_x(\circ/hr)$	$d_y(\circ/hr)$	$d_z(\circ/hr)$
۱	۵۵	۱۲۳	۱۴۷	۰/۰۱۲	۰/۰۰۹	۰/۰۰۵
۲	۱۳۳	۱۴۸	۸۵	۰/۰۱۴	۰/۰۰۸	۰/۰۰۵
۳	۱۱۹	۸۳	۱۳۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۸
۴	۷۲	۱۰۶	۱۰۰	۰/۰۱۵	۰/۰۱۰	۰/۰۰۶
۵	۷۳	۹۹	۱۴۰	۰/۰۱۴	۰/۰۱۵	۰/۰۰۸

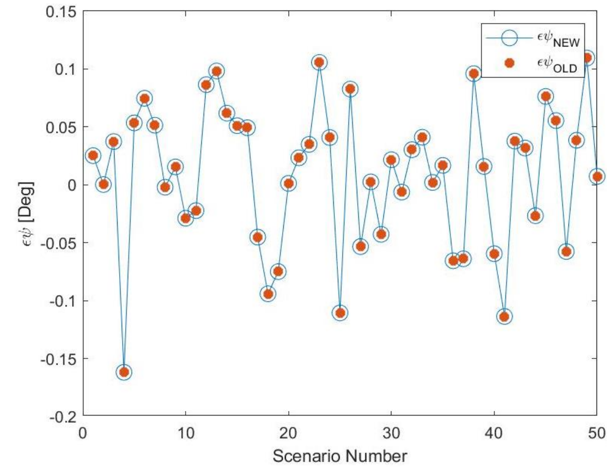
با استفاده از داده‌های مذکور، شبیه‌سازی معادلات استخراج شده، در ۵۰ سناریو انجام شده ونتایج آن برای رابطه جدید با زیرنویس NEW و برای رابطه قدیمی با زیرنویس OLD نمایش داده شده است.



شکل ۱- دقت نهایی تخمین زاویه φ



شکل ۲- دقت نهایی تخمین زاویه θ



شکل ۳- دقت نهایی تخمین زاویه ψ

مشاهده می‌شود که نتایج شبیه‌سازی روابط به‌دست‌آمده برای دقت تخمین زوایای سمت و تراز در این پژوهش، در تطابق با نتایج شبیه‌سازی روابط سابق است و بدین وسیله اعتبار روابط بدست‌آمده تایید می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا مدل خطای متغیرهای ناوبری در حالت عمومی استخراج شد و پس از آن روابط حاصل از این مدلسازی برای شرایط سکون زمینی بازنویسی شدند. در بخش سوم، به منظور افزایش دقت تخمین، معادلات خطای ناوبری را به دو زیرفضای مشاهده‌پذیر و مشاهده‌ناپذیر تقسیم کرده و پس از آن با استفاده از روابط به‌دست‌آمده در فضای مشاهده‌پذیر، و همچنین حذف بایاس تخمین زده‌شده از خروجی حسگرها در دستگاه بدنی، رابطه جدیدی برای دقت نهایی زوایای تراز و سمت استخراج شده است که دارای عبارت های حاوی زوایای اویلر است. با استفاده از این روابط، مسائل بهینه‌سازی مختلفی قابل طرح خواهند بود که این امکان برای روابط سابق وجود نداشت.

با شبیه‌سازی روابط جدید و روابط قدیمی با استفاده از داده‌های ۵۰ سناریوی مختلف و تصادفی و همچنین بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی، انطباق میان خروجی های روابط جدید و قدیم صحه‌گذاری شد.

۷- مراجع

[1] Zhang Q., Hu Y., Li S. (2021) Mounting parameter estimation from velocity vector observations for land vehicle navigation. J. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 29(06): 4234-4244.
[2] Zhao W., Cheng Y., Zhao S. (2021) Navigation grade MEMS IMU for a satellite. J. Micromachines, 12(2): 151.
[3] Zou, Tao, et al. "Fine Alignment Algorithm of Regular Tetrahedral Redundant Strapdown Inertial Navigation System Base on Kalman Filter." 2022 2nd International Conference on Electrical Engineering and Mechatronics Technology (ICEEMT). IEEE, 2022.
[4] Ning X.G., Huang J.X., Li J.X. (2021) A latitude self-estimation method of strapdown inertial navigation under complex interference. J. Journal of Chinese Inertial Technology, 29(03): 288-292+299.
[5] Yang D., Yu W. (2013) Research on initial alignment for large azimuth misalignment angle with Sage_Husa adaptive filtering. J. Infrared and Laser Engineering, 42(8): 2197-2201.
[6] Yu, M. J. Comparison of SDINS in-flight alignment using equivalent error models. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 35 (1999), 1046—1054. [7] Qin, Y. Y.
[7] Titterton D. H., Weston J. L., Strapdown Inertial Navigation Technology, Lavenham, UK : The Lavenham Press ltd (1997).
[8] Shin E-H., Estimation Techniques for Low-Cost Inertial Navigation, Ph.D. dissetation, Dept. Geom. Eng., University of Calgary, Calgary, CA, (2005).
[9] Salychev O., Applied Inertial Navigation:Problems and Solutions. ISBN 5-7038-2395-1 : Bauman MSTU Press (2004).
[10] Reinstein M., Sipos M., Rohac J., Error Analyses of Attitude and Heading Reference Systems, Przeglad Elektrotechniczny, 85 (2009), No. 8, 114-118
[11] Reinštein M., Rohac J., Sipos M., Algorithms for Heading Determination using Inertial Sensors , Przeglad Elektrotechniczny 86 (2010), No. 9, 243-246
[12] Reinstein, Michal. "Evaluation of fine alignment algorithm for inertial navigation." Przeglad Elektrotechniczny 87.7 (2011): 255-258.
[13] Sotak M., Coarse alignment algorithm for ADIS16405, Przeglad Elektrotechniczny 86 (2010), No. 9, 247-251
[14] Grewal M. S., Andrews A. P., Kalman Filtering - Theory and Practice using MATLAB. New York : Wiley-Interscience (2001)
[15] Acharya, Arunasish, Smita Sadhu, and Tapan Kumar Ghoshal. "Improving self-alignment of strapdown INS using measurement augmentation." 2009 12th International Conference on Information Fusion. IEEE, 2009.
[16] Jiang, Yeon Fuh. "Error analysis of analytic coarse alignment methods." IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 34.1 (1998): 334-337.
[17] Qin, Y. Y. Inertial navigation. Beijing, China: Science Press, 2006,14-26
[18] Li, Y. Gyrocompass self-alignment of SINS. Journal of Chinese Inertial Technology, 16 (2008), 386—389.
[19] Yu, M. J. Comparison of SDINS in-flight alignment using equivalent error models. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 35 (1999), 1046—1054. [7] Qin, Y. Y.
[20] Yongyuan, Qin, et al. "A clever way of SINS coarse alignment despite rocking ship." JOURNAL-NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY 23.5 (2005): 684.
[21] Yan, G. M. On SINS in-movement inertial alignment and some other problems. Ph.D. dissertation, Dept. of Electrical Engineering, Northwestern Polytechnical University, China, 2008.
[22] Jiang, Y. Error estimation of INS ground alignment through observability analysis. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 28 (1992), 92—96.
[23] Gao, Wei, et al. "Rapid fine strapdown INS alignment method under marine mooring condition." IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 47.4 (2011): 2887-2896.
[24] I. Y. Bar-Itzhack and N. Berman; "Control Theoretic Approach to Inertial Navigation Systems", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 11, No. 3, May-June 1988.