

کاربرد معیار تخریب انرژی پایه برای بررسی شکست مواد ارتوتروپیک با ترک در امتداد الیاف

علی فرهنگ^۱، مهدی فکور^{۲*}

۱- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، Alifarahnak@ut.ac.ir

۲- استاد، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، Mfakoor@ut.ac.ir

*نویسنده مخاطب

چکیده

امروزه یکی از پرکاربردترین مواد در ساخت سازه‌های مختلف، مواد کامپوزیتی است. این مواد کاربرد روزافزونی در صنایع مختلف از جمله صنایع هوافضایی و عمرانی دارند. ویژگی‌های منحصربه‌فرد کامپوزیت‌ها از جمله استحکام بالا و وزن کم سازه‌های کامپوزیتی، مقاومت در راستهای مختلف، عایق حرارتی و عایق الکتریکی بودن، میرایی بالا در برابر ارتعاشات و مقرون‌به‌صرفه نبودن به‌کارگیری مواد غیر کامپوزیتی در بسیاری از موارد، باعث شده است که مطالعه بر روی آن‌ها اهمیت زیادی پیدا کند. باوجود مزایای بی‌شمار مواد کامپوزیتی، ایجاد ترک و نقص در طی مراحل تولید و کار برای این نوع مواد بسیار محتمل است. یکی از مهم‌ترین مطالعات در بحث مواد کامپوزیتی، بررسی مکانیک شکست آن‌ها است، چراکه طراحی دقیق هر ساختار کامپوزیتی مستلزم در نظر گرفتن این ترک‌ها و نقص‌ها است. به همین دلیل، بررسی رفتار شکست مواد کامپوزیتی همیشه یک موضوع مهم برای مهندسان بوده است و بر اساس نتایج حاصل از تحلیل آسیب و شکست، سازه طراحی و تولید خواهد شد. در این پژوهش در چهارچوب مکانیک شکست الاستیک خطی به کمک معیار سای هیل (Tsai-Hill) معیار شکستی برای مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی II/I، ارائه خواهد شد. در این پژوهش، چوب به‌عنوان ماده ارتوتروپیک طبیعی مورد استفاده قرار گرفته است و اعتبار معیار پیشنهادی از طریق مقایسه با داده‌های تجربی حاصل از چوب‌های ارتوتروپیک موجود در پژوهش‌های گذشته سنجیده شده است.

واژه‌های کلیدی: معیار شکست مواد ارتوتروپیک، بارگذاری مود ترکیبی II/I، معیار سای هیل، مکانیک شکست الاستیک خطی

۱- مقدمه

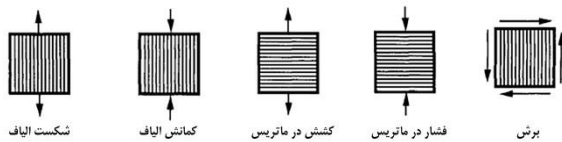
امروزه بررسی سلامت سازه‌های کامپوزیتی در صنایع مختلف اهمیت زیادی پیدا کرده است؛ چراکه آسیب ناگهانی در این سازه‌ها می‌تواند خسارات جبران‌ناپذیری به وجود آورد و موجب آسیب رسیدن به سراسر مجموعه شود. مواد کامپوزیتی رفتار شبه شکننده دارند و برخلاف مواد ایزوتروپ که رشد ترک و زاویه رشد ترک و رفتار منحنی حد شکست آن‌ها قابل پیش‌بینی است، در مواد ارتوتروپ رشد ترک با مکانیزم‌های مختلفی در نوک ترک همراه خواهد بود و این مکانیزم‌ها، پیش‌بینی رفتار ترک از جمله زمان و راستای رشد ترک و همچنین استخراج منحنی‌های حد شکست سازه را دشوار می‌کند. از طرفی با توجه به ساختار مواد ارتوتروپ و وجود الیاف در

راستهای مختلف، عموماً مود غالب بر این مواد در اکثر حالت‌های بارگذاری، مود ترکیبی II/I است.

از گذشته تا به امروز چوب یکی از پرکاربردترین ماده‌ها در صنعت‌های مختلف بوده است. چوب‌ها برای تهیه مسکن یا ادوات نقلیه مانند کشتی‌ها استفاده می‌شدند و هم‌اکنون نیز استفاده می‌شوند. چوب‌ها از گذشته تا به امروز از نظر اقتصادی بسیار مهم بوده‌اند. مصرف فعلی چوب در جهان برابر یک میلیون تن در سال است که با مقدار آهن و فولاد تولیدشده برابری می‌کند؛ اما ویژگی که چوب‌ها را بسیار خاص می‌کند این است که چوب‌ها ساختار غیر ایزوتروپیک دارند، در واقع چوب‌ها مواد مرکب ذاتی و طبیعی هستند و خواص مکانیکی و استحکام آن‌ها در راستهای مختلف متفاوت است؛ یعنی در چوب‌ها در یک نقطه می‌توان سه راستای عمود بر هم تعریف کرد که خواص ماده در هر یک از این راستهای متفاوت باشد. علت این ویژگی چوب‌ها تکامل تنه درخت است که باعث می‌شود درخت به بهترین شکل ممکن استوار و قائم بماند [۱]. در طی این مطالعه از چوب‌های ارتوتروپیک به‌عنوان ماده کامپوزیتی استفاده شده است؛ زیرا با توجه به ساختار مرکب و پیچیده چوب و همچنین با توجه به وجود سلول‌ها و ریز نقص‌های طبیعی موجود در آن، معیاری که بتواند شکست و رشد ترک در چوب‌ها را بررسی و پیش‌بینی کند، قطعاً قادر به پیش‌بینی شکست و رشد ترک در سایر مواد ارتوتروپیک خواهد بود.

در سال ۱۹۱۳ اینگلیس (Inglis) به بررسی تمرکز تنش اطراف یک شکاف دایروی و بیضوی در صفحات پرداخت و متوجه شد که تمرکز تنش اطراف شکاف دایروی بیشتر از تنش نامی است [۲]. کارهای اولیه اینگلیس با مطالعات کلاسیک گریفیث (Griffith) دنبال شد. گریفیث تشخیص داد که وجود نقص‌های کوچک بیضوی عامل کاهش چشم‌گیر استحکام شیشه از مقدار تئوری به مقدار واقعی اندازه‌گیری شده است. او یک معیار ترمودینامیکی برای شکست با در نظر گرفتن کل تغییر انرژی در طول ترک‌خوردگی استخراج کرد [۳]. در ادامه وسترگارد (Westergaard) [۴] و ویلیامز (Williams) [۵] عبارتی را برای میدان تنش نزدیک نوک ترک تیز استخراج کردند. اما روابط میدان تنش در مواد ارتوتروپیک نخستین بار توسط سیه (Sih) و همکاران ارائه شده بود. آن‌ها ضریب شدت تنش را به کمک این روابط محاسبه کردند [۶]. لخنیتسکی (Lekhnistkii) از دیگر افرادی بود که به بررسی روابط حاکم بر میدان تنش نوک ترک در مواد ارتوتروپیک پرداخت و معادله مشخصه را ارائه کرد [۷].

از گذشته تا به امروز معیارهای گوناگونی برای پیش‌بینی شکست مواد ارتوتروپیک در بارگذاری مود ترکیبی II/I ارائه شده است. معیارهای شکست در مواد ارتوتروپیک به دودسته اصلی معیارهای تجربی یا آزمایشگاهی و معیارهای تئوری تقسیم می‌شود. در گذشته به علت رویکرد پیچیده



شکل ۱- حالت‌های شکست در تک لایه کامپوزیتی

۱-۲- مکانیک چوب‌های ارتوتروپیک

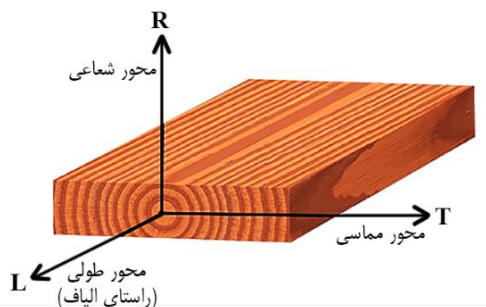
محورهای مختصات در چوب‌های ارتوتروپیک مطابق زیر است (شکل ۲):

- محور طولی (L): موازی با الیاف چوب
 - محور شعاعی (R): عمود بر حلقه‌های رشد چوب
 - محور مماسی (T): مماس بر حلقه‌های رشد چوب
- انتشار ترک در چوب‌های بیان‌شده به چندین حالت مختلف رخ می‌دهد که با دو پارامتر نشان داده می‌شود. به‌طور مثال انتشار ترک در راستای RL بدین معنا است که ترک در محور L یا طولی در حال رشد است و بر محور R عمود است و در کل در صفحه RL قرار دارد. سیستم‌های مختلفی برای رشد ترک در چوب‌های بیان‌شده وجود دارد که در شکل ۳ نمایش داده شده است. در طی این پژوهش از چوب‌های کاج اسکاتلندی، صنوبر قرمز و صنوبر نروژی استفاده شده است که استحکام و خواص مکانیکی و چقرمگی شکست آن‌ها در جدول ۱ بیان گردیده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی چوب‌های ارتوتروپیک استفاده‌شده در این تحقیق

نمونه چوب	صنوبر نروژی [۱۱]	کاج اسکاتلندی [۱۱]	صنوبر قرمز [۱۲]
E_L	۱۱/۸۴	۱۶/۳	۱۲/۷
E_R	۰/۸۱	۱/۱۰	۰/۹۸
E_T	۰/۶۴	۰/۵۷	۰/۶۳
G_{RL}	۰/۶۳	۱/۷۴	۰/۸۰
G_{TL}	-	۰/۶۷	۰/۷۴
ν_{LR}	۰/۳۸	۰/۴۷	۰/۳۷
ν_{LT}	۰/۵۶	۰/۴۵	۰/۴۲
ν_{TR}	۰/۳۴	۰/۳۱	۰/۳۰
K_{Ic}^{RL}	۰/۵۸	۰/۴۹	۰/۴۲
K_{IIc}^{RL}	۱/۵۲	۱/۳۲	۱/۶۶۵
K_{Ic}^{TL}	-	۰/۴۴	۰/۴۲
K_{IIc}^{TL}	-	۲/۰۵	۲/۱۹

در جدول ۱، E مدول الاستیسیته، G مدول برشی، ν ضریب پواسون و K_{Ic} ، K_{IIc} چقرمگی شکست ماده می‌باشد. واحد مدول الاستیسیته، مدول برشی بر حسب گیگاپاسکال (GPa) است و واحد چقرمگی شکست بر حسب مگاپاسکال - رادیکال متر ($MPa\sqrt{m}$) است.



شکل ۲- محورهای اصلی در چوب‌های ارتوتروپیک

پیش‌بینی شکست مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی، معیارهای ارائه‌شده اولیه بر اساس برآزش منحنی بر روی داده‌های تجربی بود. اسپنسر (Spencer) و بارنبی (Barnby) از افرادی بودند که یک معیار تجربی برای شکست مواد ارتوتروپیک ارائه دادند [۸]. معیارهای تجربی دقت بالایی در پیش‌بینی رفتار ترک حتی در حالت بارگذاری مود ترکیبی دارند؛ اما کاربرد کلی ندارند و نمی‌توان برای پیش‌بینی رفتار ترک در هر ماده ارتوتروپیک استفاده کرد و هر یک از این معیارها مختص یک نوع ماده است. معیارهای تئوری برخلاف معیارهای تجربی برای عموم مواد ارتوتروپیک کاربرد دارد و مربوط به ماده خاص نیست. مهم‌ترین مطالعات در زمینه ارائه معیارهای تئوری مواد ارتوتروپیک را فردی با نام جرنکوویست (Jernkvist) انجام داد. جرنکوویست در سال ۲۰۰۱ با استفاده از معیارهای شکست و تخریب مواد ایزوتروپیک و با کمک میدان تنش اطراف نوک ترک مواد ارتوتروپیک، به تعریف معیارهای جدیدی در شرایط کرنش صفحه‌ای پرداخت [۹]. او به کمک معیارهای شکست بیشترین نرخ آزادسازی انرژی کرنشی (SERR) و کمترین چگالی انرژی کرنشی (SED) و همچنین به کمک معیار تخریب بیشترین تنش اصلی (MPS)، سه معیار شکست برای مواد ارتوتروپیک در حالتی که ترک در راستای الیاف و عمود بر راستای الیاف بود را گسترش داد. معیارهای ارائه‌شده توسط وی بر اساس مکانیک شکست الاستیک خطی گسترش‌یافته بودند [۱۰].

در این پژوهش یک معیار تخریب (بدون ترک) مواد کامپوزیتی به نام سای هیل که مبتنی بر روش انرژی است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این معیار به کمک اصول و روابطی که بر مواد ارتوتروپیک حاکم است ساده‌سازی می‌گردد و در نهایت با کمک تعمیم این معیار، یک معیار پیش‌بینی شکست (ترک‌دار) برای مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II ارائه می‌شود. معیار ارائه‌شده در شرایطی که ترک در راستای الیاف قرار دارد به روش تحلیلی استخراج گردیده و به پیش‌بینی رشد ترک در این راستا می‌پردازد. منحنی‌های این مطالعه به کمک نرم‌افزار متلب رسم می‌شود و از نتایج آزمایشگاهی ارائه‌شده توسط جرنکوویست جهت اعتبارسنجی استفاده می‌گردد.

۲- مبانی تئوری مسئله

پدیده‌ها و فرایندهای خرابی در مقیاس میکرومکانیکی کامپوزیت‌ها با نوع بارگذاری متفاوت است و ارتباط نزدیکی با ویژگی‌های اجزای تشکیل‌دهنده کامپوزیت یعنی الیاف، ماتریس و فصل مشترک آن‌ها دارد. شکست در کامپوزیت‌ها را می‌توان به دو بخش شکست درون صفحه و شکست بین صفحات دسته‌بندی کرد. شکست درون صفحه شامل موارد زیر می‌شود:

- شکست الیاف از طریق کشش در راستای الیاف
 - کمانش الیاف از طریق فشار در راستای الیاف
 - کشش در ماتریس از طریق کشش در راستای عمود بر الیاف
 - فشار در ماتریس از طریق فشار در راستای عمود بر الیاف
 - برش یا جدایش الیاف از ماتریس از طریق اعمال برش
- مطابق مواردی که بیان شد و شکل ۱، در کامپوزیت‌ها پنج حالت تخریب درون صفحه داریم.

همچنین در مواد ارتوتروپیک پنج مؤلفه استحکامی وجود دارد. این پنج مؤلفه به ترتیب استحکام کششی در جهت الیاف (X_T)، استحکام کششی در جهت عمود بر الیاف (Y_T)، استحکام فشاری در جهت الیاف (X_C)، استحکام فشاری در جهت عمود بر الیاف (Y_C) و استحکام برشی داخل صفحه (S_3) است.

ترک (θ) و به زاویه بین ترک و الیاف (ϕ) وابسته است. رابطه ۴ نمایانگر مؤلفه‌های تنش نوک ترک ماده ارتوتروپیک است.

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta) \quad (4)$$

که ضرایب $f_{ij}(\theta)$ و $g_{ij}(\theta)$ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$f_{11}(\theta) = \text{Re} \left(\frac{\mu_1 \mu_2 (u_2 \mu_2 - u_1 \mu_1)}{\mu_1 - \mu_2} \right) \quad (5)$$

$$f_{22}(\theta) = \text{Re} \left(\frac{u_2 \mu_1 - u_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)$$

$$f_{12}(\theta) = \text{Re} \left(\frac{\mu_1 \mu_2 (u_2 - u_1)}{\mu_1 - \mu_2} \right)$$

$$g_{11}(\theta) = \text{Re} \left(\frac{u_2 \mu_2^2 - u_1 \mu_1^2}{\mu_1 - \mu_2} \right)$$

$$g_{22}(\theta) = \text{Re} \left(\frac{u_2 - u_1}{\mu_1 - \mu_2} \right)$$

$$g_{12}(\theta) = \text{Re} \left(\frac{u_1 \mu_1 - u_2 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right)$$

پاسخ حقیقی معادلات ۵، ضرایب میدان تنش f_{ij} و g_{ij} را می‌دهد. u_1

و u_2 نیز از طریق رابطه (۶) بدست می‌آید:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)}} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)}} \quad (6)$$

همچنین در روابط بیان شده μ_1 و μ_2 ریشه‌های معادله مشخصه (۷)

است که نخستین بار توسط لخنسکی ارائه شد:

$$C_{11} \mu^4 - 2C_{16} \mu^3 + (2C_{12} + C_{66}) \mu^2 - 2C_{26} \mu + C_{22} = 0 \quad (7)$$

معادله مشخصه ممکن است ریشه‌های مختلط یا کاملاً موهومی

داشته باشد.

۳- معیار شکست مود ترکیبی I/II

در این پژوهش معیار شکست به کمک روش مکانیک شکست الاستیک خطی ارائه شده است و فضای حاکم بر مسئله کرنش صفحه‌ای است.

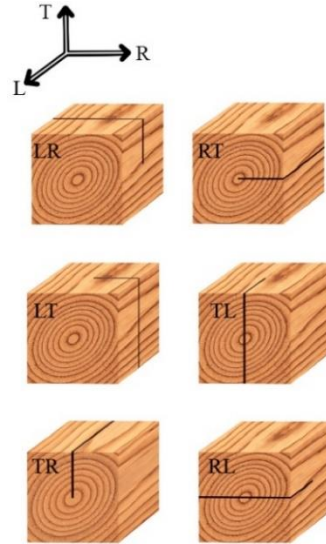
۳-۱- فرضیات اصلی مسئله

باتوجه به اینکه معیار مورد بررسی در این پروژه یعنی معیار سای هیل یک معیار تخریب مواد کامپوزیتی است چالش جدیدی را به وجود می‌آورد. در معیارهای تخریب مواد ارتوتروپیک مؤلفه‌های استحکامی ماده وجود دارند که در جدول ۲ این مؤلفه‌ها برای الیاف و ماتریس بیان گردیده است.

جدول ۲- مؤلفه‌های استحکامی ماده ارتوتروپیک

مؤلفه استحکامی	تعریف
X_T^{fiber} X_T^{matrix}	استحکام کششی در راستای افقی (راستای الیاف) برای ماتریس و الیاف
X_C^{fiber} X_C^{matrix}	استحکام فشاری در راستای افقی (راستای الیاف) برای ماتریس و الیاف
Y_T^{fiber} Y_T^{matrix}	استحکام کششی در راستای عمودی (عمود بر الیاف) برای ماتریس و الیاف
Y_C^{fiber} Y_C^{matrix}	استحکام فشاری در راستای عمودی (عمود بر الیاف) برای ماتریس و الیاف
S_S^{fiber} S_S^{matrix}	استحکام برشی برای ماتریس و الیاف

در مواد ارتوتروپیک هنگامی که ترک در راستای الیاف قرار می‌گیرد تحت هر مودی ترک همواره در راستای الیاف رشد خواهد کرد. در چنین شرایطی عملاً الیاف دیگر توانایی باربرداری در هیچ راستایی را نخواهند داشت؛ چراکه ترک در ماتریس ایزوتروپ به حرکت خود ادامه می‌دهد، بدین ترتیب می‌توان گفت ترم‌های استحکامی الیاف نیز اهمیتی نخواهند داشت.



شکل ۳- دستگاه‌های رشد ترک در چوب‌های ارتوتروپیک

۲-۲- میدان تنش اطراف نوک ترک ماده ارتوتروپیک

تانسور خواص مواد ارتوتروپیک در حالت سه‌بعدی ۹ مؤلفه مستقل دارد. به عبارتی دیگر برای تعریف خواص یک ماده ارتوتروپیک در حالت سه‌بعدی به ۹ مؤلفه و در حالت دوبعدی به ۴ مؤلفه احتیاج است. مؤلفه‌های ماتریس نرمی را با C_{ij} و در حالت کرنش صفحه‌ای با C'_{ij} نمایش می‌دهند. در معادلات پیش‌رو، ϵ_i کرنش محوری، σ_i تنش و γ_{ij} کرنش برشی است. ماتریس نرمی یک ماده ارتوتروپیک مطابق رابطه ۱ است.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\nu_{21} & -\nu_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\nu_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

مطابق ماتریس نرمی ۹ مؤلفه مواد ارتوتروپیک شامل $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ می‌شود که اندیس‌ها را می‌توان بر حسب $1=x, 2=y, 3=z$ نیز نوشت. مؤلفه‌های ماتریس نرمی را با C_{kl} نیز نمایش می‌دهند. از طرفی برای حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای ماتریس رابطه ۱ ساده‌تر می‌گردد به طوری که در حالت تنش صفحه‌ای فقط مؤلفه‌های $C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21}, C_{66}$ باقی می‌ماند و برای حالت کرنش صفحه‌ای به جای مؤلفه‌های C_{kl} باید از مؤلفه‌های C'_{kl} استفاده کرد که این مؤلفه‌ها از طریق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C'_{kl} = C_{kl} - \frac{C_{k3} C_{l3}}{C_{33}} \quad (k=1,2 \text{ and } l=1,2) \quad (2)$$

میدان تنش در اطراف نوک ترک مواد ارتوتروپیک نیز به کمک بسط

ویلیامز حاصل می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta) + O(r^0) + O(r^{1/2}) + O(r) + \dots \quad (i,j=1,2) \quad (3)$$

در رابطه بیان شده K_I و K_{II} ضرایب شدت تنش و r شعاع ناحیه نوک ترک و $f_{ij}(\theta)$ و $g_{ij}(\theta)$ ضرایب میدان تنش می‌باشد. در بسط ویلیامز مربوط به مواد ارتوتروپیک $f_{ij}(\theta)$ و $g_{ij}(\theta)$ که به زاویه ترک با المان نوک

بحرانی و معادله اصلی، معادله معیار و ضریب β برای یک ماده ارتوتروپیک با ترک موازی الیاف حاصل می‌گردد:

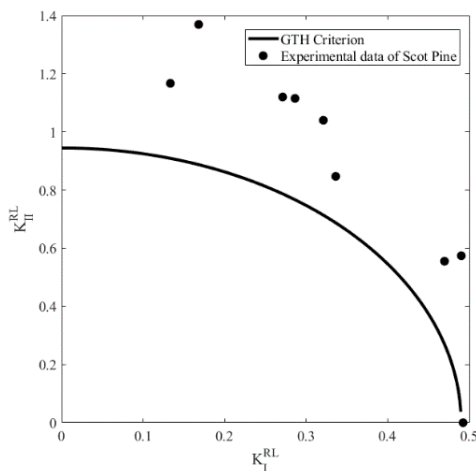
$$K_I^2 + \beta K_{II}^2 - K_{Ic}^2 = 0 \quad (13)$$

$$\beta = \frac{1}{n^2 (f_{11}(\theta)^2 - f_{11}(\theta)f_{22}(\theta) + f_{22}(\theta)^2)} \quad (14)$$

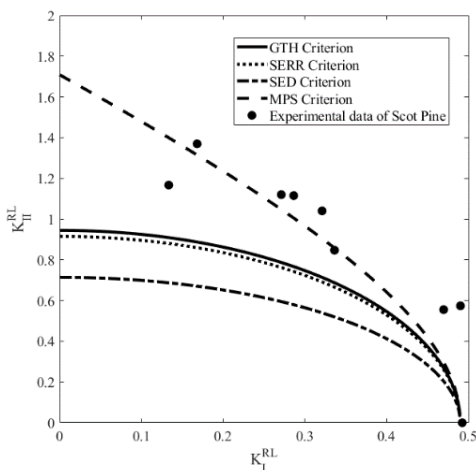
رابطه ۱۳ و ۱۴ معیار شکست سای هیل تعمیم‌یافته (GTH) برای مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II در شرایط ترک موازی الیاف است.

۳-۳- منحنی حد شکست معیار GTH

در این بخش منحنی حد شکست معیار GTH در شرایطی که ترک موازی با الیاف قرار گرفته باشد برای سه نوع چوب کاج اسکاتلندی، صنوبر نروژی و صنوبر قرمز در حضور داده‌های تجربی این چوب‌ها و همچنین در مقایسه با معیارهای شکست MPS، SER، SED که توسط جرنکوویست ارائه شده بود، در شکل‌های ۵ تا ۱۰ رسم شده است.

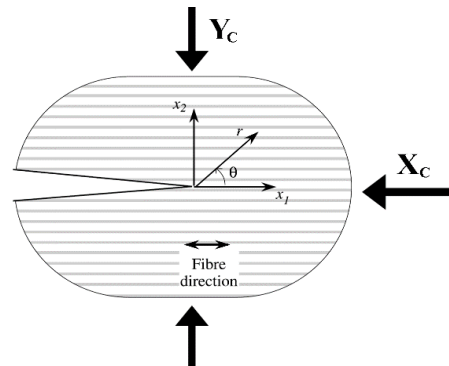


شکل ۵- منحنی حد شکست معیار GTH (در مقایسه با داده‌های تجربی چوب کاج اسکاتلندی [۹])



شکل ۶- منحنی حد شکست معیار GTH و سایر معیارها (در مقایسه با داده‌های تجربی چوب کاج اسکاتلندی [۹])

از طرفی هنگامی که ترک در راستای الیاف قرار می‌گیرد ترم‌های فشاری مانع رشد ترک و باعث بسته شدن آن می‌گردد و عملاً نمی‌توان از ترم‌های فشاری در روابط استفاده کرد، در نتیجه ترم‌های فشاری باقی‌مانده نیز برابر با صفر می‌گردد. شکل ۴ راستای عملکرد مؤلفه‌های استحکامی فشاری را نشان می‌دهد:



شکل ۴- استحکام‌های فشاری یک ماده ارتوتروپ که باعث بسته شدن ترک می‌گردد

در نتیجه تنها مؤلفه‌های استحکامی که در یک ماده ارتوتروپیک باقی می‌ماند، استحکام‌های کششی و برشی ماتریس است و باتوجه به اینکه ماتریس‌ها ایزوتروپ هستند استحکام کششی آن‌ها در هر راستا برابر خواهد بود:

$$X_T^{\text{matrix}} = Y_T^{\text{matrix}} = S_T \quad (8)$$

همچنین استحکام برشی مواد ایزوتروپ (شکونده) با استحکام کششی آن در هر راستا یک رابطه خطی دارد که به صورت رابطه زیر نمایش داده می‌شود:

$$S_s = n S_T \quad 0.4 < n < 0.5 \quad (9)$$

در رابطه بیان شده n نسبت استحکام برشی به استحکام کششی ماتریس ایزوتروپ، یک جامد ارتوتروپیک می‌باشد که این مقدار برای ماتریس ایزوتروپیک ۰/۵ گزارش شده است.

۳-۲- ارائه معیار شکست سای هیل تعمیم یافته

با فرضیات بیان شده در بخش قبل معیار سای هیل ساده‌سازی می‌گردد. رابطه ۱۰ معادله اصلی معیار تخریب سای هیل است [۱۳ و ۱۴]:

$$\frac{\sigma_x^2}{X^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{X^2} + \frac{\sigma_y^2}{Y^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{S_s^2} = 1 \quad (10)$$

به کمک فرضیات بیان شده رابطه ۱۰ ساده‌سازی می‌گردد:

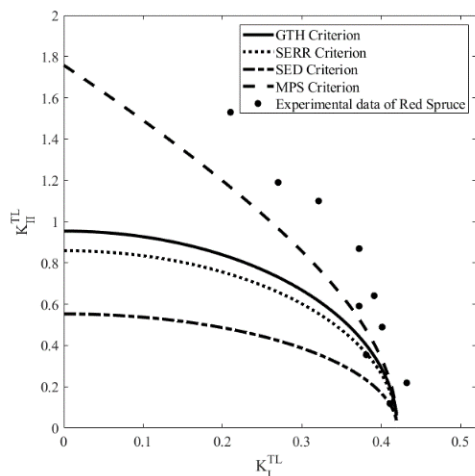
$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + \frac{\tau_{xy}^2}{n^2} = S_T^2 \quad (11)$$

در نتیجه عبارات سمت چپ تساوی معادله ۱۱ بیانگر معادله ساده‌شده سای هیل برای تعمیم است. در ادامه ابتدا میدان تنش نوک ترک ماده ارتوتروپیک که در رابطه ۴ بیان گردیده است در معادله ساده‌شده سای هیل جایگذاری می‌گردد.

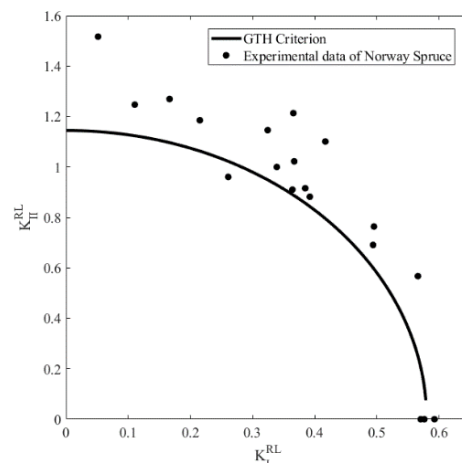
با جایگذاری میدان تنش در معادله ساده‌شده سای هیل رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{2\pi r} \left[K_I^2 (f_{11}(\theta)^2 - f_{11}(\theta)f_{22}(\theta) + f_{22}(\theta)^2) + \frac{K_{II}^2}{n^2} \right] = 0 \quad (12)$$

ترک زمانی رشد می‌کند که مقدار تابع به یک مقدار بحرانی برسد و از طرفی زمانی مقدار تابع بحرانی می‌شود که ماده تحت بارگذاری مود I خالص (Pure mode I) قرار بگیرد. بدین ترتیب با برابر قراردادن حالت



شکل ۱۰- منحنی حد شکست معیار GTH و سایر معیارها (در مقایسه با داده‌های تجربی چوب صنوبر قرمز [۹])



شکل ۷- منحنی حد شکست معیار GTH (در مقایسه با داده‌های تجربی چوب صنوبر نروژی [۱۰])

۴- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

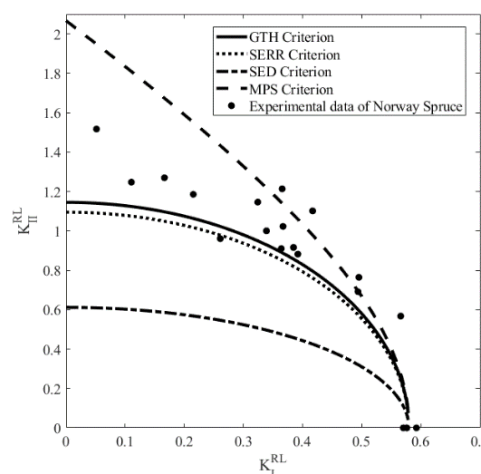
در این پژوهش برای نخستین بار از طریق تعمیم یک معیار شکست بدون ترک مواد ارتوتروپیک (معیار سای‌هیل)، معیار شکستی برای مواد ارتوتروپیک ترک‌دار استخراج شد (معیار GTH) که یکی از مهم‌ترین فعالیت‌های صورت‌گرفته در این مطالعه بود.

با بررسی منحنی حد شکست، برای معیار GTH که در این مقاله استخراج گردید و مقایسه آن با سایر معیارهای شکست مواد ارتوتروپیک که پیش‌تر توسط جرنکوویست استخراج شده بود [۹]، نتایج قابل‌توجهی از رفتار این معیار در پیش‌بینی شکست این مواد حاصل گردید.

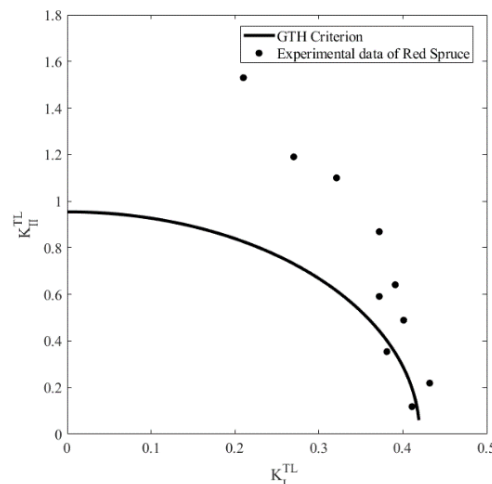
شکل‌های ۵ و ۷ و ۹ منحنی حد شکست معیار GTH در حضور داده‌های تجربی چوب‌های ارتوتروپیک را نشان می‌دهد. مطابق این شکل‌ها، منحنی حد شکست معیار GTH رفتار محافظه‌کارانه‌ای از خود نشان می‌دهد و منحنی پایین‌تر از داده‌های تجربی قرار می‌گیرد. اما با این حال منحنی حد شکست مربوط به چوب صنوبر نروژی به داده‌های تجربی آن بسیار نزدیک است (شکل ۷).

معیارهایی که مبتنی بر انرژی به بررسی رشد ترک می‌پردازند اصولاً معیارهای محافظه‌کارانه‌ای هستند. معیارهای SED و SERR از جمله معیارهای شکست مبتنی بر انرژی می‌باشند. معیار GTH نیز مبتنی بر انرژی است و پیش‌بینی محافظه‌کارانه آن نیز به همین علت می‌باشد.

شکل‌های ۶ و ۸ و ۱۰ منحنی حد شکست معیار GTH در حضور داده‌های تجربی چوب‌های ارتوتروپیک برای معیارهای شکست مختلف را نشان می‌دهد. مطابق این شکل‌ها، منحنی حد شکست معیار GTH از معیارهای SED و SERR بالاتر و به داده‌های تجربی نزدیک‌تر است. همچنین منحنی حد شکست معیار GTH از معیار MPS که یک معیار برپایه تنش است، پایین‌تر و از داده‌های تجربی دورتر است. در نتیجه می‌توان گفت معیار شکست GTH در مقایسه با سایر معیارهای شکست مبتنی بر انرژی عملکرد بهتری در پیش‌بینی شکست مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II دارد. همچنین با توجه به اینکه توانایی بررسی شکست چوب‌های ارتوتروپیک را دارد، شکست در سایر مواد ارتوتروپیک را به خوبی پیش‌بینی می‌کند.



شکل ۸- منحنی حد شکست معیار GTH و سایر معیارها (در مقایسه با داده‌های تجربی چوب صنوبر نروژی [۱۰])



شکل ۹- منحنی حد شکست معیار GTH (در مقایسه با داده‌های تجربی چوب صنوبر قرمز [۹])

۵- مراجع

- [1] J. Bodig and B. Jayne, "Mechanics of wood and wood composites (Malabar, Fla, ed: Krieger Pub, 1993.

- [2] C. E. Inglis, "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners," *Trans Inst Naval Archit*, vol. 55, pp. 219-241, 1913.
- [3] A. A. Griffith, "VI. The phenomena of rupture and flow in solids," *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, vol. 221, no. 582-593, pp. 163-198, 1921.
- [4] H. M. Westergaard, "Bearing pressures and cracks: Bearing pressures through a slightly waved surface or through a nearly flat part of a cylinder, and related problems of cracks," 1939.
- [5] M. Williams, "The stresses around a fault or crack in dissimilar media," *Bulletin of the seismological society of America*, vol. 49, no. 2, pp. 199-204, 1959.
- [6] G. C. Sih, P. Paris, and G. Irwin, "On cracks in rectilinearly anisotropic bodies," *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 1, no. 3, pp. 189-203, 1965.
- [7] S. G. Lekhnitskii, P. Fern, J. J. Brandstatter, and E. Dill, "Theory of elasticity of an anisotropic elastic body," *Physics Today*, vol. 17, no. 1, p. 84, 1964.
- [8] B. Spencer and J. Barnby, "The effects of notch and fibre angles on crack propagation in fibre-reinforced polymers," *Journal of Materials Science*, vol. 11, no. 1, pp. 83-88, 1976.
- [9] L. O. Jernkvist, "Fracture of wood under mixed mode loading: I. Derivation of fracture criteria," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 68, no. 5, pp. 549-563, 2001.
- [10] L. O. Jernkvist, "Fracture of wood under mixed mode loading: II. Experimental investigation of *Picea abies*," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 68, no. 5, pp. 565-576, 2001.
- [11] F. F. Kollman, "Principles of wood science and technology. Vol II," *Wood based materials.*, pp. 415-417, 1975.
- [12] J. Bodig and J. R. Goodman, "Prediction of elastic parameters for wood," *Wood Science*, vol. 5, no. 4, pp. 249-264, 1973.
- [13] S. W. Tsai, "Strength theories of filamentary structure," *Fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites*, 1968.
- [14] R. Hill, "The Mathematical Theory of Plasticity: Oxford Univ," *Press New York*, 1950.