بررسی فلاتر یک پرنده سه‌درجه آزادی

محمدرضا علیجانی نرگسی[1]*

کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران alijani_mohammadreza@yahoo.com

چکیده

در این مقاله فلاتر یک پرنده با سه درجه آزادی بررسی شده است بدین منظور، ابتدا معادلات حاکم با روش لاگرانژ برای یک پرنده استخراج شده (در فاز کروز) و نیز معادلات الاستیک برای یک مقطع بال استخراج شده است و سپس معادلات در فضای حالت نوشته شده است. در نهایت درجات آزادی الاستیک به معادلات صلب پرنده کوپل گردیده است. در مرحله بعد، معادلات الاستیک دم نیز به معادلات بدنه و بال کوپل شده و سپس، وضعیت پایداری پرنده با اعمال گاست ثابت مورد مطالعه قرارگرفته است. در آخر، تاثیر تلاطم سوخت نیز به صورت یک درجه آزادی دورانی (اثر پاندولی) مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت با نوشتن کد عددی در نرم‌افزار MATLAB و استفاده از ایرودینامیک جونز، مسئله با روش P حل شده و پایداری جسم پرنده بررسی شده است.

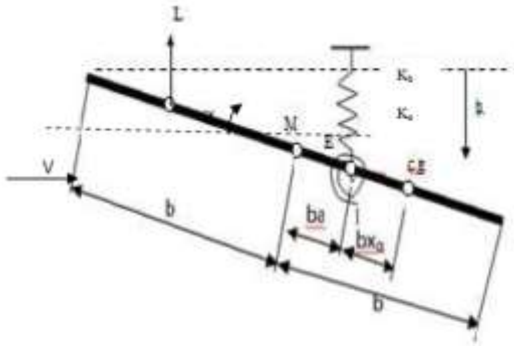
واژه های کلیدی: *ائروالاستیسیته، پدیده فلاتر، تئوری آئرودینامیک جونز، روش لاگرانژ*

۱- مقدمه

در مراجع و کتب متداول مکانیک پرواز، معادلات حرکت هواپیما عموماً با فرض صلبیت سازه هواپیما بدست می آیند و از اثرات انعطاف پذیری سازه صرف نظر می گردد. در مواردی که فرکانس‌های طبیعی دینامیک هواپیما با فرض صلبیت، اختلاف زیادی با فرکانس‌های طبیعی ارتعاشی سازه داشته باشند فرض صلبیت جهت تحلیل دینامیکی هواپیما تا حد قابل قبولی با واقعیت سازگار خواهد بود. اما با افزایش انعطاف پذیری سازه و کاهش فرکانس‌های طبیعی ارتعاشی سازه این اختلاف کاهش یافته و فرض صلبیت سازه دیگر قابل قبول نخواهد بود.

با ساخت هواپیماهای بزرگتر با بدنه طویل و دهانه بال بسیار بیشتر در دهه پنجاه میلادی و نیز بکارگیری موتور جت و افزایش سرعت هواپیماها مشکلات متعددی که بعضاً منجر به سوانح مرگباری گردید، پدیدار گشت. همچنین بکارگیری آلیاژهای جدید و مواد مرکب نوظهور در سال‌های بعد باعث افزایش چشمگیر انعطاف پذیری سازه گردید؛ به گونه ای که عدم در نظر گرفتن انعطاف پذیری سازه در هواپیماهای با سرعت زیر صوت و گذر صوت بزرگ و نیز جنگنده‌های مافوق صوت نه تنها باعث کاهش دقت و صحت تحلیل‌ها می گردید، بلکه نتایجی کاملاً نادرست را در اختیار تحلیل-گران قرار می داد. بنابراین، پژوهشگران ناگزیر به بررسی دقیق اثرات ایروالاستیسیته روی اجسام پرنده گردیدند. به عنوان مثال، توسکو و میروویچ در مقاله خود تلاش کردند که یک فرمول‌بندی جامع و واحد شامل تحلیل دینامیکی، سازه‌ای، آیرودینامیکی و کنترلی برای پرواز یک هواپیمای انعطاف‌پذیر ارائه کنند. در این مقاله هم بر پایه مفاهیم دینامیک پرواز حرکت صلب هواپیما بررسی شده و هم اجزای مختلف(بدنه،بال و دم) به صورت اجسام انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده و با وجود نیروی آیرودینامیک،پیشرانش،وزن و کنترل مورد بررسی قرارگرفته است. همچنین در این مقاله حرکت ۶ درجه برای قسمت صلب در نظرگرفته شده است.(سه درجه آزادی انتقالی و سه درجه آزادی دورانی) که در نتیجه معادلات حاکم شامل ۶ معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای حرکت صلب و نیز یک سری معادله برای جابه‌جایی الاستیک هر جزء می‌شود[۱].

برای کنترل فلاتر روش‌های مختلفی هم برای آیرودینامیک و هم برای مدل سازه‌ای توسعه یافته است که روش المان محدود در این زمینه بسیار رایج است. پرابهو و اسرینیواز در مقاله خود تاثیر پارامترهای هندسی بر مقطع ایرفویل با استفاده از آیرودینامیک ناپایا به منظور یافتن مقادیر بهینه برای پارامترهای هندسی با توجه به الگوریتم ژنتیک و ارزیابی دیفرانسیلی پرداخته‌اند [۲] مسئله بررسی شده در مقاله آنها در شکل ۱ قابل مشاهده است.



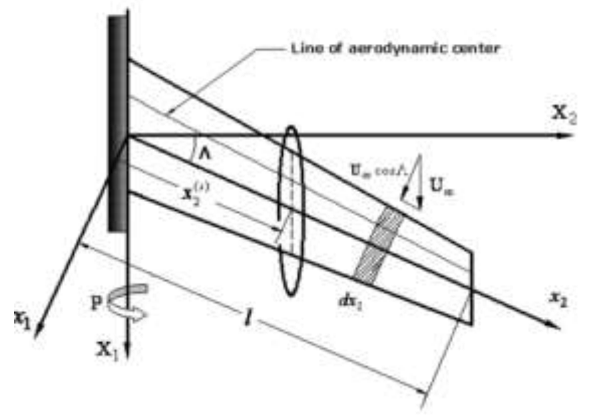
شکل۱- شکل شماتیک مسئله مرجع [۲]

موسوی و همکارانش با بکارگیری آیرودینامیک شبه پایا و با استفاده از روش گلرکین به بررسی سرعت فلاتر بال در جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر پرداختند [۳]. حدادپور و همکاران نیز رفتار آیروالاستیک سازه بال را با استفاده از آیرودینامیک شبه‌پایا و ناپایا برای تعیین بهترین مدل آیرودینامیکی برای تحلیل مورد بررسی قرار دادند [۴]. پارک و همکاران استفاده از نوسانات ناپایا و تبدیل آن‌ها به انرژی مفید مغناطیسی را بررسی کرده‌اند [۵].

در برخی از کارهای اخیر انجام شده بررسی فلاتر در بال‌های یکسرگیردار انجام شده و نیز رفتار فلاتر ایرفویل‌های الاستیک به طور تجربی بررسی شده است در این زمینه تاکاشی بار بحرانی فلاتر را برای بال با Taper مورد مطالعه قرار داده است [۶]. مامارینو نیز کاربرد ANN را برای یافتن تعداد سیکل بحرانی فلاتر را بررسی کرده است [۷].

در مقاله فاضل زاده نیز تاثیر مانور رول در ایروالاستیک استاتیکی و دینامیکی برای یک بال یک‌سر درگیر (شکل ۲) با فرض آیرودینامیک ناپایا

بررسی شده است.معادلات حاکم با استفاده از روش همیلتون استخراج شده و در جات آزادی مربوط به مانور به درجات آزادی حرکت الاستیک بال کوپل شده است و حل معادلات نیز با روش گلرکین توسعه یافته انجام گرفته و تاثیر پارامترهایی مانند مانور رول،زاویه سوئیپ،جرم اضافه شده و موقعیت آن روی فلاتر و divergence بررسی شده است [۸].



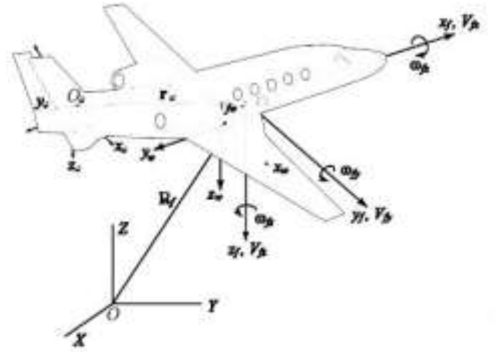
شکل۲- شکل شماتیک مسئله مرجع[۸]

مرجع [۹] نیز به تحلیل ناپایداری فلاتر برای بال با زاویه سوئیپ در جریان مادون صوت پرداخته است.لوتاتی هم در مقاله خود بال سوئیپ را با جرم انتهایی مدل کرده و به بررسی اثر winglet پرداخته است [۱۰]. پاتیل و هاجز هم در مقاله خود آیروالاستیسیته غیر خطی را برای هواپیمای کامل مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۱]. کین و لیبرسکو در مقاله‌ای فلاتر و واگرایی را برای بال کامپوزیتی غیر ایزوتروپیک با حضور جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر بررسی کرده‌اند [۱۲]. فارهات و همکاران در مقاله خود که در سال ۲۰۱۳ منتشر شد به بررسی اثر تلاطم سیال روی آیروالاستیسیته بال حامل محموله در رژیم های مختلف جریان پرداختند. آن ها نتیجه گرفتند که در نظر گرفتن اثر تلاطم سوخت، فشار بحرانی و سرعت فلاتر را کاهش میدهد [۱۳]. در مقاله ژانگ و همکاران که در سال ۲۰۲۱ منتشر شد ایروالاستیسیته یک بال با مقطع منحنی و با استفاده از اثر مرفین برای ایجاد انحنا بررسی شده است. مسئله برای هر دو مدل آیرودینامیک پایا و ناپایدار حل و مشاهده شده است که مدل آیرودینامیک ناپایدار نتایج محافظه کارانه‌تری را برای سرعت فلاتر بال ارائه می‌نماید [۱۴]. چای و همکاران نیز در سال ۲۰۲۱ با ارائه مقاله‌ای به مرور پیشرفت‌های اخیر در حوزه ایروالاستیسیته و همچنین کنترل فلاتر پرداخته است. آنها در مطالعه خود استراتژی‌های کنترلی مختلف از جمله الگوریتم‌های کنترل خطی و غیرخطی و همچنین نتایج کنترل فلاتر فعال بال‌ها و پانل‌ها را ارائه کرده‌اند [۱۵].

در مقاله حاضر سعی شده است به جای بررسی اثر یک پارامتر خاص روی بال، به طور جامع به مسئله ایروالاستیسیته یک پرنده پرداخته شود. بدین‌ترتیب که ابتدا معادلات حرکت هواپیما استخراج شده و سپس اثر انعطاف‌پذیری بال به معادلات کوپل شده و وضعیت پایداری دینامیکی پرنده و سرعت فلاتر آن بررسی شده است. در مرحله بعد، اثر انعطاف‌پذیری دم نیز روی فلاتر پرنده در نظر گرفته شده است. سپس، پایداری دینامیکی پرنده با حضور گاست مطالعه شده و در آخر اثر تلاطم سوخت نیز روی فلاتر پرنده بررسی شده است.

۲- استخراج معادلات حاکم

برای استخراج معادلات حاکم بر مسئله از روش لاگرانژ استفاده شده است. شماتیک مسئله مورد مطالعه در شکل ۳ نشان داده شده است. معادلات لاگرانژ برای جسم نامقید در دستگاه بدنی به صورت زیر است:



شکل ۳- شکل شماتیک مسئله

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)-r\frac{\partial T}{\partial v}+q\frac{\partial T}{\partial w}=F_x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)-p\frac{\partial T}{\partial w}+r\frac{\partial T}{\partial u}=F_y$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)-q\frac{\partial T}{\partial u}+p\frac{\partial T}{\partial v}=F_z$$
(۱)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)-r\frac{\partial T}{\partial q}+q\frac{\partial T}{\partial r}=M_x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)-p\frac{\partial T}{\partial r}+r\frac{\partial T}{\partial p}=M_y$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)-q\frac{\partial T}{\partial p}+p\frac{\partial T}{\partial q}=M_z$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i$$

معادلات صلب پرنده را در شکل ماتریسی می‌توان به صورت زیر نمایش داد [۱] و [۱۶]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{dV_f}\right)+\widetilde{\omega}_f\frac{\partial L}{\partial V_f}-C_f\frac{\partial L}{\partial R_f}=F \qquad (۲)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\omega_f}\right)+\widetilde{V}_f\frac{\partial L}{\partial V_f}+\widetilde{\omega}_f\frac{\partial L}{\partial \omega_f}-\left(E_f^T\right)^{-1}\frac{\partial L}{\partial \theta_f}=M$$

در معادلات فوق:

$$V_f=\left\{V_{fx},V_{fy},V_{fz}\right\}^T$$
$$\omega_f=\left\{\omega_{fx},\omega_{fy},\omega_{fz}\right\}^T$$

$$F = \{F_x, F_y, F_z\}^T$$
$$M = \{M_x, M_y, M_z\}^T$$

برای نمایش بهتر و حل ساده تر مسئله، معادلات به فضای حالت برده شده‌اند معادلات حالت را می توان به کمک معادله لاگرانژ به دست آورد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = \mathrm{F} \qquad (۳)$$

با قرار دادن $q = R_f$ در معادله ۲-۲:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial V_f}\right) + \left(\omega_f \times \dfrac{\partial T}{\partial V_f}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial R_f} + \dfrac{\partial U}{\partial V_f} = \mathrm{F} \\ P := \dfrac{\partial T}{\partial V} = MV \Rightarrow \dot{\mathrm{P}}_{vf} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial V_f}\right) \end{cases}$$
$$\xRightarrow{\vec{a}\times\vec{b}=\tilde{a}\vec{b}} \dot{P}_{vf} + \widetilde{\omega}_f P_{vf} - \frac{\partial T}{\partial R_f} + \frac{\partial U}{\partial V_f} = F$$

از آن جا که انرژی جنبشی تابعی از R_f نمی باشد و U نیز از توابع شکل به دست می آید و تابع سرعت نیست، معادله فوق به صورت زیر درمی آید:

$$\dot{\mathrm{P}}_{vf} = -\widetilde{\omega}_f \mathrm{P}_{vf} + \mathrm{F} \qquad (٤)$$

با قرار دادن $q = \theta_f$ در معادله ۲-۲:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_f}\right) + \left(\omega_f \times \frac{\partial T}{\partial V_f}\right) + \left(V_f \times \frac{\partial T}{\partial V_f}\right) -$$
$$E_f^{t\,-1}\frac{\partial T}{\partial \theta_f} + \frac{\partial U}{\partial \omega_f} = \mathrm{M}$$
$$\mathrm{P}_{\omega f} = \frac{\partial T}{\partial \omega_f} \rightarrow \qquad (٥)$$
$$\dot{\mathrm{P}}_{\omega f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_f}\right)$$

$$\dot{\mathrm{P}}_{\omega f} = -\widetilde{V}_f \mathrm{P}_{vf} - \widetilde{\omega}_f \mathrm{P}_{\omega f} + \mathbf{M}$$

بنابراین، معادلات حالت در شکل فضایی[1] را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\mathbf{R}}_f = C_f^T \mathbf{V}_f \qquad (۶)$$
$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_f = E_f^{-1}\boldsymbol{\omega}_f \qquad (۷)$$
$$\dot{\mathbf{p}}_{vf} = -\widetilde{\omega}_f \mathbf{p}_{vf} + \mathbf{F} \qquad (۸)$$
$$\dot{\mathbf{p}}_{\omega f} = -\widetilde{V}_f \boldsymbol{p}_{vf} - \widetilde{\omega}_f \boldsymbol{p}_{\omega f} + \mathbf{M} \qquad (۹)$$

۲-۱- معادلات نیرو

برای یافتن نیروهای آئرودینامیکی از تئوری نواری[2] استفاده می کنیم. به این معنا که بدنه، بال و دم به عنوان یک سطح دوبعدی محسوب می شوند. درواقع نیروهای آئرودینامیکی بر روی یک هوابر[3] دوبعدی وابسته به زاویه حمله مقطع هوابر (α_ω) فرض می شوند.

نیروی برآ[4] و پسا[5] بر واحد طول دهانه بال به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$l_w = q_w c_w C_{l_{\alpha w}} \alpha_w$$

$$d_w = q_w c_w \left(C_{D_{w0}} + K_w C_{l_w}^2\right) = q_w c_w \left(C_{D_{w0}} + K_w C_{l_{\alpha w}}^2 \alpha_w^2\right) \qquad (۱۰)$$

که در معادله فوق C_w طول وتر و $C_{D_{w0}}$ ضریب پسای برآی صفر[6] می باشد؛ همچنین:

$$q_w = \frac{1}{2}\rho\left(\bar{V}_{wy}^2 + \bar{V}_{wz}^2\right) \qquad (۱۱)$$

$$\alpha_w = \tan^{-1}\left(\bar{V}_{wz}/\bar{V}_{wy}\right) + \psi_{wx} \qquad (۱۲)$$

$\bar{V}_{wy}$ و $\bar{V}_{wz}$ مولفه‌های بردار سرعت هستند که از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند. همچنین ψ_{wx} جابجایی زاویه‌ای بال حول محور X_w می‌باشد.

$$\bar{V}_w(r_w, t) = C_w \bar{V}_f(r_w, t) + \tilde{r}_w^T C_w\left[\Omega_f(r_{fw}, t)\right] + \tilde{r}_w^T \omega_w(t) \cong C_w \bar{V}_f + \left(C_w \tilde{r}_{fw}^T + \tilde{r}_{fw}^T C_w\right)\omega_f + \tilde{r}_w^T C_w \Omega_f \qquad (۱۳)$$

r_{fw} بردار شعاعی از مرکز دستگاه $X_f Y_f Z_f$ به مرکز دستگاه $X_w Y_w Z_w$ است. لذا بردار نیروهای آئرودینامیکی به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{f}_{aw} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}_w \sin \boldsymbol{\alpha}_w - \boldsymbol{d}_w \cos \boldsymbol{\alpha}_w \\ -\boldsymbol{l}_w \boldsymbol{cos}\, \boldsymbol{\alpha}_w - \boldsymbol{d}_w \boldsymbol{sin}\, \boldsymbol{\alpha}_w \end{bmatrix} \qquad (١٤)$$

برای گشتاور پیچ وارد بر بال نیز داریم:

$$\boldsymbol{M}_w = \boldsymbol{f}_{aw} \times \widetilde{\boldsymbol{R}}_w \qquad (١٥)$$
$$\boldsymbol{R}_w = [\boldsymbol{r}_{wx} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T \qquad (١٦)$$

به طریق مشابه برای دم افقی خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{l}_e = \boldsymbol{q}_e \boldsymbol{c}_e \left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{l}_{\alpha_e}} \boldsymbol{\alpha}_e + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{l}_{\delta_e}} \boldsymbol{\delta}_e\right) \qquad (١٧) \; (١٨)$$

[1] State equation in special form
[2] Strip Theory
[3] Airfoil

[4] Lift
[5] Drag
[6] Zero lift drag coefficient

$$d_e = q_e c_e \left(C_{D_{e_w}} + K_e C_{l_{\alpha_e}}^2 \alpha_e^2 \right)$$

که در معادله فوق c_e وتر، δ_e چرخش الویتور و $C_{L\delta e}$ ضریب کنترلی می باشد. سایر مولفه‌ها نیز به صورت زیر تعریف می باشد:

$$q_e = \frac{1}{2}\rho\left(\bar{V}_{ey}^2 + \bar{V}_{ez}^2\right) \qquad (۱۹)$$

$$\alpha_e = \tan^{-1}\left(\bar{V}_{ez}/\bar{V}_{ey}\right) + \psi_{ex} \qquad (۲۰)$$

به صورت برداری، نیروی آئرودینامیکی بر واحد طول دم به صورت زیر نوشته می شود:

$$f_{ae} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_e \sin\alpha_e - d_e \cos\alpha_e \\ -l_e \cos\alpha_e - d_e \sin\alpha_e \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

گشتاور وارد بر دم افقی مشابه بال به صورت ضرب بازوی گشتاور در نیروی آئرودینامیکی محاسبه می شود:

$$M_e = f_{ae} \times \tilde{R}_e \qquad (۲۲)$$

$$R_e = [r_{ex} \quad 0 \quad 0]^T \qquad (۲۳)$$

۳- معادلات حالت

با استفاده از نظریه یکپارچه سازی[۷] و تئوری اغتشاشات[۸] هر مولفه را می توان به صورت مجموع دو قست بازنویسی کرد:

- ✓ مقدار اسمی (Nominal value)
- ✓ مقدار اختلالی (Perturbation value)

بنابراین:

Total State = Nominal value + Perturbation value

در ادامه ابتدا روابط مربوط به حالت اسمی (با نماد صفر) و آنگاه روابط مربوط به قسمت اختلالی (با نماد یک) آورده شده است.
از آنجا که مولفه‌های حالت شامل بردار مکان (R_f^T)، بردار زاویه (θ_f^T)، سرعت خطی (V_f^T) و سرعت زاویه‌ای (ω_f^T) می باشد، لذا بردار حالت به شکل زیر در خواهد آمد:

$$X = \left[R_f^T \quad \theta_f^T \quad P_{v_f}^T \quad P_{\omega_f}^T\right]^T \qquad (۲۴)$$

۳-۱- روابط حالت اسمی

بردار حالت در این حالت به صورت زیر است:

$$X^{(0)} = \left[R_f^{(0)^T} \quad \theta_f^{(0)^T} \quad P_{v_f}^{(0)^T} \quad P_{\omega_f}^{(0)^T}\right]^T \qquad (۲۵)$$

مولفه‌های بردار حالت در حالت اسمی در زیر آورده شده است:

$$\dot{R}_f^{(0)} = C_f^{(0)^T} V_f^{(0)} \qquad (۲۶)$$

$$\dot{\theta}_f^{(0)} = \left(E_f^{(0)}\right)^{-1} \omega_f^{(0)} \qquad (۲۷)$$

$$\dot{P}_{vf}^{(0)} = -\tilde{\omega}_f^{(0)} P_{vf}^{(0)} + F^{(0)} \qquad (۲۸)$$

$$\dot{P}_{\omega f}^{(0)} = -\tilde{V}_f^{(0)} P_{vf}^{(0)} - \tilde{\omega}_f^{(0)} P_{\omega f}^{(0)} + M^{(0)} \qquad (۲۹)$$

که در آن‌ها:

$$C_f = \begin{bmatrix} cos(\psi)\,sin(\theta) & sin(\psi)\,cos(\theta) & -sin(\theta) \\ cos(\psi)\,sin(\theta)\,sin(\phi) - sin(\psi)\,cos(\phi) & sin(\psi)\,sin(\theta)\,sin(\phi) + cos(\psi)\,cos(\phi) & cos(\theta)\,sin(\phi) \\ cos(\psi)\,sin(\theta)\,cos(\phi) + sin(\psi)\,sin(\phi) & sin(\psi)\,sin(\theta)\,cos(\phi) - cos(\psi)\,sin(\phi) & cos(\theta)\,cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$E_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & cos(\theta)\,cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$F^{(0)} = C_w^T f_w^{(0)} + C_e^T f_e^{(0)} \qquad (۳۰)$$

$$M^{(0)} = \tilde{r}_{fw} C_w^T f_w^{(0)} + \tilde{r}_{fe} C_e^T f_e^{(0)} \qquad (۳۱)$$

$$f_{ai}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_i^{(0)} sin\alpha_i^{(0)} - d_i^{(0)} cos\alpha_i^{(0)} \\ -l_i^{(0)} cos\alpha_i^{(0)} - d_i^{(0)} sin\alpha_i^{(0)} \end{bmatrix} ، \quad i = w،e \qquad (۳۲)$$

حالت اسمی نیروهای برا و پسا بر واحد سطح به صورت زیر خواهد بود:

$$l_w^{(0)} = q_w^{(0)} c_w C_{L\alpha w} \alpha_w^{(0)} \qquad (۳۳)$$

$$l_e^{(0)} = q_e^{(0)} c_e C_{L\alpha e} \alpha_e^{(0)} \qquad (۳۴)$$

$$d_i^{(0)} = q_i^{(0)} c_i \left[C_{Dio} + k_i C_{L\alpha i}^2 \left(\alpha_i^{(0)}\right)^2\right] ، \quad i = w،e \qquad (۳۵)$$

که:

$$q_i^{(0)} = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\bar{V}_{iy}^{(0)}\right)^2 + \left(\bar{V}_{iz}^{(0)}\right)^2\right] ، \alpha_i^{(0)} = \tan^{-1}\left(\bar{V}_{iz}^{(0)}/\bar{V}_{iy}^{(0)}\right) \qquad (۳۶)$$

بردار حالت در این حالت به صورت زیر در خواهد آمد:

[۷] Unified theory

[۸] Perturbation theory

$$X^{(0)} = \left[\mathbf{R}_{\mathbf{f}}^{(0)^T} \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{f}}^{(0)^T} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{v_f}}^{(0)^T} \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{f}}}^{(0)^T}\right]^{\mathbf{T}} \qquad (۳۷)$$

که:

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{v_f}}^{(0)} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{S}}^{(0)^T}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \qquad (۳۸)$$

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\omega_f}}^{(0)} = \tilde{\boldsymbol{S}}^{(0)}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} + \boldsymbol{J}^{(0)}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \qquad (۳۹)$$

با جایگذاری معادله (۳۸) و (۳۹) در معادله (۲۸) و (۲۹)، شکل ماتریسی معادلات حالت در حالت اسمی به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m} & \tilde{\boldsymbol{S}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\boldsymbol{S}} & \boldsymbol{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \\ \dot{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{m}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}} & \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{m}\tilde{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}} & -\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{J}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \\ \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \\ \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \end{bmatrix} \qquad (۴۰)$$

۳-۲- روابط حالت اختلالی

روابط حالت اختلالی مشابه حالت اسمی به دست می آید. بردار حالت در این حالت برابر است با:

$$X^{(1)} = \left[\mathbf{R}_{\mathbf{f}}^{(1)^T} \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{f}}^{(1)^T} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{v_f}}^{(1)^T} \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{f}}}^{(1)^T}\right]^{\mathbf{T}} \qquad (۴۱)$$

که مولفه‌های بردار حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} = \mathbf{C}_{\mathbf{f}}^{(0)^T}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{f}}^{(1)^T}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \qquad (۴۲)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} = \left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{f}}^{(0)}\right)^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} - \left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{f}}^{(0)}\right)^{-1}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{f}}^{(1)}\left(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{f}}^{(0)}\right)^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \qquad (۴۳)$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{vf}}^{(1)} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}}^{(1)}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{vf}}^{(0)} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}}^{(0)}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{vf}}^{(1)} + \boldsymbol{F}^{(1)} \qquad (۴۴)$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{\omega f}}^{(1)} = -\tilde{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{f}}^{(1)}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{vf}}^{(0)} - \tilde{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{f}}^{(0)}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{vf}}^{(1)} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}}^{(1)}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\omega f}}^{(0)} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{f}}^{(0)}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\omega f}}^{(1)} + \boldsymbol{M}^{(1)} \qquad (۴۵)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{f\theta}}^{(0)}\boldsymbol{\theta}^{(1)} \qquad (۴۶)$$

$$E_f^{(1)} = E_{f\theta}^{(0)}\theta^{(1)} \qquad (۴۷)$$

و:

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{f\theta}}^{(0)} = \frac{\partial \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{f}}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{\text{for } \psi^{(0)},\theta^{(0)},\phi^{(0)}} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{c\psi}^{(0)}\boldsymbol{s\theta}^{(0)} & -\boldsymbol{s\psi}^{(0)}\boldsymbol{s\theta}^{(0)} & -\boldsymbol{c\theta}^{(0)} \\ \boldsymbol{c\psi}^{(0)}\boldsymbol{c\theta}^{(0)}\boldsymbol{s\phi}^{(0)} & \boldsymbol{s\psi}^{(0)}\boldsymbol{c\theta}^{(0)}\boldsymbol{s\phi}^{(0)} & -\boldsymbol{s\theta}^{(0)}\boldsymbol{s\phi}^{(0)} \\ \boldsymbol{c\psi}^{(0)}\boldsymbol{c\theta}^{(0)}\boldsymbol{c\phi}^{(0)} & \boldsymbol{s\psi}^{(0)}\boldsymbol{c\theta}^{(0)}\boldsymbol{c\phi}^{(0)} & -\boldsymbol{s\theta}^{(0)}\boldsymbol{c\phi}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$E_{f\theta}^{(0)} = \frac{\partial E_f}{\partial \theta} \xrightarrow{\text{for } \theta^{(0)},\phi^{(0)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c\theta^{(0)} \\ 0 & 0 & -s\theta^{(0)}s\phi^{(0)} \\ 0 & 0 & -s\theta^{(0)}c\phi^{(0)} \end{bmatrix}$$

البته در این مسئله زوایای φ و ψ صفر می باشد.

و:

$$\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} = \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} \qquad (۴۸)$$

$$\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} = \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} + \breve{r}_f^T\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} \qquad (۴۹)$$

در روابط بالا، $P_{vf}^{(1)}$ و $P_{\omega f}^{(1)}$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Vf}}^{(1)} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} + \tilde{\boldsymbol{S}}^{(1)^T}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{S}}^{(0)^T}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} \qquad (۵۰)$$

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\omega f}}^{(1)} = \tilde{\boldsymbol{S}}^{(1)}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{S}}^{(0)}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} + \boldsymbol{J}^{(1)}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(0)} + \boldsymbol{J}^{(0)}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} \qquad (۵۱)$$

با جایگذاری رابطه (۵۰) و (۵۱) در معادله (۴۴) و (۴۵) مولفه‌های $\dot{P}_{V_f}^{(1)}$ و $\dot{P}_{\omega_f}^{(1)}$ به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} \dot{P}_{vf_x} = -m\omega_f^{(0)}V_{f_x}^{(1)} - s^{(0)^T}\tilde{\omega}_f^{(0)}\omega_{f_x}^{(1)} \\ \dot{P}_{vf_y} = (-m\omega_f^{(0)} + \rho S V_0(C_L \sin\propto_0 - C_D\cos\propto_0))V_{f_y}^{(1)} - \dfrac{1}{2}\rho S V_0^2(C_L + C_D\sin\propto_0)\theta_{f_y}^{(1)} - \tilde{s}^{(0)^T}\tilde{\omega}_f^{(0)}\omega_{f_y}^{(1)} \\ \dot{P}_{vf_z} = (-m\omega_f^{(0)} + \rho S V_0(C_L\cos\propto_0 + C_D\sin\propto_0))V_{f_z}^{(1)} - \dfrac{1}{2}\rho S V_0^2(C_D - C_L\sin\propto_0)\theta_{f_y}^{(1)} - \tilde{s}^{(0)^T}\tilde{\omega}_f^{(0)}\omega_{f_z}^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{P}_{\omega f_x} = \left(-m\tilde{V}_f^{(0)} - \tilde{s}^{(0)^T}\tilde{\omega}_f^{(0)}\right)V_{f_x}^{(1)} + (-\tilde{s}^{(0)^T}\tilde{V}_f^{(0)} - J\tilde{\omega}_f^{(0)})\omega_{f_x}^{(1)} \\ \dot{P}_{\omega f_y} = (-m\tilde{V}_f^{(0)} - \tilde{s}^{(0)^T}\tilde{\omega}_f^{(0)} + \rho S V_0(C_L\cos\propto_0 + C_D\sin\propto_0)R_x)V_{f_y}^{(1)} + \dfrac{R_x}{2}\rho S V_0^2(C_D - C_L\sin\propto_0)\theta_{f_y}^{(1)} + (-\tilde{s}^{(0)^T}\tilde{V}_f^{(0)} - J\tilde{\omega}_f^{(0)})\omega_{f_y}^{(1)} \\ \dot{P}_{\omega f_z} = (-m\tilde{V}_f^{(0)} - \tilde{s}^{(0)^T}\tilde{\omega}_f^{(0)} + \rho S V_0(C_L\sin\propto_0 - C_D\cos\propto_0)R_x)V_{f_z}^{(1)} + \dfrac{R_x}{2}\rho S V_0^2(C_L + C_D\sin\propto_0)\theta_{f_y}^{(1)} + (-\tilde{s}^{(0)^T}\tilde{V}_f^{(0)} - J\tilde{\omega}_f^{(0)})\omega_{f_z}^{(1)} \end{cases}$$

همچنین بردار نیرو و گشتاور در حالت اختلالی به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{F}^{(0)} = \boldsymbol{C_w^T}\mathbf{f}_w^{(1)} + \boldsymbol{C_e^T}\mathbf{f}_e^{(1)} \tag{۵۲}$$

$$\mathbf{M}^{(0)} = \tilde{\boldsymbol{r}}_{fw}\boldsymbol{C_w^T}\mathbf{f}_w^{(1)} + \tilde{\boldsymbol{r}}_{fe}\boldsymbol{C_e^T}\mathbf{f}_e^{(1)} \tag{۵۳}$$

که بردار نیروهای آئرودینامیکی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ai}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{l_i^{(1)}sin\alpha_i^{(0)} - d_i^{(1)}cos\alpha_i^{(0)}} \\ +\left(\mathbf{-l_i^{(0)}cos\alpha_i^{(0)} - d_i^{(0)}sin\alpha_i^{(0)}}\right) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{-l_i^{(1)}cos\alpha_i^{(0)} - d_i^{(1)}sin\alpha_i^{(0)}} \\ +\left(\mathbf{l_i^{(0)}sin\alpha_i^{(0)} - d_i^{(0)}cos\alpha_i^{(0)}}\right)\boldsymbol{\alpha}_i^{(1)} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{۵۴}$$

$$\boldsymbol{i = w،e}$$

در روابط فوق حالت اختلالی نیروهای برآ و پسا بر واحد سطح به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l_w^{(1)}} &= \boldsymbol{q_w^{(1)}c_wC_{L\alpha w}\alpha_w^{(0)} + q_w^{(0)}c_wC_{L\alpha w}\alpha_w^{(1)}} \\ \boldsymbol{l_e^{(1)}} &= \boldsymbol{q_e^{(1)}c_e\left(C_{L\alpha e}\alpha_e^{(0)} + C_{L\delta e}\delta_e\right)} \\ &\quad \boldsymbol{+ q_e^{(0)}c_eC_{L\alpha e}\alpha_e^{(1)}} \\ \boldsymbol{d_i^{(0)}} &= \boldsymbol{q_i^{(1)}c_i\left[C_{Dio} + k_iC_{L\alpha i}^2\left(\alpha_i^{(0)}\right)^2\right]} \\ &\quad \boldsymbol{+ 2q_i^{(0)}c_iC_{L\alpha i}\alpha_i^{(0)}\alpha_i^{(1)}} \end{aligned} \tag{۵۵}$$

که در آن:

$$\boldsymbol{q_i^{(1)} = \rho\left(\bar{V}_{iy}^{(0)}\bar{V}_{iy}^{(1)} + \bar{V}_{iz}^{(0)}\bar{V}_{iz}^{(1)}\right)}$$

$$\propto_i^{(!)} = \mathbf{tan^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{\bar{V}_{iy}^{(0)}\bar{V}_{iz}^{(1)} - \bar{V}_{iy}^{(1)}\bar{V}_{iz}^{(0)}}}{\boldsymbol{\left(\bar{V}_{iy}^{(0)}\right)^2 + \left(\bar{V}_{iz}^{(0)}\right)^2}}\right)$$

حال می توان ماتریس معادلات را تشکیل داد و با استفاده از آن به تحلیل پایداری وسیله پرداخت. در زیر ماتریس معادلات حالت آورده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&m&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&m&0&0&\tilde{S}^{(0)^T}&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&m&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&\tilde{S}^{(0)^T}&0&0&J^{(0)}&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_{f_x} \\ \dot{R}_{f_y} \\ \dot{R}_{f_z} \\ \dot{\theta}_{f_x} \\ \dot{\theta}_{f_y} \\ \dot{\theta}_{f_z} \\ \dot{V}_{f_x} \\ \dot{V}_{f_y} \\ \dot{V}_{f_z} \\ \dot{\omega}_{f_x} \\ \dot{\omega}_{f_y} \\ \dot{\omega}_{f_z} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&C_f^{(0)^T}&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&E_f^{(0)^T}&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-m\omega_f^{(0)}&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&b&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&d&0&0&a&0&0&-\tilde{S}^{(0)^T}\tilde{\omega}_f^{(0)}&0 \\ 0&0&0&0&0&0&e&0&c&0&0&0 \\ 0&0&0&0&i&0&0&h&0&0&-\tilde{S}^{(0)^T}\tilde{V}_f^{(0)} - J\tilde{\omega}_f^{(0)}&0 \\ 0&0&0&0&g&0&0&0&k&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{f_x} \\ R_{f_y} \\ R_{f_z} \\ \theta_{f_x} \\ \theta_{f_y} \\ \theta_{f_z} \\ V_{f_x} \\ V_{f_y} \\ V_{f_z} \\ \omega_{f_x} \\ \omega_{f_y} \\ \omega_{f_z} \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق از حروف انگلیسی برای برخی از عبارت‌ها استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{-m\omega_f^{(0)} + \rho SV_0(C_L\sin\propto_0 - C_D\cos\propto_0)} \\ \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\rho SV_0^2(C_L + C_D\sin\propto_0)} \\ \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{-m\omega_f^{(0)} + \rho SV_0(C_L\cos\propto_0 + C_D\sin\propto_0)} \\ \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\rho SV_0^2(C_D - C_L\sin\propto_0)\theta_{f_y}^{(1)}} \\ \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{-m\widetilde{V}_f^{(0)} - \tilde{s}^{(0)^T}\widetilde{\omega}_f^{(0)}} \\ \boldsymbol{g} &= \boldsymbol{\frac{R_x}{2}\rho SV_0^2(C_L + C_D\sin\propto_0)\theta_{f_y}^{(1)}} \\ \boldsymbol{h} &= \boldsymbol{-m\widetilde{V}_f^{(0)} - \tilde{s}^{(0)^T}\widetilde{\omega}_f^{(0)} + \rho SV_0(C_L\cos\propto_0} \\ &\quad \boldsymbol{+ C_D\sin\propto_0)R_x} \\ \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{\frac{R_x}{2}\rho SV_0^2(C_D - C_L\sin\propto_0)\theta_{f_y}^{(1)}} \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{-m\widetilde{V}_f^{(0)} - \tilde{s}^{(0)^T}\widetilde{\omega}_f^{(0)} + \rho SV_0(C_L\sin\propto_0} \\ &\quad \boldsymbol{- C_D\cos\propto_0)R_x)V_{f_z}^{(1)}} \end{aligned}$$

۴- تحلیل و ارائه نتایج

در این بخش با استفاده از نتایج و معادلات به دست آمده در قسمت قبل و افزودن معادلات الاستیک برای تشکیل دستگاه معادلات اصلی به منظور تحلیل فلاتر، یک هوابر نمونه را در نظر گرفته و حل برای آن انجام می گیرد. این هوابر یک سیستم دو درجه آزادی را مدل میکند که توسط تئودورسن و گریک در گزارش معروفشان استفاده شده است [۱۷] و [۱۸]. آن‌ها پیشنهاد دادند که برای پیش بینی فلاتر به صورت تحلیلی، خواص داخلی و هندسی یک بال سه بعدی با اسپن[۹] بزرگ و بدون تیپر[۱۰] را می‌توان با تقریب خوبی به صورت یک هوابر دوبعدی در $3/4$ فاصله از ریشه بال، در نظر گرفت. این پیشنهاد برای بال‌های با اسپن بزرگ، زاویه سوییپ[11] کوچک و تغییرات کم در راستای اسپن، صادق است.

۴-۱- به دست آوردن نمودارهای آئرودینامیک تقریب جونز

مشابه بخش ۲ که برای تحلیل دینامیک پرواز شش معادله (براساس تعداد متغیرهای حالت) به دست آمد، برای تحلیل فلاتر نیز شش معادله دیگر به سیستم معادلات افزوده می شود.

دراین بخش با استفاده از معادلات زیر و در نظر گرفتن مشخصات هوابر نمونه، نمودار آئرودینامیک تقریب جونز را بازتولید می کنیم. در بخش بعد

[9] Span
[10] Taper
[11] Sweep

نیز با استفاده از دوازده معادله مذکور (شامل شش معادله دینامیک پرواز و شش معادله فلاتر) نمودارهای فلاتر ترسیم می گردند.

معادلات آئرودینامیک تقریب جونز به صورت زیر می باشد [۱۹]:

$$\boldsymbol{L = \pi\rho_\infty b^2(\ddot{w} - U\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}) - C_{L_\alpha}\rho_\infty U b\left[\frac{1}{2}\left(\dot{w} - U\theta + ba\dot{\theta} - \frac{b}{2}\left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi} - 1\right)\dot{\theta}\right) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i B_i\right]} \quad (۵۶)$$

$$M_{\frac{1}{4}} = -\pi\rho_\infty b^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi} - 1\right)U\dot{\theta} + Ua\dot{\theta} + a\ddot{w} + b\left(\frac{1}{8} + a^2\right)b\ddot{\theta}\right] - C_{L_\alpha}\rho_\infty U b^2\left(\frac{1}{2} + a\right)\left[\frac{1}{2}\left(\dot{w} - U\theta + ba\dot{\theta} - \frac{b}{2}\left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi} - 1\right)\dot{\theta}\right) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i B_i\right] \quad (۵۷)$$

$$\dot{B}_i + \left(\beta_i\frac{U}{b}\right)B_i = w_{0.75C} \quad (۵۸)$$

$w_{0.75C}$ از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\boldsymbol{w_{0.75C} = \dot{w} - U\theta + ba\dot{\theta} - \frac{b}{2}\left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi} - 1\right)\dot{\theta}} \quad (۵۹)$$

و:

$$\boldsymbol{\gamma_i = \frac{U}{b}\beta_i\alpha_i} \quad (۶۰)$$

ثابت‌های α_i و β_i ضرایب استفاده شده در تقریب شبه-چند جمله‌ای تابع وگنر $\Phi_w(\tau)$ می باشد:

$$\boldsymbol{\Phi_w(\tau) = 1 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \exp\left(-\beta_i\tau\right)H(\tau)} \quad (۶۱)$$

این ضرایب برای دو شکل مُد در جدول ۱ آورده شده است:

جدول ۱- ضرایب استفاده شده در تقریب تابع وگنر

α_1	α_2	β_1	β_2
0.165	0.335	0.0455	0.300

۴-۲- به دست آوردن نمودارهای تحلیل فلاتر بال نوعی

معادلات تحلیل فلاتربال به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\boldsymbol{\dot{q}_{uw} = s_{uw}} \quad (۶۲)$$

$$\dot{q}_{\psi w} = s_{\psi w} \quad (۶۳)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{\boldsymbol{uw}} = -K_{uw}q_{uw} - C_{uw}s_{uw} + Q_{uw} \quad (۶۴)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{\boldsymbol{\psi w}} = -K_{\psi w}q_{\psi w} - C_{\psi w}s_{\psi w} + Q_{\psi w} \quad (۶۵)$$

در روابط فوق متغیرهای موجود به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\mathrm{V}}_w(\boldsymbol{r_w, t}) = \boldsymbol{C_w V_f + [C_w(\tilde{r}_w + \tilde{u}_w)^T C_w]\omega_f + \tilde{r}_w^T\alpha_w} + \mathrm{v}_w \quad (۶۶)$$

$Q_{\psi w}$ نیروهای ائرودینامیکی را نشان می‌دهد.

r_w، u_w، v_w و α_w به ترتیب جابجایی و سرعت‌های الاستیک براساس خمش و پیچش هستند. در نهایت، انرژی جنبشی از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\bar{V}_f^T\bar{V}_f dm_f} + \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\bar{V}_w^T\bar{V}_w dm_w} + \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\bar{V}_e^T\bar{V}_e dm_e} = \frac{1}{2}\boldsymbol{V^T M V} \quad (۶۷)$$

که بردار سرعت در حالت کلی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{V} = \left[\mathrm{V_f^T}\ \ \omega_\mathrm{f}^\mathrm{T}\ \ \mathrm{s_{uf}^T}\ \ \mathrm{s_{uw}^T}\ \ \mathrm{s_{ue}^T}\ \ \mathrm{s_{\psi f}^T}\ \ \mathrm{s_{\psi w}^T}\ \ \mathrm{s_{ue}^T}\right]^\mathrm{T} = \left[V_1^T\ \ V_2^T\ \ V_3^T\ \ V_4^T\ \ V_5^T\ \ V_6^T\ \ V_7^T\ \ V_8^T\right]^T$$

باتوجه به این که در این بخش ما صرفاً با تحلیل فلاتر بال می پردازیم، تنها مولفه هایی که دارای زیروند w هستند (بیانگر بال) باقی می مانند. بنابرین تنها مولفه های ۴،۲،۱ و ۷ بردار سرعت باقی خواهند ماند.

درایه های ماتریس M نیز با استفاده از تعریف انرژی جنبشی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{M_{11} = mI}\\
&\boldsymbol{M_{12} = \bar{S}^T}\\
&\boldsymbol{M_{14} = C_w^T\int \Phi_{uw}dm_w}\\
&\boldsymbol{M_{17} = C_w^T\int \tilde{r}_w^T\Phi_{\psi w}dm_w}\\
&\boldsymbol{M_{21} = M_{12}^T}\\
&\boldsymbol{M_{22} = J}\\
&\boldsymbol{M_{24} = \int\left[C_w(\tilde{r}_{fw})^T + (\tilde{r}_w + \tilde{u}_w)^T C_w\right]^T\Phi_{uw}dm_w}\\
&\boldsymbol{M_{27} = \int\left[C_w(\tilde{r}_{fw})^T + (\tilde{r}_w + \tilde{u}_w)^T C_w\right]^T\tilde{r}_w^T\Phi_{\psi w}dm_w}\\
&\boldsymbol{M_{41} = M_{14}^T}\\
&\boldsymbol{M_{42} = M_{24}^T}\\
&\boldsymbol{M_{44} = \int \Phi_{uw}{}^T\Phi_{uw}\,dm_w}\\
&\boldsymbol{M_{47} = \int \Phi_{uw}\tilde{r}_w^T\,\Phi_{\psi w}dm_w}\\
&\boldsymbol{M_{71} = M_{17}^T}\\
&\boldsymbol{M_{72} = M_{27}^T}\\
&\boldsymbol{M_{74} = M_{47}^T}\\
&\boldsymbol{M_{77} = \int \Phi_{\psi w}{}^T\tilde{r}_w\tilde{r}_w^T\Phi_{\psi w}\,dm_w}
\end{aligned} \quad (۶۸)$$

ماتریس S و J به ترتیب عبارتند از؛ اندازه حرکت اول تغییر شکل هواپیما و ماتریس اینرسی تغییر شکل هواپیما.
این دو ماتریس به صورت زیر به دست می آیند:

$$\tilde{S} = \int [\tilde{r}_{fw} C_w^T + C_w^T(\tilde{r}_w + \tilde{u}_w)] C_w dm_w \qquad (۶۹)$$

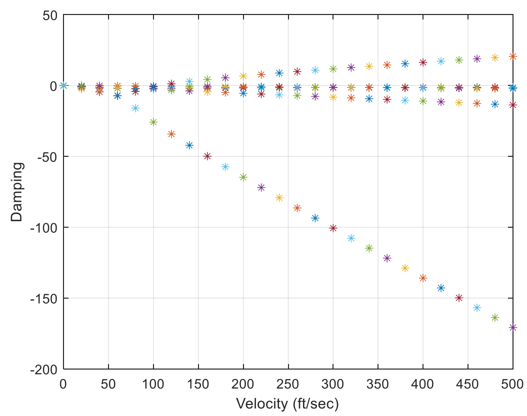
$$J = \int \left[C_w(\tilde{r}_{fw})^T + (\tilde{r}_w+\tilde{u}_w)^T C_w\right]^T \times \left[C_w(\tilde{r}_{fw})^T + (\tilde{r}_w+\tilde{u}_w)^T C_w\right] dm_w \qquad (۷۰)$$

۱-۴- اعتبارسنجی

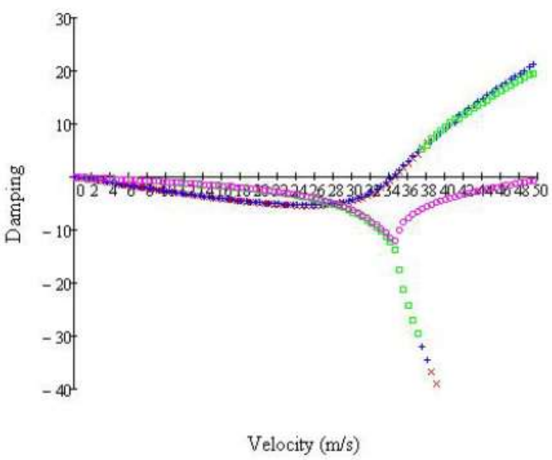
برای اعتبار سنجی معادلات حاکم، با استفاده از کد عددی نوشته شده در محیط نرم افزار MATLAB و حل آن برای پارامترهای ورودی موجود در مرجع [۱۹]، نتایج حاصل با نتایج گزارش شده در آن مرجع مقایسه شده است. اطلاعات ورودی مرجع [۱۹] در جدول ۲ قابل مشاهده است:

جدول ۲- پارامترهای ورودی مرجع [۱۹]

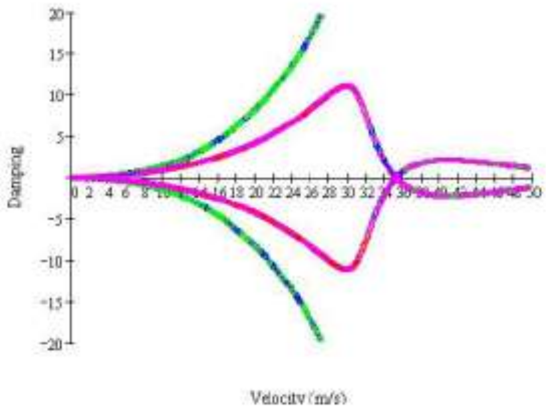
پارامتر	نماد	مقدار	واحد
جرم هوابر	m	۴۳.۲۱	lb
ممان اینرسی حول محور مرکز جرم	I	۰.۹۱	lb. ft^2
سختی خمشی	k_h	۱۴۷۲.۹۷	lb_f. ft
سختی پیچشی	k_θ	۱۹۲۴.۹۲	lb_f. ft/Rad
طول وتر	C	۵.۵۴	ft
ضریب فاصله محور الاستیک تا میانه وتر	a	-۰.۲	-
ضریب فاصله محور مرکز جرم تا میانه وتر	x_θ	۰.۴	-



شکل ۴- تغییرات میرایی برحسب سرعت جریان آزاد



شکل ۵- تغییرات میرایی برحسب سرعت جریان آزاد (مرجع [۱۹] روش p)



شکل۶- تغییرات میرایی برحسب سرعت جریان آزاد (مرجع [۱۹] روش p-k)

جدول ۳- ضرایب استفاده شده در تقریب تابع وگنر

	سرعت فلاتر (فوت بر ثانیه)
مرجع [۱۸] (روش p)	۱۰۴.۲۴
مرجع [۱۸] (روش p-k)	۱۰۷.۵۸
کار حاضر	۱۰۵.۵۰

از مشاهده شکل های ۴ تا ۶ و نیز جدول ۳ دریافت می‌شود که سرعت فلاتر برابر ۱۰۵.۵ فوت بر ثانیه است که با مرجع [۱۹] تطابق قابل قبولی را نشان می‌دهد.

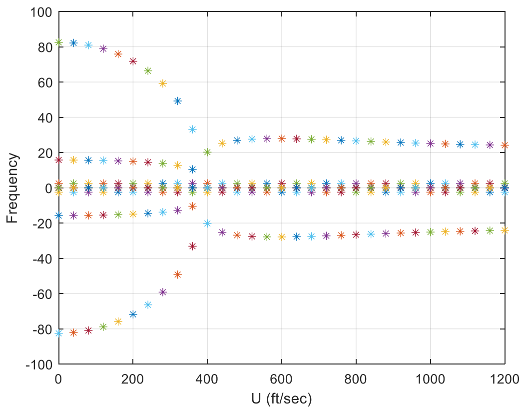
۲-۴- تحلیل فلاتر یک پرنده نمونه

در این بخش فلاتر یک پرنده نمونه با خواص موجود در جدول ۴ بررسی شده است. همانطور که از شکل‌های ۷و ۸ مشاهده می‌شود، سرعت فلاتر

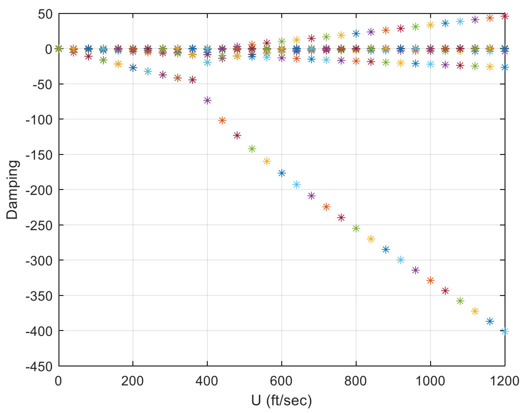
پرنده ۴۷۵ فوت بر ثانیه و فرکانس ناپایداری نیز حدود ۳۰ رادیان بر ثانیه خواهد بود.

جدول ۴- پارامترهای ورودی

پارامتر	نماد	مقدار	واحد
جرم پرنده	m	۴۰۳.۰۷۵	slug
ارتفاع پروازی	h	۲۵۰۰۰	ft
ماخ پروازی	$Mach$	۰.۴۱	-
ضریب لیفت بال	$C_{l_{\alpha w}}$	۷.۱۵	Rad^{-1}
ضریب لیفت دم	$C_{l_{\alpha e}}$	۲.۴۸	Rad^{-1}
ضریب گشتاور	$C_{m_{\alpha}}$	-۰.۰۷۷	Rad^{-1}
وتر بال	C	۶.۶۶	ft
وتر دم	Ce	۴.۴۸	ft
سرعت پرنده	V	۴۱۶.۷	ft/sec
	$\tilde{S}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -134.68 & 0 \\ 134.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		Lb.s^2
	$J^{(0)} = \begin{bmatrix} 15265.29 & 0.40 & -3135.41 \\ 0.40 & 47194.07 & 6.76 \\ -3135.41 & 6.76 & 58684.88 \end{bmatrix}$		Lb.ft.s^2



شکل۷- تغییرات فرکانس برحسب سرعت جریان آزاد



شکل ۸- تغییرات میرایی برحسب سرعت جریان آزاد

در ادامه برای بررسی اثر دم روی فلاتر پرنده کافی است شش معادله فلاتر دم به طور مشابه استخراج شده و به معادلات قبلی کوپل گردد:

$$\dot{q}_{ue} = s_{ue} \quad (۷۱)$$

$$\dot{q}_{\psi e} = s_{\psi e} \quad (۷۲)$$

$$\dot{\mathrm{P}}_{ue} = -K_{ue} q_{ue} - C_{ue} s_{ue} + Q_{ue} \quad (۷۳)$$

$$\dot{\mathrm{P}}_{\psi e} = -K_{\psi e} q_{\psi e} - C_{\psi e} s_{\psi e} + Q_{\psi e} \quad (۷۴)$$

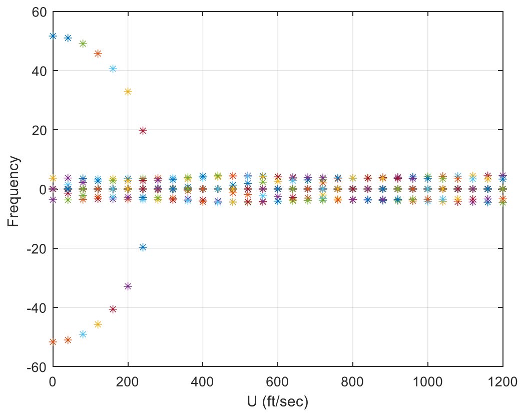
که در روابط فوق متغیرهای موجود به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\mathrm{V}}_e(r_e, t) = C_e V_f + [C_e(\tilde{r}_e + \tilde{u}_e)^T C_e]\omega_f + \tilde{r}_e^T \alpha_e + \mathrm{v}_e \quad (۷۵)$$

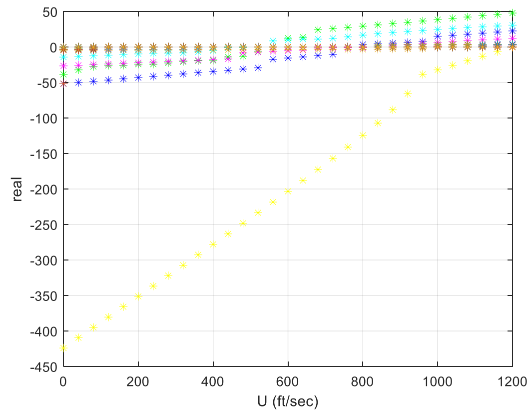
$Q_{\psi e}$ همان نیروهای ائرودینامیکی وارد بر دم است. بنابراین، درایه‌های ماتریس M مربوط به دم نیز با استفاده از تعریف انرژی جنبشی به دست می آید:

$$\begin{aligned} M_{15} &= C_e^T \int \Phi_{ue} dm_e \\ M_{18} &= C_e^T \int \tilde{r}_e^T \Phi_{\psi e} dm_e \\ M_{25} &= \int \left[C_e(\tilde{r}_{fe})^T + (\tilde{r}_e + \tilde{u}_e)^T C_e\right]^T \Phi_{ue} dm_e \\ M_{28} &= \int \left[C_e(\tilde{r}_{fe})^T + (\tilde{r}_e + \tilde{u}_e)^T C_e\right]^T \tilde{r}_e^T \Phi_{\psi e} dm_e \end{aligned} \quad (۷۶)$$

با تحلیل پایداری ۱۸ معادله فوق (۶ معادله صلب،۶ معادله الاستیک بال و ۶ معادله الاستیک دم) ناحیه پایداری و نیز سرعت و فرکانس فلاتر بدست می‌آید:



شکل۹- تغییرات فرکانس برحسب سرعت جریان آزاد



شکل ۱۰- تغییرات میرایی برحسب سرعت جریان آزاد

با توجه به نمودارهای شکل‌های ۹ و ۱۰ سرعت فلاتر حدود ۵۲۰ فوت بر ثانیه و فرکانس آن ۱۵ رادیان بر ثایه است که نشان می‌دهد اضافه کردن دم، سختی و در نتیجه سرعت فلاتر پرنده را افزایش می‌دهد.

۳-۴- اثر گاست

برای در نظر گرفتن اثر گاست در معادلات، در واقع سرعت القائی ناشی از حرکت سازه (ω_a) برابر می‌شود با $-\omega_g$. در حالت وجود گاست ترم اول معادلات تئودورسون وجود ندارد و ایرفویل به صورت خط در نظر گرفته می‌شود. با اعمال گاست ثابت به صورت زیر:

$$\begin{matrix} 0 & x+b>ut \\ w^{\circ} & x+b<ut \end{matrix}$$

و با قرار دادن $-\omega_g$ به جای ω_a در معادله تئودورسون و نیز تخمین زدن تابع castner به صورت زیر، معادلات آیروالاستیک حاصل می‌شود [۱۸]:

$$\psi(s) = 1 - \frac{1}{2}e^{-13s} - \frac{1}{2}e^{-s} \qquad (۷۷)$$

$$L_{gust} = 2\pi\rho b w^0 \psi(s) \qquad (۷۸)$$

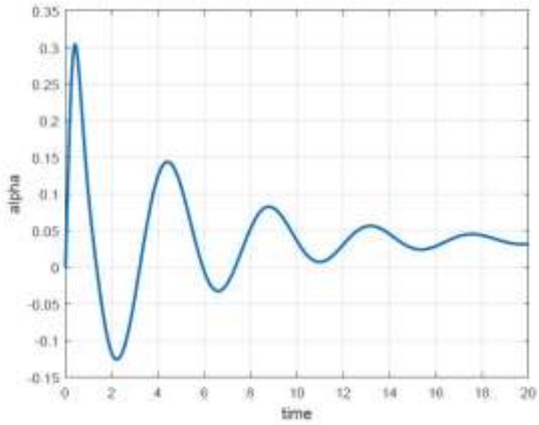
$$M_{gust} = b\left(\frac{1}{2}+a\right)L_{gust} \qquad (۷۹)$$

و شکل ماتریسی دستگاه معادلات ایروالاستیک به صورت زیر خواهد شد:

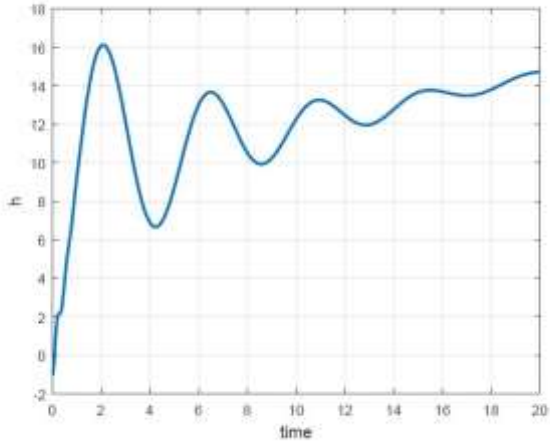
$$M_s\ddot{q} + C_s\dot{q} + K_s q = E(h,\alpha) + F(B_i) + \begin{Bmatrix} -L \\ M \end{Bmatrix}_{gust} \qquad (۸۰)$$

$$\dot{B}_i = \beta_i B_i + \omega_a(s) \qquad (۸۱)$$

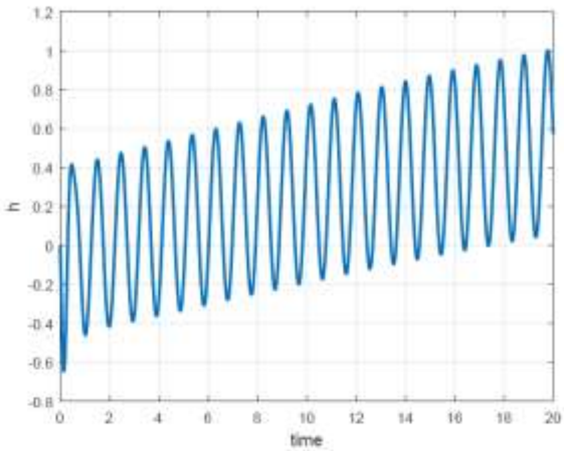
در ادامه با درنظرگرفتن گاست ثابت ۶ فوت بر ثانیه و تشکیل دستگاه فوق برای بال ایروالاستیک و کوپل آن به معادلات صلب بدنه دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی با ۱۲ معادله حاصل می‌گردد که برای حل آن از دستور ode45 در نرم افزار MATLAB (روش رانگ کوتا مرتبه۴) استفاده شده است که نتایج آن به صورت زیر است:



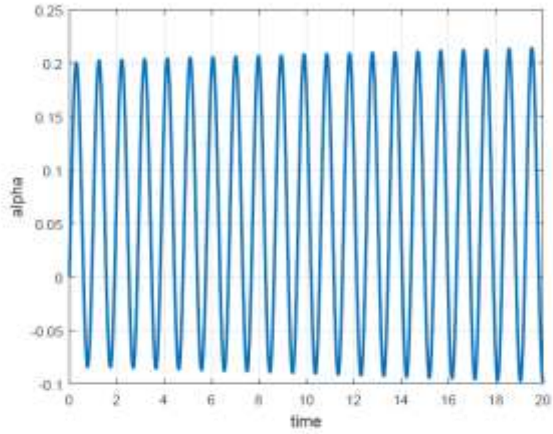
شکل ۱۱- پاسخ برای حالت U<Uf



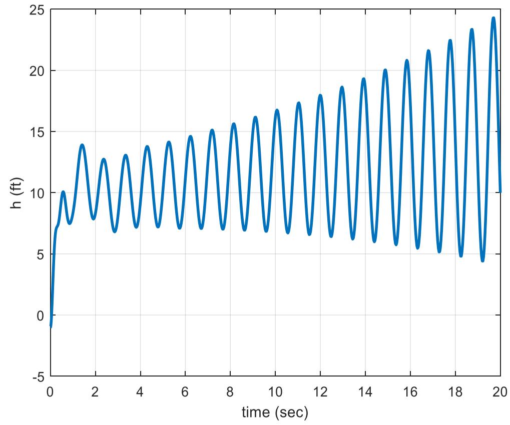
شکل ۱۲- پاسخ برای حالت U<Uf



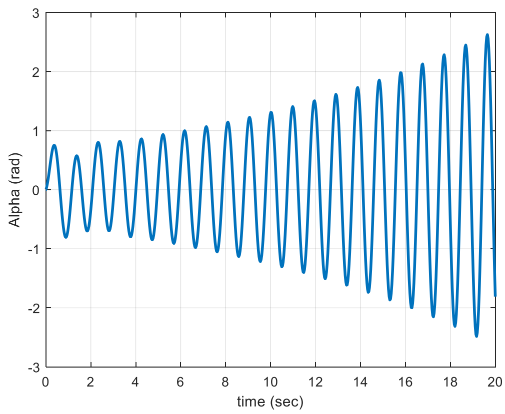
شکل ۱۳- پاسخ برای حالت U=Uf



شکل ۱۴- پاسخ برای حالت U=Uf



شکل ۱۵- پاسخ برای حالت U>Uf

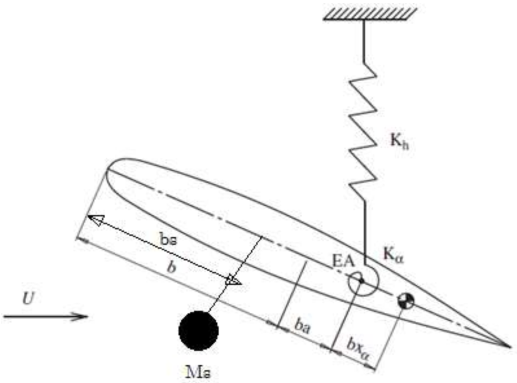


شکل ۱۶- پاسخ برای حالت U>Uf

همانطور که از شکل‌های ۱۱و ۱۲ مشاهده می‌شود، در سرعت های پایین‌تر از سرعت گاست پرنده پایداری خود را حفظ کرده و گاست وارد شده دمپ می‌شود. شکل‌های ۱۳ و ۱۴ بیان می‌کنند که در سرعت برابر با سرعت گاست پرنده در مرز پایداری قرار می‌گیرد و از مشاهده شکل‌های ۱۵ و ۱۶ دریافت می‌شود که در سرعت‌های بالاتر از سرعت گاست پرنده پایداری خود را از دست داده و پاسخ واگرا می‌شود.

۴-۴- اثر sloshing

اثر تلاطم سوخت بر فلاتر به صورت یک حرکت پاندولی که یک درجه آزادی دورانی به مسئله اضافه می‌کند، همانند شکل ۱۷ مدل شده است.



شکل ۱۷- شکل شماتیک اثر sloshing

برای حل مسئله با حضور اثر sloshing ابتدا انرژی‌های جنبشی و پتانسیل استخراج شده و سپس، با استفاده از معادلات لاگرانژ معادلات حاکم بر مسئله حاصل می‌شوند.

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{h}^2 + 2bx_\theta\dot{h}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{pandul}\left(\dot{\alpha} - \dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}M_s\dot{h}^2 \quad (۸۲)$$

$$U = \frac{1}{2}k_h h^2 + \frac{1}{2}k_\theta h^2 + M_s g(l(-\cos(-\theta)) + b_s\theta) \quad (۸۳)$$

$$I_p = I_c + mb^2x_\theta^2 \quad (۸۴)$$

برای بدست آوردن انرژی پتانسیل نیروی وزن آونگ، مبدا پتانسیل خط افقی مماس بر لبه حمله ایرفویل در نظر گرفته شده است.

$$(m + M_s)\ddot{h} + mbx_\theta\ddot{\theta} + k_h h = -L \quad (۸۵)$$

$$I_p\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + k_\theta\theta - M_s gl(\alpha - \theta) + M_s g b_s - I_{pandul}\left(\ddot{\alpha} - \ddot{\theta}\right) = M \quad (۸۶)$$

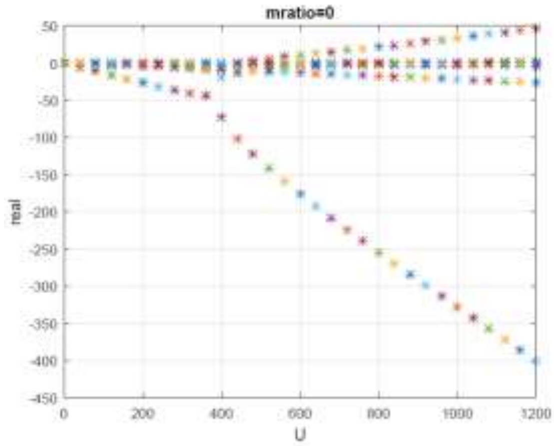
$$M_s gl(\alpha - \theta) + I_{pandul}\left(\ddot{\alpha} - \ddot{\theta}\right) = 0 \quad (۸۷)$$

با جاگذاری معادله سوم در معادله دوم دستگاه معادلات به صورت زیر برای معادلات الاستیک بال حاصل می‌شود:

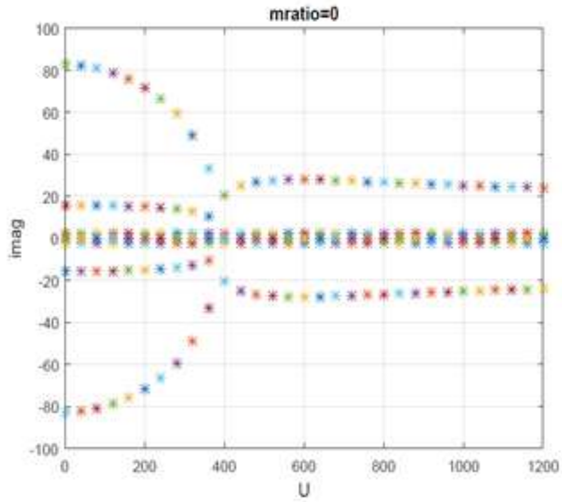
$$(m+M_s)\ddot{h}+mbx_\theta\ddot{\theta}+k_h h=-L \quad (۸۸)$$

$$I_p\ddot{\theta}+mbx_\theta\ddot{h}+k_\theta\theta+M_s g b_s=M \quad (۸۹)$$

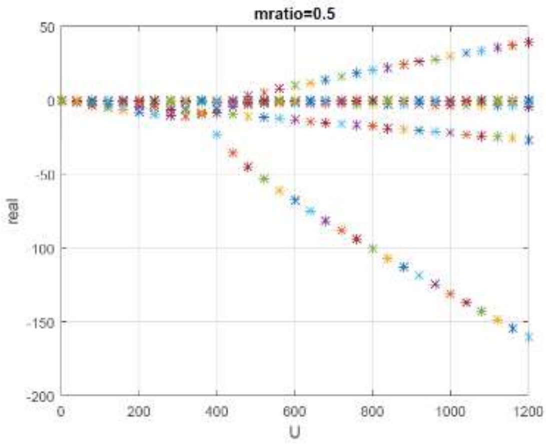
با کوپل کردن معادلات فوق با معادلات صلب بدنه برای $\frac{Ms}{m}$ مختلف نتایج زیر حاصل می‌شود:



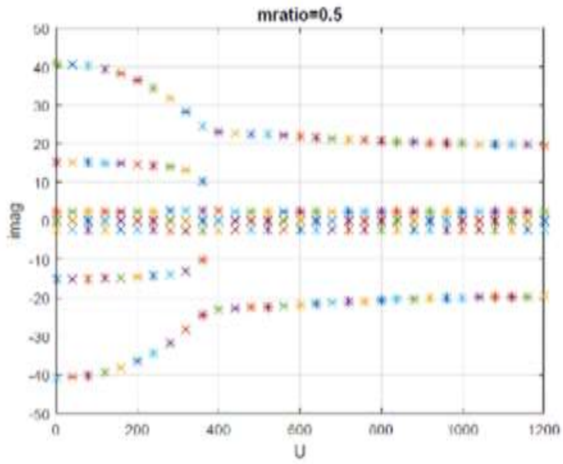
شکل ۱۸- دمپینگ برای نسبت جرمی ۰



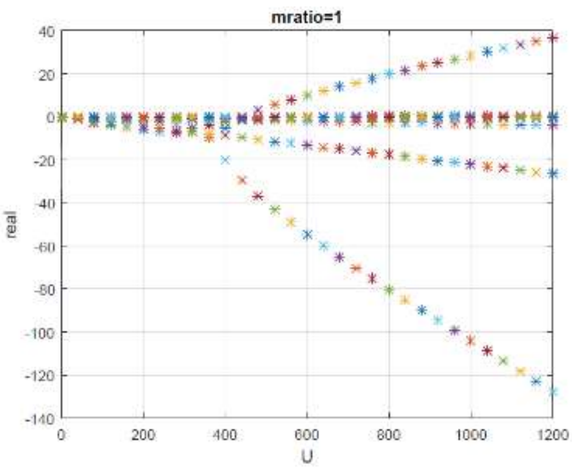
شکل ۱۹- فرکانس برای نسبت جرمی ۰



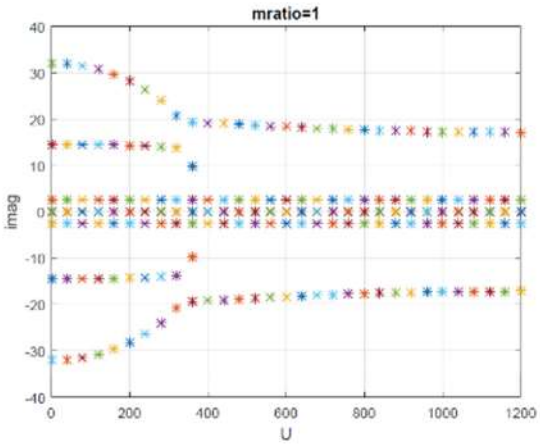
شکل ۲۰- دمپینگ برای نسبت جرمی ۰.۵



شکل ۲۱- فرکانس برای نسبت جرمی ۰.۵



شکل ۲۲- دمپینگ برای نسبت جرمی ۱



شکل ۲۳- فرکانس برای نسبت جرمی ۱

جدول ۵- تاثیر sloshing بر سرعت فلاتر

$\frac{Ms}{m}$	سرعت فلاتر(فوت بر ثانیه)
۰	۷۴۵
۰.۵	۶۰۰
۱	۴۵۰

با توجه به جدول ۵ و شکل های ۱۸ تا ۲۳ مشاهده می‌شود که با افزایش جرم سوخت سرعت فلاتر و همین طور فرکانس ناپایداری کاهش می‌یابد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله پایداری دینامیکی یک پرنده با سه درجه آزادی مطالعه شده است. معادلات حرکت صلب پرنده با استفاده از روش لاگرانژ استخراج شده است و سپس، معادلات الاستیک مربوط به بال و دم نیز استخراج شده و به معادلات صلب کوپل شده است. در مرحله بعد، معادلات به فضای حالت برده شده و ماتریس ضرایب استخراج شده است. در نهایت با استفاده از کد عددی MATLAB مسئله فلاتر با استفاده از روش p تحلیل و سرعت و فرکانس‌های بحرانی در حالت های مختلف بدست آمده است. در ادامه، اثر پارامترهایی مانند گاست و تلاطم سوخت روی پایداری پرنده بررسی شده و مشاهده گردید که پرنده پایداری لازم را در برابر گاست اعمالی دارا بوده و نیز افزایش جرم سوخت میتواند منجر به کاهش سرعت فلاتر پرنده گردد.

۶- مراجع

[1] Meirovitch, L. "A unified theory for the flight dynamics and aeroelasticity of whole aircraft." *Proceedings of the Eleventh Symposium on Structural Dynamics and Control*. Blacksburg, VA, 1997.

[2] *Prabhu, L., and J. Srinivas. "INTERNATIONAL JOURNAL OF RESEARCH IN AERONAUTICAL AND MECHANICAL ENGINEERING." (2014).*

[3] Moosavi M R, Naddaf Oskouei A, Khelli A. Flutter of subsonic wing, Thin wall Struct, 43, 4, (2005): 617-627.

[4] Haddadpour, H., and R. D. Firouz-Abadi. "Evaluation of quasi-steady aerodynamic modeling for flutter prediction of aircraft wings in incompressible flow." Thin-walled structures 44.9 (2006): 931-936.

[5] Park, J., Morgenthal, G., Kim, K., Kwon, S., & Law, K. Power evaluation for flutter-based electromagnetic energy harvester using cfd simulations. Paper presented at the Proceedings of first international conference on performance-based and life-cycle structural engineering (2012).

[6] Takahashi, I. Identification for critical flutter load and boundary conditions of a beam using neural networks. Journal of sound and vibration, 228(4). (1999):857-870.

[7] Mannarino, A., & Mantegazza, P. Nonlinear aeroelastic reduced order modeling by recurrent neural networks. Journal of Fluids and Structures, 48, (2014): 103-121.

[8] Fazelzadeh, S., Marzocca, P., Rashidi, E., & Mazidi, A. Effects of rolling maneuver on divergence and flutter of aircraft wing store. Journal of Aircraft, 47(1), (2010): 64-70.

[9] Housner, J. M., & Stein, M. Flutter analysis of swept-wing subsonic aircraft with parameter studies of composite wings (1974).

[10] Lottati, I. Aeroelastic stability characteristics of a composite swept wing withtip weights for an unrestrained vehicle. Journal of Aircraft, 24(11), (1987): 793-802.

[11] Patil, M. J., Hodges, D. H., & S. Cesnik, C. E. Nonlinear aeroelastic analysis of complete aircraft in subsonic flow. *Journal of Aircraft, 37*(5), (2000): 753-760.

[12] Qin, Z., and L. Librescu. "Aeroelastic instability of aircraft wings modelled as anisotropic composite thin-walled beams in incompressible flow." *Journal of fluids and structures* 18.1 (2003): 43-61.

[13] Farhat, Charbel, et al. "Modeling of fuel sloshing and its physical effects on flutter." *AIAA journal* 51.9 (2013): 2252-2265.

[14] Zhang, Jiaying, et al. "Aeroelastic model and analysis of an active camber morphing wing." *Aerospace Science and Technology* 111 (2021): 106534.

[15] Mastroddi, Franco, et al. "Aircraft-Fuel Sloshing ROMs for Aeroelastic Analyses." *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics. Savannah, Georgia, USA, paper*. Vol. 92. 2019.

[16] Meirovitch, L., and T. Stemple. "Hybrid equations of motion for flexible multibody systems using quasicoordinates." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 18.4 (1995): 678-688.

[17] Theodorsen, Theodore. *General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter*. No. NACA-TR-496. 1949.

[18] Theodorsen, Theodore, and I. E. Garrick. *Mechanism of flutter a theoretical and experimental investigation of the flutter problem*. NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION WASHINGTON DC, 1940.

[19] Kargarnovin, M. H., and A. Mamandi. "Aeroelastic response for pure plunging motion of a typical section due to sharp edged gust, using Jones approximation aerodynamics." *World Academy of Science, Engineering and Technology* 36.1 (2007): 154-161.