

تعیین وضعیت بهینه مقاوم ماهواره مبتنی بر الگوریتم بهینه‌یابی کمینه-بیشینه

حسین قدیری^{1*}، رضا اسماعیل زاده²، رضا زردشتی³

دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، لویزان

1- دانشجوی دکترا، hosseinghadiri66@gmail.com

2- دانشیار، resmael@gmail.com

3- دانشیار، reza.zardashti@dena.kntu.ac.ir

*نویسنده مخاطب

چکیده

عموماً روش‌های مشخص کردن جهت‌گیری ماهواره با عناوین تعیین وضعیت و تخمین وضعیت شناخته می‌شوند. مسئله تعیین وضعیت ماهواره منجر به حل مسئله وهبا می‌گردد. به منظور به کارگیری مسئله وهبا نیاز به حداقل دو بردار اندازه‌گیری مستقل از هم و دو بردار متناظر در دستگاه مرجع است. اندازه‌گیری‌های سنسور به دلیل وجود نویز و ناهمراستایی دقیق نیستند و بردارهای مرجع نیز به دلیل اینکه تقریبی از این اندازه‌گیری‌ها هستند دارای نامعینی و عدم قطعیتند. لیکن، این عدم قطعیت‌ها و نامعینی‌ها در مسئله وهبا به طور صریح در نظر گرفته نشده‌اند. بنابراین دقت تخمین روش‌های مبتنی بر مسئله وهبا وابسته به دقت بردارهای ورودی است. این مسئله هنگام استفاده از حسگرهای ارزان قیمت بحرانی‌تر است. به منظور رفع این کاستی، فرض شده است تمامی نامعینی‌ها کراندار هستند و خطاهای مدل‌سازی و نویز اندازه‌گیری‌ها به کمک حساب بازه‌ای مدل شده است. در نتیجه، مسئله تعیین وضعیت از یک مسئله تک هدفه به یک مسئله بهینه‌سازی مقاوم چندهدفه با دو تابع هدف و قیود غیرخطی تبدیل می‌شود. از آنجا که حل مسئله چندهدفه با حلگرهای اکتشافی نظیر NSGA II، زمانبر است، تابع چندهدفه حاصل با استفاده از الگوریتم بهینه‌یابی کمینه بیشینه حل گردید. در این حالت، پاسخ به دست آمده ضمن داشتن حداقل خطای تخمین دارای زمان اجرای بسیار کمتری است و مناسب جهت کاربردهای به هنگام می‌باشد. عملکرد روش پیشنهادی برای حرکت در مدار یک ماهواره، مورد بررسی قرار گرفته است و مشخص گردید این روش در مقایسه با روش‌های رایج، عملکرد بهتری در حضور عدم قطعیت دارد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل بازه‌ای، ماهواره، تعیین وضعیت، تخمین مقاوم، بهینه‌سازی چندهدفه

از اندازه‌گیری‌های نویزی صورت می‌پذیرد که توسط حسگرهایی نظیر حسگر خورشید، مغناطیس‌سنج، شتاب‌سنج، ژيروسکوپ و... به دست می‌آیند. از اینرو، دقت، قوام و سرعت انجام محاسبات یا به عبارتی هزینه محاسباتی، سه مشخصه بسیار مهم هر سیستم تعیین وضعیت است. بنابراین در مسئله تعیین وضعیت سعی بر این است که با اندازه‌گیری‌های نویزی این سه مشخصه محقق گردد.

فرآیند طراحی این زیرسیستم دارای پیشینه طولانی است، لیکن، توسعه ماهواره‌های کوچک و محدودیت‌های متعدد ناشی از قیود فیزیکی اعمال شده بر روی آن‌ها، طراحی این زیرسیستم را تحت تأثیر قرار داده است و با چالش‌های جدیدی رو به رو کرده است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به محدودیت در تولید توان مورد نیاز و حجم محدود در دسترس اشاره کرد. از طرفی استفاده از حسگرهای ارزان قیمت با وزن و مصرف انرژی کمتر چالش‌هایی نیز به همراه دارد. مهم‌ترین چالش در این زمینه، دقت کمتر اندازه‌گیری‌های این حسگرها نسبت به دیگر انواع حسگرهاست.

مباحث مربوط به مشخص کردن نحوه قرارگیری ماهواره نسبت به یک دستگاه مرجع با عناوین تعیین وضعیت (Attitude determination) و تخمین وضعیت (Attitude estimation) شناخته می‌شوند. تعیین وضعیت به رویکردهای بدون حافظه‌ای اشاره دارد که وضعیت سیستم را نقطه به نقطه در هر گام زمانی تعیین می‌کنند. اغلب این روش‌ها خصوصیات احتمالاتی اندازه‌گیری‌های وضعیت را به حساب نمی‌آورند. تخمین وضعیت به رویکردهای حافظه‌دار اشاره دارد. رویکرد حافظه‌دار به معنای استفاده از مدل دینامیکی حرکت سیستم در ساختار فیلتر است، به طوری که داده‌های اندازه‌گیری شده در طول زمان به منظور استفاده در تخمین حفظ می‌شوند [1]. در این روش‌ها خصوصیات احتمالاتی اندازه‌گیری‌های وضعیت از جمله میانگین، واریانس و انحراف معیار به حساب می‌آیند. از جمله روش‌های تخمین وضعیت می‌توان به فیلتر کالمن اشاره نمود.

دسته‌ای از روش‌های تعیین وضعیت ماهواره، با نام روش‌های نقطه به نقطه یا تک-نقطه‌ای شناخته می‌شوند. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های حداقل مربعات، روش کواترنیون، روش تخمین کواترنیون [2، 3]، روش تخمینگر بهینه کواترنیون [4-6]، تجزیه مقادیر منفرد [7]، روش ماتریس وضعیت بهینه [8] و روش تخمینگر ماتریس وضعیت خطی سریع [9] اشاره کرد. تعیین وضعیت با این روش‌ها منجر به حل مسئله وهبا می‌گردد. این روش‌ها همانطور که از نامشان پیداست تنها از داده‌های زمان

1- مقدمه

یکی از زیر سیستم‌های اصلی و مهم ماهواره، زیرسیستم تعیین وضعیت است. تعیین وضعیت فرآیندی برای تخمین وضعیت فضاپیما نسبت به یک دستگاه مرجع اینرسی است. سیستم تعیین وضعیت، ورودی‌های سیستم کنترل را تأمین می‌کند. بنابراین هر چه داده‌های خروجی این سیستم دقیق‌تر باشد، کنترل مطلوبتری خواهیم داشت. از طرفی تخمین با استفاده

حالت برای تعیین وضعیت استفاده می‌کنند. خصوصیت دیگر روش‌های نقطه به نقطه، عدم استفاده از مدل دینامیکی سیستم برای تعیین وضعیت می‌باشد. به همین دلیل این روش‌ها، الگوریتم‌های استاتیکی نیز نامیده می‌شوند. این روش‌ها از تمامی بردارهای اندازه‌گیری در همان گام زمانی استفاده می‌کنند. بنابراین روش‌های نقطه به نقطه جزء روش‌های دسته‌ای قرار می‌گیرند. این روش‌ها دارای زمان اجرای کمتر نسبت به دیگر روش‌ها هستند و مستقل از دینامیک سیستم می‌باشند و ماهیتی غیرخطی دارند. دسته دیگر روش‌های تعیین وضعیت، رویکردهای بازگشتی هستند که تمامی داده‌های قبلی را بدون بکارگیری دینامیک سیستم در نظر می‌گیرند که از آن جمله می‌توان به روش بازگشتی تخمین کواترنیون [10]، تخمین کواترنیون بازگشتی بهینه [11]، تخمین کواترنیون تعمیم یافته [12] و فیلتر بازگشتی وضعیت بهینه ترتیبی [13] اشاره کرد.

روش‌های نقطه به نقطه به داده‌های مربوط به برخی کمیت‌های برداری نظیر میدان مغناطیسی زمین، بردار جهت خورشید و ... در دو مرجع مختلف احتیاج دارند. از آنجا که علاوه بر حسگرها که دارای خطاهایی نظیر ناهمراستایی، بایاس، نویز و ... هستند، مدل‌های استخراج شده از کمیت‌های مربوط به آن‌ها نیز دارای نامعینی هستند. از اینرو، با افزایش سطح عدم قطعیت‌ها، دقت تعیین وضعیت با روش‌های استاتیکی کاهش می‌یابد. به طور مثال میدان مغناطیسی زمین را در نظر بگیرید. این میدان را می‌توان با مغناطیس‌سنجی که روی بدنه ماهواره نصب می‌شود اندازه‌گیری کرد. این اندازه‌گیری‌ها خود دارای عدم قطعیت هستند، به طوری که شامل خطاهای نصب، نویز، ناهمراستایی، بایاس و خطاهای ناشی از میدان‌های مغناطیسی اطراف و ... می‌شوند. از طرفی همیشه یک خطا بین میدان مغناطیسی محاسبه شده با استفاده از مدل‌های میدان مغناطیسی زمین از جمله مدل IGRF و WMM با مقادیر واقعی وجود دارد که حدود 20 درصد برآورد شده است. اگر مدل‌هایی با مرتبه پایین‌تر استفاده شود 10 درصد به مقدار این خطا افزوده می‌شود. تمام این قبیل نامعینی‌ها باعث خطای تعیین وضعیت می‌شوند. با در نظر گرفتن یک عدم قطعیت برابر 30 درصد مقدار نامی بردارهای اندازه‌گیری، الگوریتم‌های تعیین وضعیت استاتیکی مرسوم دارای خطاهای بزرگی خواهند شد. بنابراین هنگامی که نامعینی‌ها بزرگ‌اند، بررسی قوام سیستم تعیین وضعیت یک نیازمندی اساسی به حساب می‌آید. اگرچه خطای تخمین وضعیت با روش‌های نقطه به نقطه وابسته به خطاهای مدل‌سازی و اندازه‌گیری هستند، لیکن، نامعینی‌های مدل‌سازی و اندازه‌گیری به طور مستقیم در روش‌ها در نظر گرفته نمی‌شوند. به طوری که هر چه خطای اندازه‌گیری‌ها بیشتر باشد، متناسب با آن خطای تخمین وضعیت نیز افزایش خواهد یافت. این کاستی هنگامی بحرانی‌تر می‌گردد که از سنسورهای ارزان قیمت جهت اندازه‌گیری استفاده شود.

روش‌های کمی در تحقیقات قبلی وجود دارد که این نامعینی‌ها را در نظر می‌گیرند. احمد و کریگان [14] مسئله وهبا را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی کمینه-بیشینه با استفاده از نرم بینهایت نامعینی‌ها بازنویسی کردند. سپس با جایگزینی نرم بینهایت با یک کران بالا، مسئله بهینه‌سازی را به یک مسئله کمینه‌سازی نزدیک بهینه تبدیل نمودند. روش پیشنهادی دارای یک تابع هدف و قید درجه دو است. در مرجع [15]، این مسئله کمینه‌سازی تقریب زده شده به یک مسئله برنامه‌ریزی نیمه معین با تابع هدف خطی و قیود ناتساوی ماتریسی خطی، تعمیم یافته است. در مرجع [16] مسئله وهبا با استفاده از روش حداقل مربعات کوتاه شده

2- تعریف مسئله

اساس و بنیاد اکثر الگوریتم‌های تعیین وضعیت تک نقطه‌ای، مسئله وهبا است. مسئله وهبا یک مسئله حداقل مربعات وزن دار و غیرخطی برای تعیین ماتریس وضعیت بهینه به کمک مجموعه‌ای از حداقل دو بردار اندازه‌گیری مستقل است. تابع عملکردی که در این مسئله باید کمینه گردد به صورت زیر تعریف می‌شود [20]:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i \|b_i - Ar_i\|^2 \quad (1)$$

a_i ضریب وزنی و عددی مثبت و اسکالر است. A ماتریس وضعیت، b_i و r_i به ترتیب بردار اندازه‌گیری و بردار مرجع هستند. مسئله وهبا این قابلیت را دارد که هر تعداد از بردارهای اندازه‌گیری نویزی که به طور همزمان محاسبه می‌شوند را برای به‌دست‌آوردن وضعیت بهینه پردازش کند. توانایی این روش در ارائه پاسخ‌های بهینه سراسری بدون هیچگونه خطی‌سازی و فرض‌های محدود کننده مانند در نظر گرفتن زوایای کوچک، موجب توجه بسیاری از محققان به آن شده است.

حل‌های بسیاری برای مسئله وهبا ارائه گردیده است. در اکثر حل‌های این مسئله، تابع عملکرد به شکلی دیگر بیان می‌شود. رویکردی کاربردی در این زمینه استفاده از کواترنیون‌ها برای نمایش تابع عملکرد است. داونپورت [21] نشان داد که استفاده از کواترنیون‌ها برای تابع عملکرد مسئله وهبا منجر به تابع عملکردی درجه دو می‌گردد و پاسخ بهینه آن با حل مسئله مقادیر ویژه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} Kq &= \lambda q \\ K &= \begin{bmatrix} B + B^T - \text{tr}(B)I_3 & Z \\ Z^T & \text{tr}(B) \end{bmatrix} \\ B &= \sum_{i=1}^N a_i b_i r_i^T \\ Z &= \sum_{i=1}^N a_i (b_i \times r_i) \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه (2)، λ مقدار ویژه، q بردار ویژه متناظر با آن، و K ماتریسی متقارن و 4×4 است. حل داونپورت که با عنوان روش q شناخته می‌شود، کواترنیون‌های وضعیت را به جای ماتریس وضعیت محاسبه می‌کند. همانطور که از رابطه (2) مشخص است، بردار کواترنیون، یک بردار ویژه برای ماتریس K می‌باشد. وضعیت بهینه مورد نظر معادل بردار ویژه ماتریس K است. ماتریس K دارای چهار مقدار ویژه و چهار بردار ویژه متناظر با

4- تعیین وضعیت بهینه مقاوم مبتنی بر حساب بازه ای با جایگذاری رابطه (4) در رابطه اصلی (1) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i [(b_i^m + \Delta b_i) - A(r_i^m + \Delta r_i)]^T [(b_i^m + \Delta b_i) - A(r_i^m + \Delta r_i)] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i [(b_i^m + \Delta b_i)^T (b_i^m + \Delta b_i) - (b_i^m + \Delta b_i)^T A(r_i^m + \Delta r_i) - (r_i^m + \Delta r_i)^T A^T (b_i^m + \Delta b_i) + (r_i^m + \Delta r_i)^T A^T A (r_i^m + \Delta r_i)] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i [b_i^{mT} b_i^m + b_i^{mT} \Delta b_i + \Delta b_i^T b_i^m + \Delta b_i^T \Delta b_i - 2(b_i^{mT} A r_i^m + b_i^{mT} A \Delta r_i + \Delta b_i^T A r_i^m + \Delta b_i^T A \Delta r_i) + r_i^{mT} r_i^m + r_i^{mT} \Delta r_i + \Delta r_i^T r_i^m + \Delta r_i^T \Delta r_i] \\
 J &= - \sum_{i=1}^n a_i (b_i^{mT} A r_i^m) - \sum_{i=1}^n a_i (b_i^{mT} A \Delta r_i) - \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i^T A r_i^m) - \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i^T A \Delta r_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (b_i^{mT} b_i^m + r_i^{mT} r_i^m) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i) + \sum_{i=1}^n a_i (b_i^{mT} \Delta b_i + r_i^{mT} \Delta r_i)
 \end{aligned}$$

تابع هدف J یک تابع بازه‌ای است. بنابراین هر تابع حقیقی متعلق به آن را می‌توان براساس رابطه (3) به صورت دو تابع هدف مجزا به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}
 L(A) &= L^m + \Delta L \\
 \Delta L &= \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5 \\
 L^m &= - \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} A r_i^m) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} b_i^m + r_i^{mT} r_i^m) \\
 \Delta L_1 &= - \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} A \Delta r_i) \\
 \Delta L_2 &= - \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T A r_i^m) \\
 \Delta L_3 &= - \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T A \Delta r_i) \\
 \Delta L_4 &= \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} \Delta b_i + r_i^{mT} \Delta r_i)
 \end{aligned}$$

آن‌ها می‌باشد که تنها یکی از آنها بردار کواترنیون مربوط به وضعیت بهینه می‌باشد. بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه ماتریس K . تخمین بهینه حداقل مربعات از وضعیت می‌باشد. از جمله خصوصیات و مزایای روش q ، مقاوم بودن آن است [3]. همچنین این روش، مسئله غیرخطی و همبها را به طور مستقیم و بدون هیچگونه خطی‌سازی با فرض‌های ساده کننده حل می‌نماید.

روش‌های نقطه به نقطه مبتنی بر معادله (1) برای تعیین ماتریس دوران، نیازمند کمیت‌های برداری هم در دستگاه بدنی و هم در دستگاه مرجع می‌باشند. از اینرو تنها از سنسورهایی می‌توان بهره برد که داده‌های مربوط به کمیت اندازه‌گیری شده در دستگاه مرجع موجود باشد. از آن جمله می‌توان به مغناطیس‌سنج، سنسور خورشیدی، و سنسور ستاره‌ای اشاره کرد. بنابراین خطای تخمین وضعیت در این روش‌ها هم وابسته به خطاهای اندازه‌گیری و هم خطای مدل مرجع است. تحلیل خطا مسئله و همبها با مدل خطاهای احتمالاتی در مراجع [1, 3, 7, 22, 23] ارائه شده است.

3- مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها

هر مقدار حقیقی x متعلق به بازه x^l را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [24]:

$$x = x^m + \alpha x^r, \quad \alpha \in [-1 \quad 1] \quad (3)$$

x^m و x^r مرکز و شعاع بازه x^l هستند. α مقداری حقیقی در بازه -1 تا 1 است. با توجه به اینکه مقادیر اندازه‌گیری شده و مرجع می‌توانند دارای خطا و عدم قطعیت باشند، با تعمیم رابطه (3) برای بردارها، می‌توان آن‌ها را به کمک حساب بازه‌ای به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
 b_i &= mid(b^l) + \Delta b = b^m + \sum_{j=1}^3 \alpha_j b_j^r \\
 &= b^m + [\alpha] b^r, \quad \alpha_j \in [-1 \quad 1] \\
 r_i &= mid(r^l) + \Delta r = r^m + \sum_{j=1}^3 \beta_j r_j^r \\
 &= r^m + [\beta] r^r, \quad \beta_j \in [-1 \quad 1]
 \end{aligned} \quad (4)$$

b_i و r_i بردارهای حقیقی متعلق به بازه‌های b^l و r^l هستند. Δb و Δr نامعینی‌های کراندار هستند. پارامترهای b_j^r و r_j^r بیانگر بردارهایی هستند که تمامی المان‌های آن‌ها به غیر از j -امین المان، صفر است. b^r و r^r شعاع بازه خطای b^l و r^l هستند. با توجه به اینکه اندازه‌گیری در هر راستا مستقل از دیگر راستاها در نظر گرفته شده است، ماتریس‌های $[\alpha]$ و $[\beta]$ ماتریس همانی هستند.

بردارهای b_i و r_i بردارهایی نرمالیزه شده هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 1 &= \|b_i^m + \Delta b_i\|^2 = b_i^{mT} b_i^m + 2b_i^{mT} \Delta b_i + \Delta b_i^T \Delta b_i \\
 1 &= \|r_i^m + \Delta r_i\|^2 = r_i^{mT} r_i^m + 2r_i^{mT} \Delta r_i + \Delta r_i^T \Delta r_i
 \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 b_i^{mT} \Delta b_i &= \frac{1}{2} (1 - b_i^{mT} b_i^m - \Delta b_i^T \Delta b_i) \\
 r_i^{mT} \Delta r_i &= \frac{1}{2} (1 - r_i^{mT} r_i^m - \Delta r_i^T \Delta r_i)
 \end{aligned} \quad (5)$$

□ صفحه:

$$Z_{\Delta r} = \sum_{i=1}^n a_i (b_i^m \times \Delta r_i) = (B^m \times H[\beta]R^r)W$$

$$B_{\Delta r, \Delta b} = \sum_{i=1}^n a_i \Delta b_i \Delta r_i^T = G[\alpha]B^r W R^r T [\beta]^T H^T$$

$$Z_{\Delta r, \Delta b} = \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i \times \Delta r_i) = (G[\alpha]B^r \times H[\beta]R^r)W$$

در این حالت کمینه‌یابی تابع هدف $L(A)$ ، معادل کمینه‌یابی همزمان توابع هدف L^m و ΔL در حضور ورودی‌های دارای نامعینی است. بنابراین مسئله مورد بررسی از یک مسئله بهینه‌سازی تک هدفه به یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه تبدیل می‌شود. از آنجا که یکی از اهداف، کمینه‌یابی تغییرات تابع هدف (ΔL) است، بنابراین مسئله مورد بررسی، یک مسئله بهینه‌سازی چندموضوعی مقاوم خواهد بود.

در یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، دو یا چند تابع هدف به طور همزمان بهینه‌یابی می‌شوند. دلیل اصلی برای استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه اینست که عملکرد یک سیستم چندموضوعی، علاوه بر عملکرد هر یک از اهداف، از اثرات متقابل آن‌ها نیز تأثیر می‌پذیرد. با در نظر گرفتن این اثرات متقابل می‌توان عملکرد کلی سیستم را بهبود بخشید. در یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه مقاوم سعی می‌گردد نوسانات عملکرد کلی سیستم در حضور عدم قطعیت‌ها کمینه گردد. در مسئله مورد بررسی، این امر توسط بهینه‌یابی همزمان توابع هدف رابطه (7) انجام می‌شود.

در مرجع [26-27] به کمک یک حلگر چندهدفه (NSGA II) رابطه (7) حل شده است. سپس با تعریف معیار کمینه خطای تخمین، پاسخی از بین پاسخ‌های بهینه به دست آمده در جبهه پارتو به عنوان پاسخ ترجیحی برگزیده شده است. با وجود اینکه به کمک الگوریتم به کار رفته، حل مسئله وهبا بهبود یافته است، لیکن به دلیل استفاده از یک الگوریتم اکتشافی برای حل رابطه (7) زمان رسیدن به پاسخ افزایش یافته است. در این مقاله، به منظور حل این کاستی، از الگوریتم کلاسیک بهینه‌یابی کمینه بیشینه برای حل مسئله چندهدفه استفاده شده است.

مسئله بهینه‌یابی کمینه بیشینه به دنبال یافتن نقطه‌ای است که بیشینه یک مجموعه از توابع را کمینه کند. یک مسئله کمینه بیشینه با تبدیل به یک مسئله نیل به آرمان (goal attainment) حل می‌گردد. در این روش یک نقطه آرمانی برای هر تابع هدف تعریف می‌گردد و هر پاسخی که فاصله کمتری تا آن داشته باشد پاسخ بهتری خواهد بود. در این حالت مسئله بهینه‌سازی چندهدفه به صورت زیر تبدیل می‌شود [28]:

$$\min g(x | \lambda, z^*) = \|f(x) - z^*\|_{p, \lambda}$$

$$= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^m \lambda_i |f_i(x) - z_i^*|^p}$$

z_i^* ، نقطه آرمانی هر تابع هدف است. λ_i ضریب وزنی و $f_i(x)$ معرف توابع هدف است. برای نرم بینهایت خواهیم داشت:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g(x | \lambda, z^*, p) = \max \lambda_i |f_i(x) - z_i^*|$$

در الگوریتم کمینه بیشینه نقطه آرمانی و ضرایب وزنی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$z_i^* = 0$$

$$\lambda_i = 1$$

$$\Delta L_5 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i)$$

در اینجا L^m و ΔL نقطه مبانی و نامعینی کراندار تابع هدف هستند. با جایگزینی رابطه (5) در ΔL_4 خواهیم داشت:

$$\Delta L_4 = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} b_i^m + r_i^{mT} r_i^m) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T \Delta b_i + \Delta r_i^T \Delta r_i)$$

بنابراین تابع هزینه به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$L(A) = L^m + \Delta L$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$$

$$L^m = \sum_{i=1}^N a_i - \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} A r_i^m)$$

$$\Delta L_1 = - \sum_{i=1}^N a_i (b_i^{mT} A \Delta r_i) \quad (6)$$

$$\Delta L_2 = - \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T A r_i^m)$$

$$\Delta L_3 = - \sum_{i=1}^N a_i (\Delta b_i^T A \Delta r_i)$$

در اینجا $\sum_{i=1}^N a_i = 1$ در نظر گرفته می‌شود. با تبدیل رابطه (6) به یک تابع مرتبه دو از کوآترینیون‌ها خواهیم داشت [25]:

$$L(A) = L^m + \Delta L$$

$$L^m = 1 - q^T K^m q$$

$$\Delta L = -q^T K^{\Delta r} q - q^T K^{\Delta b} q - q^T K^{\Delta r, \Delta b} q$$

$$K^m = \begin{bmatrix} B^m + B^{mT} - \text{tr}(B^m)I_3 & Z^m \\ Z^{mT} & \text{tr}(B^m) \end{bmatrix}$$

$$K^{\Delta r} = \begin{bmatrix} B_{\Delta r} + B_{\Delta r}^T - \text{tr}(B_{\Delta r})I_3 & Z_{\Delta r} \\ Z_{\Delta r}^T & \text{tr}(B_{\Delta r}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$K^{\Delta b} = \begin{bmatrix} B_{\Delta b} + B_{\Delta b}^T - \text{tr}(B_{\Delta b})I_3 & Z_{\Delta b} \\ Z_{\Delta b}^T & \text{tr}(B_{\Delta b}) \end{bmatrix}$$

$$K^{\Delta r, \Delta b} = \begin{bmatrix} B_{\Delta r, \Delta b} + B_{\Delta r, \Delta b}^T - \text{tr}(B_{\Delta r, \Delta b})I_3 & Z_{\Delta r, \Delta b} \\ Z_{\Delta r, \Delta b}^T & \text{tr}(B_{\Delta r, \Delta b}) \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های B و Z برای هر یک از ماتریس‌های K به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$B^m = \sum_{i=1}^n a_i b_i^m r_i^{mT} = B^m W R^m T$$

$$Z^m = \sum_{i=1}^n a_i (b_i^m \times r_i^m) = (B^m \times R^m)W$$

$$B_{\Delta b} = \sum_{i=1}^n a_i \Delta b_i r_i^{mT} = G[\alpha]B^r W R^m T$$

$$Z_{\Delta b} = \sum_{i=1}^n a_i (\Delta b_i \times r_i^m) = (G[\alpha]B^r \times R^m)W$$

$$B_{\Delta r} = \sum_{i=1}^n a_i b_i^m \Delta r_i^T = B^m W R^r T [\beta]^T H^T$$

جدول 1: مقایسه عملکرد روش کواترنیون و روش پیشنهادی

روش	میانگین خطای تخمین	واریانس خطای تخمین	زمان اجرا
روش کواترنیون	15.1352	95.1604	0.006
روش پیشنهادی با حلگر NSGA II	0.5699	0.1915	124.58
روش پیشنهادی با حلگر کمینه بیشینه	2.2025	0.4409	0.287

همانطور که از نتایج مشخص است، دقت تخمین وضعیت با روش کواترنیون وابسته به دقت بردارهای ورودی است. بنابراین هر چه خطای بردارهای ورودی بیشتر باشد دقت تخمین نیز به همان نسبت کاهش می‌یابد. در این مثال با تولید 100 داده اغتشاشی تصادفی و محاسبه میانگین و واریانس خطای تخمین این موضوع نشان داده شده است. در واقع روش کواترنیون کنترلی بر خطای تخمین ندارد. مزیت این روش در زمان اجرای کم آن نسبت به روش‌های پیشنهادی است. براساس نتایج، استفاده از الگوریتم بهینه‌یابی کمینه بیشینه برای حل مسئله چندهدفه زمان اجرا را نسبت به الگوریتم NSGA II بسیار کاهش داده است. لیکن مقدار اندکی از کیفیت پاسخ‌ها کاسته شده است. این روش دارای میانگین خطای تخمین بسیار کمتری نسبت به روش کواترنیون است. همچنین، عملکرد مطمئن‌تری نسبت به آن دارد، زیرا کران‌های خطای تخمین آن در محدوده کوچکتری قرار می‌گیرند.

در روش‌های پیشنهادی، پاسخ‌هایی قابل قبول هستند که علاوه بر تابع هدف، خطای آن را نیز در حضور داده‌های اغتشاشی کمینه کنند. در روش پیشنهادی، پاسخ‌هایی بهینه هستند که نتوان توسط آن‌ها یک تابع هدف را بهینه کرد بدون اینکه اثر مخربی بر کمینه‌یابی تابع هدف دیگر داشته باشد. به عبارتی در مسئله مورد بررسی خطای تابع هدف تا جایی کمینه می‌گردد که اثر مخربی بر بهینه‌یابی تابع هدف دیگر نداشته باشد و بالعکس. این امر با کمینه‌یابی پارامترهای α و β برای هر یک از 100 داده ورودی حاصل شده است. از آنجا که خطای تابع هدف تابعی از خطای بردارهای ورودی است، بنابراین کمینه کردن خطای تابع هدف باعث کاهش اثر خطای بردارهای ورودی بر دقت تخمین می‌شود. بنابراین میانگین خطای تخمین و واریانس آن نیز کاهش می‌یابد.

5-2- تحلیل عملکرد در حرکت مداری

مسئله تعیین وضعیت را برای یک ماهواره در مداری دایروی با میانگین ارتفاع 800 کیلومتر در نظر بگیرید. یک شبیه‌سازی غیرخطی از حرکت مداری ماهواره با شرایط اولیه مندرج در جدول 2 انجام شده است. مشخصات ماهواره و مشخصات مداری آن در جدول 3 آورده شده است. به منظور تعیین وضعیت از یک حسگر خورشید و یک حسگر سه محوره مغناطیس‌سنج استفاده شده است. به منظور مدل‌سازی میدان مغناطیسی زمین در دستگاه مرجع، از مدل مغناطیس دوقطبی استفاده شده است. همچنین، از مدل شرح داده شده در مرجع [29] برای مدل‌سازی حرکت خورشید استفاده شده است. بردارهای اندازه‌گیری و مرجع به دلیل وجود عواملی نظیر نویز حسگرها، ناهمراستایی و تخمین‌های مرتبه پایین به منظور تهیه مدل، دقیق نیستند و دارای نامعینی هستند. از اینرو، در این پژوهش

از آنجا که کمینه کردن تغییرات تابع هدف (ΔL) به معنای صفر کردن آن است، بنابراین نقطه آرمانی برای آن برابر صفر ($Z_{\Delta L}^* = 0$) است. همچنین می‌توان نشان داد که نقطه آرمانی برای تابع هدف L^m نیز مقدار صفر است. بنابراین می‌توان از الگوریتم بهینه‌یابی کمینه بیشینه برای حل رابطه (7) استفاده کرد.

5- شبیه‌سازی

در این بخش، ابتدا عملکرد روش پیشنهادی در یک گام زمانی مشخص بررسی می‌گردد. سپس عملکرد آن در حرکت مداری مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

مدل مرجع و اندازه‌گیری‌های حسگر به دلیل وجود نویز و ناهمراستایی و همچنین تقریب‌های ساده کننده برای مدل‌سازی، دقیق نیستند. از اینرو، برای مدل‌سازی این نامعینی‌ها، یک خطای تصادفی کراندار در محدوده $\pm b^r$ و $\pm r^r$ با توزیع یکنواخت به مقادیر دقیق بردارهای مرجع و اندازه‌گیری اضافه گردیده است. بردارهای اندازه‌گیری در این تحقیق، خروجی حسگرهای خورشید و مغناطیس‌سنج در نظر گرفته شده‌اند. بردارهای مرجع نیز مدل مغناطیس زمین و بردار خورشید هستند. b^r و r^r کران‌های نامعینی در بردارهای مرجع و اندازه‌گیری هستند که 20 درصد مقدار ورودی در نظر گرفته شده‌اند. در این بخش تأثیر نامعینی داده‌های ورودی بر روی دقت تخمین روش پیشنهادی و روش کواترنیون با استفاده از داده‌های بدست آمده در یک زمان مشخص بررسی می‌گردد. جمعیت اولیه چهارگان‌ها براساس روش تریاد (Triad) تولید شده‌اند. محدوده جستجو 10 درصد مقدار جمعیت اولیه در نظر گرفته شده است.

5-1- تحلیل عملکرد در یک گام زمانی

مجموعه بردارهای ورودی و بردار وضعیت مربوطه را به صورت زیر در نظر بگیرید [15]:

$$\begin{aligned} r_1^{exact} &= [-0.54 \quad -0.326 \quad 0.775]^T \\ b_1^{exact} &= [-0.776 \quad -0.46 \quad 0.43]^T \\ r_2^{exact} &= [-0.673 \quad 0.000133 \quad 0.74]^T \\ b_2^{exact} &= [-0.927 \quad 0.01 \quad 0.374]^T \end{aligned} \quad (17)$$

$$q^{exact} = \begin{bmatrix} -0.9746 \\ 0.0707 \\ -0.2122 \\ -0.0125 \end{bmatrix}$$

به منظور تولید داده‌های نامعین هم در بردارهای اندازه‌گیری و هم در بردارهای مرجع، خطایی تصادفی با توزیع یکنواخت و کراندار به مقادیر دقیق بردارهای ورودی اضافه گردیده است. کران‌های پایین و بالای بردارهای اغتشاشی 20 درصد مقدار ورودی در نظر گرفته شده‌اند. سپس به منظور مقایسه دقیقتر، 100 داده اغتشاشی تولید شده است و مقدار میانگین و واریانس خطای تخمین محاسبه گردیده است. نتایج حاصل نیز در جدول 1 ارائه شده است. براساس این نتایج روش پیشنهادی با حلگر NSGA II، در حضور نامعینی‌های کراندار در کلیه بردارهای ورودی، دارای میانگین خطای تخمین کمتری نسبت به دو روش دیگر است. همچنین، عملکرد مطمئن‌تری نسبت به آن‌ها دارد، زیرا کران‌های خطای تخمین آن در محدوده کوچکتری قرار می‌گیرند. لیکن، زمان اجرای آن بسیار بیشتر است.

7- مراجع

- [1] Markley, F.L. and J.L. Crassidis, Fundamentals of spacecraft attitude determination and control, Springer. 2014.
- [2] Shuster, M. Approximate algorithms for fast optimal attitude computation. in *Guidance and Control Conference*. 1978.
- [3] Shuster, M.D. and S.D. Oh, Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 4, No. 1, pp. 70-77. 1981.
- [4] Markley, F.L. and D. Mortari, Quaternion attitude estimation using vector observations. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 48, No. 2, pp. 359-380. 2000.
- [5] Mortari, D., ESOQ-2 single-point algorithm for fast optimal spacecraft attitude determination. *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 95, pp. 817-826. 1997.
- [6] Mortari, D., ESOQ: A closed-form solution to the Wahba problem. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 45, No. 2, pp. 195-204. 1997.
- [7] Markley, F.L., Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition. *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 36, No. 3, pp. 245-258. 1988.
- [8] Markley, F.L., Attitude determination using vector observations: A fast optimal matrix algorithm. 1993.
- [9] Wu, J., et al., Fast linear quaternion attitude estimator using vector observations. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 307-319. 2018.
- [10] Bar-Itzhack, I.Y., REQUEST-A recursive QUEST algorithm for sequential attitude determination. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 5, pp. 1034-1038. 1996.
- [11] Choukroun, D., I.Y. Bar-Itzhack, and Y. Oshman, Optimal-REQUEST algorithm for attitude determination. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 3, pp. 418-425. 2004.
- [12] Psiaki, M.L., Attitude-determination filtering via extended quaternion estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 2, pp. 206-214. 2000.
- [13] Christian, J.A. and E.G. Lightsey, Sequential optimal attitude recursion filter. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 6, pp. 1787-1800. 2010.
- [14] Ahmed, S. and E.C. Kerrigan, Robust Static Attitude Determination via Robust Optimization. *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 44, No. 1, pp. 5807-5812. 2011.
- [15] Ahmed, S., E.C. Kerrigan, and I.M. Jaimoukha, A semidefinite relaxation-based algorithm for robust attitude estimation. *IEEE transactions on signal processing*, Vol. 60, No. 8, pp. 3942-3952. 2012.
- [16] Yang, H. and L. Carlone, A quaternion-based certifiably optimal solution to the Wahba problem with outliers. in *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. 2019.
- [17] Bhatt, M., S. Sukumar, and A.K. Sanyal, Rigid body geometric attitude estimator using multi-rate sensors. in *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2020.
- [18] Wu, J., et al. Lasso Wahba's Problem and Its Analytical Solution for Spacecraft Attitude Determination. in *2021*

تمامی خطاها به کمک حساب بازه‌ای، نامعین و کراندار در نظر گرفته شده‌اند. کران‌های خطای اندازه‌گیری مغناطیس‌سنج ± 0.5 درجه، و کران‌های خطای اندازه‌گیری‌های حسگر خورشید ± 0.005 درجه در نظر گرفته شده است. تعیین وضعیت برای 20 دقیقه حرکت ماهواره در مدار با استفاده از روش پیشنهادی انجام شده است.

جدول 2: شرایط اولیه

φ_0	0	deg
θ_0	0	deg
ψ_0	5	deg
ω_{x0}	0	rad/s
ω_{y0}	0	rad/s
ω_{z0}	0	rad/s

جدول 3: مشخصات فیزیکی ماهواره و مشخصات مداری آن

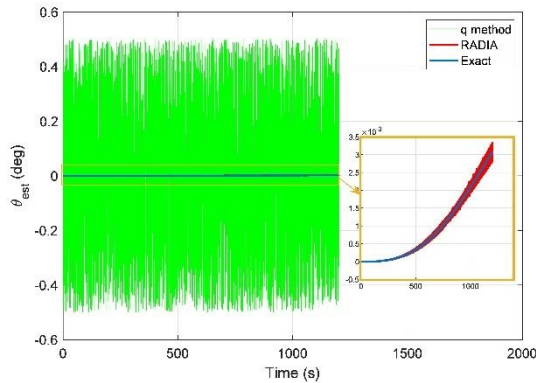
Moment of inertia	80	$Kg.m^2$
Moment of inertia	80	$Kg.m^2$
Moment of inertia	4	$Kg.m^2$
Apogee	800	Km
Perigee	800	Km
Inclination	75	deg
Right Ascension of Ascending Node	0	deg
Argument of Perigee	0	deg

در شکل‌های 1، 2 و 3 نتایج تخمین زوایای اویلر به کمک روش کوانتونیوم و روش پیشنهادی نشان داده شده است. براساس نتایج، تخمین به کمک روش کوانتونیوم، به دلیل اثرپذیری از خطای بردارهای ورودی، دارای دقت کمتری است و روش پیشنهادی عملکرد بهتری دارد به طوری که کران‌های تخمین آن محدودتر است.

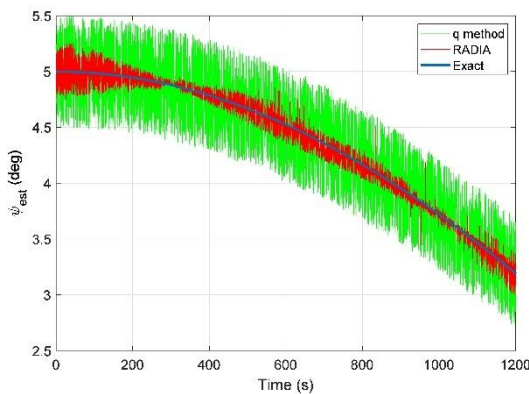
6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، عدم قطعیت بردارهای ورودی به صورت کراندار در نظر گرفته شدند و از حساب بازه‌ای به منظور مدل‌سازی آن‌ها استفاده شد. مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها به گونه‌ای انجام گردید که جامعیت لازم را دارا باشد به طوری که امکان به کارگیری روش‌های دیگر مدل‌سازی براساس نظریه مجموعه‌ها نظیر زوتوپ‌ها نیز فراهم گردد. این ویژگی توسط ماتریس شکل در روابط مدل‌سازی عدم قطعیت حاصل می‌شود.

با مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها به صورت عباراتی نامعین اما کراندار، و بازنویسی مسئله وهبا، یک مسئله بهینه‌یابی چندهدفه با قیود غیرخطی و با دو تابع هدف حاصل گردید. با کمینه‌یابی مسئله چندهدفه غیرخطی بدست آمده به کمک یک حلگر چندهدفه، ضمن بهینه‌یابی تابع اصلی مسئله وهبا، تغییرات آن نیز کمینه‌یابی گردید. به منظور کاهش زمان اجرای ناشی از بکارگیری حلگرهای اکتشافی در حل مسائل چندهدفه، از الگوریتم بهینه‌یابی کمینه-بیشینه منظور حل مسئله چندهدفه استفاده شد. خروجی این فرآیند ضمن داشتن زمان اجرای کم، به دست آوردن پاسخ‌های بهینه‌ای است که کمترین اثرپذیری را از عدم قطعیت بردارهای ورودی دارند. به عبارتی دیگر، خطای تخمین الگوریتم‌های مبتنی بر حل مسئله وهبا کمینه گردید. خصوصیتی که دیگر روش‌های نقطه به نقطه از آن بهره‌مند نیستند. همچنین استفاده از حلگر نیل به آرمان در قالب یک مسئله بهینه‌یابی کمینه بیشینه امکان به کارگیری به هنگام روش پیشنهادی را فراهم می‌کند.

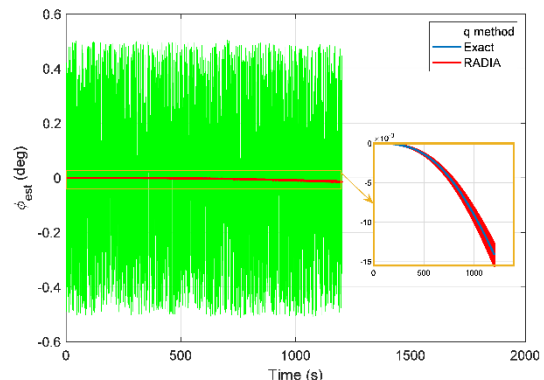


شکل 2: مقایسه تخمین زاویه پیچ



شکل 3: مقایسه تخمین زاویه سمت

- IEEE 17th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. 2021. IEEE.
- [19] Moore, R.E., Interval analysis. Vol. 4., Prentice-Hall Englewood Cliffs. 1966.
- [20] Wahba, G., A least squares estimate of satellite attitude. *SIAM review*, Vol.7, No. 3, pp. 409-409. 1965.
- [21] Lerner, G.M., Three-axis attitude determination, in *Spacecraft Attitude Determination and Control*, J.R. Wertz, Editor, Kluwer Academic: Dordrecht. 1978.
- [22] Chang, G., T. Xu, and Q. Wang, Error analysis of Davenport'sq method. *Automatica*, Vol. 75, pp. 217-220.2017.
- [23] Shuster, M.D., The generalized Wahba problem. *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No. 2, pp. 245-259. 2006.
- [24] Moore, R.E., R.B. Kearfott, and J.M. Cloud, Introduction to interval analysis, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. 2009.
- [25] ح. قدیری، «تعیین وضعیت ماهواره با استفاده از حساب بازه‌ای»، رساله دکتری، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، 1401.
- [26] Ghadiri, H., Esmaelzadeh, R., and Zardashti, R. Robust optimal attitude determination using interval analysis. *Advances in Space Research*, Vol. 69, No. 6, 2611-2617. 2022.
- [27] ر. اسماعیل‌زاده، ح. قدیری و ر. زردشتی، «توسعه تعیین وضعیت استاتیکی ماهواره براساس یک الگوریتم چند هدفه مبتنی بر حساب بازه‌ای»، دانش و فناوری هوافضا، 1401.
- [28] Branke, J., Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., and Slowiński, R. (Eds.). Multiobjective optimization: Interactive and evolutionary approaches. Vol. 5252. Springer Science & Business Media. 2008.
- [29] Vallado, D. A. Fundamentals of astrodynamics and applications. Vol. 12. Springer Science & Business Media, 2001.



شکل 1: مقایسه تخمین زاویه رول