

تحلیل خزش ترموالاستیک در استوانه متخلخل پیزوالکتریک تابعی مدرج

مهدی سعادت‌فر^{۱*}، علی قره خانی^۲

۱- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک دانشگاه قم، قم، m.saadatfar@qom.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه قم، قم، aligharakhani1@gmail.com

چکیده

در این مقاله، با استفاده از یک حل دقیق رفتار خزشی استوانه ی متخلخل تو خالی از جنس پیزوالکتریک تابعی مدرج (FGPPM) بررسی شده است. استوانه تحت بارهای مکانیکی، حرارتی و الکتریکی قرار دارد و هم چنین می تواند در شعاع خارجی بر روی بستر الاستیک با ضریب سفتی وینکلر (Winkler) قرار داشته باشد. خواص مکانیکی با یک رابطه ی توانی با شعاع تغییر می کند. معادله دیفرانسیل حاکم، با استفاده از معادلات تنش- کرنش، کرنش- جابه جایی، الکترواستاتیک و معادله ی تعادل استوانه ی چرخان به دست آمده است. سپس معادله ی دیفرانسیل در دو حالت زمان صفر و خزشی به کمک معادلات پراندتل-ریوس (Prandtl-Reuss) و قانون نورتون (Norton's Law) حل شده است. در بخش نتایج، تأثیر تخلخل، بار حرارتی، سفتی وینکلر و گذشت زمان بر روی پاسخ تنش های خزشی، جابه جایی و پتانسیل الکتریکی بررسی شده است.

واژه های کلیدی: استوانه ی پیزوالکتریک- مدرج تابعی- تحلیل خزشی- تخلخل (porosity)- محیط حرارتی

۱- مقدمه

مواد تابعی مدرج (FGMs) نوعی کامپوزیت پیشرفته هستند، که خواص مکانیکی و مواد تشکیل دهنده در آن ها به صورت تدریجی و پیوسته تغییر می کنند. این مواد به دلیل مقاومت حرارتی بالا در یک طرف و استحکام مکانیکی مناسب در طرف دیگر، مورد توجه محققان قرار گرفتند و در شاخه های مختلفی مانند هوافضا، هسته ای، پزشکی، نظامی و خودرو کاربرد وسیعی دارند. به عنوان مثال در دیواره ی فضاپیماها (شاتل های فضایی یا فضاپیما های مافوق صوت) که تحت دماهای بالا قرار دارند، کاربرد دارند [۱]. مواد پیزو الکتریک برای کنترل فعال شکل و هندسه ی سازه های بسیار انعطاف پذیر هوافضا، مانند ماهواره ها، آسیب شناسی اتوماتیک و عمر سنجی فعال سازه های هوافضا به کار می روند [۲]. با توجه به اینکه این مواد در بارگذاری های زیاد خواص ویسکو الاستیک (Viscoelastic) از خود نشان می دهند، بنابراین تحلیل رفتار خزش در این مواد به منظور طراحی دقیق تر ضروری به نظر می رسد [۳].

در زمینه ی خزش استوانه های هوشمند تحقیقاتی انجام شده است؛ آرائی و کلاهچی [۴] رفتار خزشی را در یک استوانه ی پیزوالکتریک تابعی مدرج مطالعه کردند. تأثیر گذشت زمان، سرعت دورانی و شرایط مرزی حرارتی بر روی رفتار خزشی یک استوانه ی مگنتوالکتروالاستیک توسط سعادت فر [۵] بررسی شد. سپس، تحلیل خزشی را بر روی یک

استوانه ی تو خالی از جنس مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج در محیط حرارتی انجام داد [۶]. بعد ها، وی تأثیر رطوبت و گرما را بر روی رفتار خزشی استوانه ی مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج بررسی کرد [۷]. اخیراً تخلخل در مواد هوشمند و مواد تابعی مدرج به دلیل سبکی و ضربه پذیری بالا مورد توجه محققان قرار گرفته است. کرم پور [۸] تنش های مکانیکی و حرارتی در حالت دو بعدی را در یک مخزن استوانه ای متخلخل از جنس تابعی مدرج مطالعه کرد. بهروان و شریعت [۹] تأثیر نوع ماده، بارگذاری و بستر الاستیک را بر روی تنش ها و جابه جایی ها در یک ورق حلقوی هوشمند متخلخل از تابعی مدرج بررسی کردند. جباری و طیبی [۱۰] با استفاده از یک حل دقیق، رفتار خزشی را در یک کره ی پیزوالکتریک تابعی مدرج و متخلخل که تحت بار های الکتریکی، مغناطیسی، مکانیکی و حرارتی قرار دارد، تحلیل کردند. دای و همکاران [۱۱] اثر پارامتر های تخلخل، دما و رطوبت را بر روی پاسخ مکانیکی یک دیسک حلقوی از مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج مطالعه کردند. سعادت فر و همکاران [۱۲] تأثیرات شاخص ناهمگنی، شتاب زاویه ای و تخلخل را بر روی رفتار مغناطیسی، الکتریکی و مکانیکی یک دیسک دوار از مگنتو الکتروالاستیک تابعی مدرج بررسی کردند.

با توجه به مقالات ذکر شده در مقدمه، و اهمیت استفاده از سازه های هوشمند سبک (متخلخل) در سازه های هوافضایی، تا به حال یک حل دقیق برای بررسی رفتار خزشی در یک استوانه ی متخلخل از جنس پیزوالکتریک تابعی مدرج ارائه نشده است. بنابراین، نوآوری این مقاله بررسی اثر پارامترهای تخلخل روی رفتار مکانیکی و الکتریکی در زمان های دلخواه می باشد. معادلات حاکم با فرض کرنش صفحه ای و با استفاده از دستگاه مختصات استوانه ای (r, θ, z) نوشته شده است.

۲- معادلات حرارتی

توزیع دما به دلیل تقارن در استوانه، فقط در راستای شعاع به شکل زیر تعریف می شود:

$$r^{-1}(rk^T T)' = 0. \quad (1)$$

که k^T, T به ترتیب بیانگر توزیع دما و ضریب رسانش می باشد و علامت پریم مشتق نسبت به شعاع را نشان می دهد. ضریب رسانش در راستای شعاع با رابطه ی زیر تغییر می کند:

$$k^T(r) = k_0^T r^\beta \quad (2)$$

که β معرف شاخص ناهمگنی است و زیر نویس صفر نشان دهنده ی ضریب رسانش ماده ی مربوطه می باشد. با جایگذاری معادله ی (۲) در (۱) و انتگرال گیری از آن داریم:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \gamma^2 M, \quad i, j = 1, 2$$

معادله ی تعادل استوانه ی چرخان بدون در نظر گرفتن نیروهای درونی به شکل زیر تعریف می شود:

$$\sigma_r' + (\sigma_r - \sigma_\theta)r^{-1} + \rho r \omega^2 = 0, \quad (15)$$

همچین با فرض نبودن شارژ الکتریکی، معادله ی الکترو استاتیک به صورت زیر نوشته می شود:

$$D_r' + D_r r^{-1} = 0. \quad (16)$$

ضرایب مادی با یک رابطه ی توانی با شعاع به صورت زیر تغییر می کند:

$$\xi = \xi_0 r^\beta, \quad \xi = \bar{c}_{ij}, e_{1j}, \beta_{11}, p_1, \alpha_k, \rho, \quad (17)$$

$$i, j = 1, 2, \quad k = r, \theta$$

که در آن، به ترتیب از چپ به راست ضرایب الاستیک، پیزوالکتریک (Piezoelectric)، دی الکتریک (Dielectric)، پیروالکتریک (Pyroelectric)، انبساط حرارتی و چگالی می باشند. با انتگرال گیری از رابطه ی (۱۶) نسبت به شعاع و جایگذاری آن در رابطه ی (۸) و استفاده از معادله ی (۱۷) و ساده سازی داریم:

$$\phi'(r) = L_1 u' + L_2 u r^{-1} + L_3 A_1 r^{-\beta-1} + L_4 T - L_1 \varepsilon_{rr}^c - L_2 \varepsilon_{\theta\theta}^c \quad (18)$$

که ϕ پتانسیل الکتریکی و A_1 ثابت انتگرال هستند؛ ثوابت دیگر به شکل زیر تعریف می شوند:

$$L_1 = e_{110} / \beta_{110}, \quad L_2 = e_{120} / \beta_{110}$$

$$L_3 = 1 / \beta_{110}, \quad L_4 = p_{110} / \beta_{110}$$

حال با قرار دادن معادله ی (۱۸) در معادلات (۱۳) و (۱۴) و ساده سازی داریم:

$$\sigma_r = C_1 r^\beta u' + C_2 r^\beta u r^{-1} + C_3 A_1 r^{-1} + C_4 r^\beta T - C_5 r^\beta \varepsilon_{rr}^c - C_6 r^\beta \varepsilon_{\theta\theta}^c - \lambda_{10} r^{2\beta} T \quad (19)$$

$$\sigma_\theta = E_1 r^\beta u' + E_2 r^\beta u r^{-1} + E_3 A_1 r^{-1} + E_4 r^\beta T - E_5 r^\beta \varepsilon_{rr}^c - E_6 r^\beta \varepsilon_{\theta\theta}^c - \lambda_{20} r^{2\beta} T \quad (20)$$

برای ثوابت آن خواهیم داشت:

$$C_1 = \bar{c}_{110} + e_{110} L_1 \quad C_4 = e_{110} L_4$$

$$C_2 = \bar{c}_{120} + e_{110} L_2 \quad C_5 = (1 - \phi_p) c_{110} + e_{110} L_1$$

$$C_3 = e_{110} L_3 \quad C_6 = (1 - \phi_p) c_{120} + e_{110} L_2$$

$$E_1 = \bar{c}_{120} + e_{120} L_1 \quad E_4 = e_{120} L_4$$

$$E_2 = \bar{c}_{220} + e_{120} L_2 \quad E_5 = (1 - \phi_p) c_{120} + e_{120} L_1$$

$$E_3 = e_{120} L_3 \quad E_6 = (1 - \phi_p) c_{220} + e_{120} L_2$$

سیس با قراردادن روابط (۱۹) و (۲۰) در معادله ی (۱۵)، معادله ی دیفرانسیل بر حسب جابه جایی به دست خواهد آمد:

$$u'' + M_1 u' r^{-1} + M_2 u r^{-2} =$$

$$+ M_7 A_1 r^{-2-\beta} + M_3 r^{\beta-1} T + M_4 T r^{-1}$$

$$+ (M_6 r^\beta - M_5) T' + M_8 r^{-1} \varepsilon_{rr}^c \quad (21)$$

$$+ M_9 r^{-1} \varepsilon_{\theta\theta}^c + M_{11} \varepsilon_{rr}' + M_{12} \varepsilon_{\theta\theta}' - M_{10} r$$

$$T(r) = W_1 r^{-\beta} + W_2 \quad (3)$$

که $W_{j=1,2}$ ثابت های انتگرال هستند. برای شرایط مرزی حرارتی در داخل ($r=a$) و خارج ($r=b$) استوانه ی پیزوالکتریک تابعی مدرج داریم:

$$T(r)|_{r=a} = T_a, \quad T(r)|_{r=b} = T_b \quad (4)$$

ثابت های انتگرال با جایگذاری معادله ی (۴) در معادله ی (۳) به شکل زیر بدست می آیند:

$$W_1 = (T_b - T_a) / b^{-\beta} - a^{-\beta}, \quad (5)$$

$$W_2 = (T_a b^{-\beta} - T_b a^{-\beta}) / b^{-\beta} - a^{-\beta}.$$

۳- معادلات حاکم

معادلات تنش- جابه جایی با فرض مجموع کرنش های مکانیکی، الکتریکی، حرارتی و کرنش های خزشی به صورت زیر تعریف می شوند [۷، ۱۰]:

$$\sigma_r = c_{11} u' + c_{12} u r^{-1} + e_{11} \phi' - \lambda_1 T - \gamma p - (1 - \phi_p) \quad (6)$$

$$c_{11} \varepsilon_{rr}^c - (1 - \phi_p) c_{12} \varepsilon_{\theta\theta}^c$$

$$\sigma_\theta = c_{12} u' + c_{22} u r^{-1} + e_{12} \phi' - \lambda_2 T - \gamma p - (1 - \phi_p) \quad (7)$$

$$c_{12} \varepsilon_{rr}^c - (1 - \phi_p) c_{22} \varepsilon_{\theta\theta}^c$$

$$D_r = e_{11} u' + e_{12} u r^{-1} - \beta_{11} \phi' + p_1 T - e_{11} \varepsilon_{rr}^c - e_{12} \varepsilon_{\theta\theta}^c, \quad (8)$$

که $\sigma_r, \sigma_\theta, D_r, u$ و $\lambda_{j=1,2}$ به ترتیب تنش شعاعی، تنش مماسی، جابه جایی الکتریکی، جابه جایی مکانیکی و مدول حرارتی می باشند. خواص مواد متخلخل به صورت زیر تعریف می شوند [۱۰]:

$$p = M(\zeta - \gamma \varepsilon) \quad (9)$$

$$M = (K_u - K) / \gamma^2 \rightarrow \gamma^2 M = K_u - K \quad (10)$$

$$K_u = K[1 + ((\gamma^2 K_f) / ((1 - \gamma)(\gamma - \phi_p) K_f + \phi_p K_f))] \quad (11)$$

که در آن $\varepsilon, \zeta, M, K, K_u, K_f, p, \phi_p$ و γ به ترتیب کرنش حجمی، مقدار متغیر سیال، مدول بایوت، مدول الاستیسیته ی حجمی تخلیه شده، مدول الاستیسیته ی حجمی تخلیه نشده، مدول حجمی سیال، فشار حفره ها، تخلخل و ضریب تنش موثر بایوت می باشد. در دو حالت تخلیه شده ($p=0$) و تخلیه نشده ($\zeta=0$) مواد متخلخل رفتار الاستیک از خود نشان می دهند که در حالت تخلیه نشده سفتی مواد بیش تر است. به همین دلیل فرض تخلیه نشده در این مسأله در نظر گرفته شده است. با جایگذاری فرض تخلیه نشده و کرنش صفحه ای در معادله ی (۹) داریم:

$$p = -\gamma M(u' + u r^{-1}) \quad (12)$$

سیس با قرار دادن رابطه ی (۱۲) در روابط (۶) و (۷) داریم:

$$\sigma_r = \bar{c}_{11} u' + \bar{c}_{12} u r^{-1} + e_{11} \phi' - \lambda_1 T - (1 - \phi_p) c_{11} \varepsilon_{rr}^c - (1 - \phi_p) c_{12} \varepsilon_{\theta\theta}^c \quad (13)$$

$$\sigma_\theta = \bar{c}_{12} u' + \bar{c}_{22} u r^{-1} + e_{12} \phi' - \lambda_2 T - (1 - \phi_p) c_{12} \varepsilon_{rr}^c - (1 - \phi_p) c_{22} \varepsilon_{\theta\theta}^c \quad (14)$$

که در معادلات بالا:

$$\begin{aligned} \phi(r) = & L_1(B_1 r^{m_1} + B_2 r^{m_2} + B_3 r + B_4 r^{\beta+1} \\ & + B_5 r^{1-\beta} + B_6 r^3 + B_7 A_1 r^{-\beta}) \\ & + L_2[(B_1 / m_1) r^{m_1} + (B_2 / m_2) r^{m_2} \\ & + B_3 r + (B_4 r^{\beta+1} / (\beta+1)) + \\ & (B_5 r^{1-\beta} / (1-\beta)) + (B_6 r^3 / 3) \\ & - (B_7 A_1 r^{-\beta} / \beta)] + L_4[(W_1 r^{-\beta+1}) / \\ & (1-\beta) + W_2 r] - L_3 A_1 r^{-\beta} \beta^{-1} + Z_1 \end{aligned} \quad (26)$$

که Z_1 ثابت انتگرال گیری است. برای به دست آوردن ثوابت مجهول Z_1 از شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی که به شکل زیر تعریف می شوند، استفاده می شود:

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} = -P_a, \quad \sigma_r|_{r=b} = -k_w u|_{r=b}, \\ \phi|_{r=a} = \phi_a, \quad \phi|_{r=b} = \phi_b. \end{aligned} \quad (27)$$

k_w ضریب سفتی بستر الاستیک می باشد. با جایگذاری شرایط مرزی در معادلات (24) و (26) یک دستگاه معادلات خطی با 4 معادله و 4 مجهول تشکیل می شود که به شکل ماتریسی زیر تعریف می شود:

$$X \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & A_1 & Z_1 \end{bmatrix}^T = F.$$

که ماتریس های X و F به ترتیب ماتریس های ضرایب و معلومات هستند.

۴-۲- پاسخ خزشی

در این حالت از معادله ی (21) با فرض دما ثابت، نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{u}'' + r^{-1} M_1 \dot{u}' + r^{-2} M_2 \dot{u} = \\ M_7 \dot{A}_1 r^{-2-\beta} + M_8 r^{-1} \dot{\epsilon}_{rr}^c + M_9 r^{-1} \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c + M_{11} \dot{\epsilon}_{rr}^{c'} \\ + M_{12} \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{c'} \end{aligned} \quad (28)$$

معادلات پیراندتل-ریوس به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r^c &= \dot{\epsilon}_e^c / \sigma_e (\sigma_r - 0.5(\sigma_\theta + \sigma_z)) \\ \dot{\epsilon}_\theta^c &= \dot{\epsilon}_e^c / \sigma_e (\sigma_\theta - 0.5(\sigma_r + \sigma_z)) \\ \dot{\epsilon}_z^c &= \dot{\epsilon}_e^c / \sigma_e (\sigma_z - 0.5(\sigma_\theta + \sigma_r)) \end{aligned} \quad (29)$$

که $\dot{\epsilon}_e^c, \dot{\epsilon}_{r,\theta,z}^c$ و σ_e به ترتیب نرخ کرنش های خزشی، نرخ کرنش موثر و

تنش موثر می باشند. قانون نورتون برای نرخ کرنش خزشی موثر به شکل زیر در نظر گرفته می شود:

$$\dot{\epsilon}_e^c = B(r) \sigma_e^{n(r)} \quad (30)$$

$$B(r) = b_0 r^{b_1}, \quad n(r) = n_0$$

که b_0, b_1 و n_0 ثوابت ماده هستند. با فرض کرنش صفحه ای و جایگذاری رابطه ی (30) در (29) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r^c &= -(3B(r) / 4) \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_\theta - \sigma_r) \\ \dot{\epsilon}_\theta^c &= (3B(r) / 4) \sigma_e^{n_0-1} (\sigma_\theta - \sigma_r) \\ \dot{\epsilon}_z^c &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

از طرفی برای تنش معادل فون مایز داریم:

$$\begin{aligned} M_1 &= (C_1(\beta+1) - E_1 + C_2) / C_1, \\ M_2 &= (C_2\beta - E_2) / C_1, \\ M_3 &= (\lambda_{10}(2\beta+1) - \lambda_{20}) / C_1, \\ M_4 &= (E_4 - C_4(1+\beta)) / C_1, \\ M_5 &= C_4 / C_1, M_6 = \lambda_{10} / C_1, M_7 = E_3 / C_1, \\ M_8 &= (C_5(1+\beta) - E_5) / C_1, \\ M_9 &= (C_6(1+\beta) - E_6) / C_1, \\ M_{10} &= (\rho_0 \omega^2) / C_1, M_{11} = C_5 / C_1, M_{12} = C_6 / C_1. \end{aligned}$$

۴-۱- حل معادله ی دیفرانسیل

۴-۱-۱- پاسخ استاتیکی (زمان صفر)

در حالت استاتیکی با صرف نظر از ترم های کرنش خزشی در معادله ی (21) و با قرار دادن معادله ی (3) در آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u'' + M_1 u' r^{-1} + M_2 u r^{-2} = \\ (M_3 W_2) r^{\beta-1} + (M_4 W_2 + W_1 (M_3 - M_6 \beta)) r^{-1} \\ + [W_1 (M_4 + M_5 \beta)] r^{-\beta-1} + M_7 A_1 r^{-\beta-2} - M_{10} r \end{aligned} \quad (22)$$

جواب معادله ی دیفرانسیل (22) به صورت مجموع پاسخ های خصوصی و عمومی به شکل زیر تعریف می شود:

$$u = B_1 r^{m_1} + B_2 r^{m_2} + B_3 r + B_4 r^{\beta+1} + B_5 r^{1-\beta} + B_6 r^3 + B_7 A_1 r^{-\beta} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} B_3 &= (M_4 W_2 + W_1 (M_3 - M_6 \beta)) / (M_1 + M_2), \\ B_4 &= (M_3 W_2) / (M_2 + (\beta+1)(\beta + M_1)), \\ B_5 &= (W_1 (M_4 + M_5 \beta)) / (\beta(\beta-1) + M_1(1-\beta) + M_2), \\ B_6 &= -M_{10} / (6 + 3M_1 + M_2), \\ B_7 &= M_7 / (\beta(\beta+1) - M_1 + M_2). \end{aligned}$$

و در آن $B_{j=1,2}$ ثوابت نا معلوم هستند. توان های m_1 و m_2 به شکل زیر هستند:

$$m_{1,2} = 0.5 \left(-(M_1 - 1) \pm \sqrt{(M_1 - 1)^2 - 4M_2} \right).$$

حال با جایگذاری رابطه ی (23) در معادلات (18)، (19)، (20)، سپس با انتگرال گیری نسبت به شعاع از معادله ی (18) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & C_1 r^\beta (B_1 m_1 r^{m_1-1} + B_2 m_2 r^{m_2-1} + B_3 + \\ & B_4 (\beta+1) r^\beta + B_5 (1-\beta) r^{-\beta} + 3B_6 r^2 \\ & - B_7 A_1 \beta r^{-\beta-1}) + C_2 r^\beta (B_1 r^{m_1-1} + B_2 r^{m_2-1} \\ & + B_3 + B_4 r^\beta + B_5 r^{-\beta} + B_6 r^2 + B_7 A_1 r^{-\beta-1}) \\ & + C_3 A_1 r^{-1} + (C_4 r^\beta - \lambda_{10} r^{2\beta}) (W_1 r^{-\beta} + W_2). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & E_1 r^\beta (B_1 m_1 r^{m_1-1} + B_2 m_2 r^{m_2-1} + B_3 + \\ & B_4 (\beta+1) r^\beta + B_5 (1-\beta) r^{-\beta} + 3B_6 r^2 \\ & - B_7 A_2 \beta r^{-\beta-1}) + E_2 r^\beta (B_1 r^{m_1-1} + B_2 r^{m_2-1} \\ & + B_3 + B_4 r^\beta + B_5 r^{-\beta} + B_6 r^2 + B_7 A_1 r^{-\beta-1}) \\ & + E_3 A_1 r^{-1} + (E_4 r^\beta - \lambda_{20} r^{2\beta}) (W_1 r^{-\beta} + W_2). \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(r) = & D_1 r^{m_1} (L_1 + L_2 / m_1) + D_2 r^{m_2} (L_1 + L_2 / m_2) \\ & - (B_7 (L_2 - L_1 \beta) - L_3) (r^{-\beta} / \beta) \dot{A}_1 \\ & + \int [L_1 (G'_{11} r^{m_1} + G_{11} m_1 r^{m_1-1} + G'_{21} r^{m_2} + \\ & G_{21} m_2 r^{m_2-1}) + L_2 (G_{11} r^{m_1-1} + G_{21} r^{m_2-1}) + \\ & (L_1 - L_2) ((\sqrt{3} / 2) b_0 r^h \sigma_e^{n_0})] dr + J_1 \end{aligned} \quad (41)$$

J_1 ثابت انتگرال گیری است. ضرایب مجهول J_1 و \dot{A}_1, D_2, D_1 مانند روش قبل، با مشتق گیری نسبت به زمان از شرایط مرزی (۲۷) که به صورت زیر نمایش داده شده اند، به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r|_{r=a} = 0, \quad \dot{\sigma}_r|_{r=b} = -k_w \dot{u}|_{r=b}, \\ \dot{\phi}|_{r=a} = 0, \quad \dot{\phi}|_{r=b} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

حال با قرار دادن شرایط مرزی (۴۲) در معادلات (۳۹) و (۴۱) یک دستگاه

معادلات خطی با چهار معادله و چهار مجهول ایجاد می شود که به شکل ماتریسی زیر می توان آن را نشان داد:

$$X \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \dot{A}_1 & J_1 \end{bmatrix}^T = E.$$

که ماتریس های E و X به ترتیب ماتریس های معلومات و ضرایب هستند.

در آخر با استفاده از یک روش تکراری می توان توزیع تنش های خزشی و پتانسیل الکتریکی را در زمان های دلخواه به دست آورد. این روش تکراری به شکل زیر است:

$$\Lambda^{(m)}(r, t_m) = \Lambda^{(m-1)}(r, t_{m-1}) + \dot{\Lambda}^{(m-1)}(r, t_{m-1}) dt^{(m)}, \quad (43)$$

$$\Lambda = \sigma_r, \sigma_\theta, \phi, u$$

که در آن، dt نمو زمانی و m تعداد تکرار می باشد. در گام نخست، تنش ها، پتانسیل الکتریکی و جابه جایی مکانیکی در مرحله ی اول با جایگذاری معادلات (۲۳) و (۲۴) تا (۲۶) و همچنین معادلات (۳۵) و (۳۹) تا (۴۱) در معادله ی (۴۳) ایجاد می شوند، سپس در گام بعدی، با استفاده از تنش های حاصله، نرخ تنش های جدید را محاسبه کرده و در معادله ی جایگذاری می کنیم و این روش تکرار ادامه می یابد.

جدول ۱- ضرایب مادی [۷، ۱۰]

$c_{11} = 215 (Gpa)$	$c_{1r} = 120 (Gpa)$	$c_{rr} = 215 (Gpa)$
$e_{11} = 7,5 (C/m^2)$	$e_{1r} = -2,5 (C/m^2)$	$\alpha_r = 6 \times 10^{-6} (1/K)$
$\alpha_\theta = 15 \times 10^{-6} (1/K)$	$\beta_{11} = 15 \times 10^{-6} (C^r/Nm^r)$	$p_1 = -2,5 \times 10^{-6} (C^r/m^rK)$
$n = 3$	$b = 0,11 \times 10^{-6}$	$b_1 = -5$
$\rho = 7750 (kg/m^3)$	$\gamma = 0,27$	$K = 2,5 \times 10^{-1} (N/m^r)$
$K_r = 2,5 \times 10^{-1} (N/m^r)$	$k^T = 2 (W/mK)$	

نتایج عددی و بحث

در این بخش، با استفاده از مثال های عددی تأثیر پارامتر های مهم مانند گذشت زمان، تخلخل، بستر الاستیک و بارگذاری حرارتی بر روی توزیع تنش ها و جابه جایی های مکانیکی و پتانسیل الکتریکی بررسی شده اند. شعاع های داخلی و خارجی استوانه به ترتیب $r_b = 0.2$ و $r_a = 0.1$ متر می باشند؛ هم چنین فشار داخلی $P_a = -10Mpa$ ، دمای داخلی و

$$\sigma_e = (\sqrt{3} / 2) (\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (32)$$

با قرار دادن تنش معادل از رابطه ی (۳۲) در روابط (۳۱) برای نرخ کرنش ها داریم:

$$\dot{\epsilon}_{rr}^c = -(\sqrt{3} / 2) b_0 r^h \sigma_e^{n_0} \quad (33)$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c = (\sqrt{3} / 2) b_0 r^h \sigma_e^{n_0}$$

روابط (۳۳) را در معادله دیفرانسیل (۲۸) قرار می دهیم که به شکل زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + r^{-1} M_1 \dot{u}' + r^{-2} M_2 \ddot{u} = \\ M_7 \dot{A}_1 r^{-2-\beta} + (\sqrt{3} / 2) b_0 r^{h-1} \sigma_e^{n_0} (M_9 - M_8 + \\ M_{12} b_1 - M_{11} b_1) + (\sqrt{3} / 2) b_0 r^h \sigma_e^{n_0} (M_{12} - M_{11}). \end{aligned} \quad (34)$$

جواب معادله ی (۳۴) به شکل زیر خواهد بود:

$$\dot{u} = D_1 r^{m_1} + D_2 r^{m_2} + G_{11} r^{m_1} + G_{21} r^{m_2} + B_7 \dot{A}_1 r^{-\beta} \quad (35)$$

ضرایب مجهول هستند؛ G_{21}, G_{11} با استفاده از روش تغییر پارامتر ها به دست می آیند:

$$\begin{aligned} G_{11}(r) = & (\sqrt{3} / 2) \times b_0 / (m_2 - m_1) \int [r^{h-m_1} \sigma_e^{n_0} (M_9 \\ & - M_8 + M_{12} b_1 - M_{11} b_1) + r^{h-m_1+1} \sigma_e^{n_0} (M_{12} - M_{11})] dr, \\ G_{21}(r) = & -(\sqrt{3} / 2) \times b_0 / (m_2 - m_1) \int [r^{h-m_2} \sigma_e^{n_0} (M_9 \\ & - M_8 + M_{12} b_1 - M_{11} b_1) + r^{h-m_2+1} \sigma_e^{n_0} (M_{12} - M_{11})] dr. \end{aligned}$$

حال با مشتق گیری زمانی از معادلات (۱۸)، (۱۹) و (۲۰)، نرخ تنش ها و پتانسیل الکتریکی و جایگذاری نرخ کرنش های خزشی از روابط (۳۳) در آن ها به شکل زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r = & C_1 r^\beta \dot{u}' + C_2 r^{\beta-1} \ddot{u} + C_3 \dot{A}_1 r^{-1} + C_5 r^\beta \times \\ & ((\sqrt{3} / 2) b_0 r^h \sigma_e^{n_0}) - C_6 r^\beta ((\sqrt{3} / 2) b_0 r^h \sigma_e^{n_0}) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_\theta = & E_1 r^\beta \dot{u}' + E_2 r^{\beta-1} \ddot{u} + E_3 \dot{A}_1 r^{-1} + E_5 r^\beta \times \\ & ((\sqrt{3} / 2) b_0 r^h \sigma_e^{n_0}) - E_6 r^\beta ((\sqrt{3} / 2) b_0 r^h \sigma_e^{n_0}) \end{aligned} \quad (37)$$

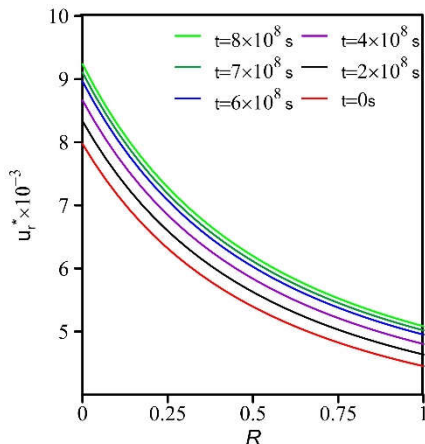
$$\dot{\phi}' = L_1 \dot{u}' + L_2 \dot{u} r^{-1} - L_3 \dot{A}_1 r^{-1-\beta} - L_1 \dot{\epsilon}_{rr}^c - L_2 \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c \quad (38)$$

اکنون نرخ تنش ها و پتانسیل الکتریکی با جایگذاری رابطه ی (۳۵) در معادلات (۳۶) تا (۳۸) و انتگرال گیری از رابطه ی (۳۸) به صورت تابعی از شعاع به شکل زیر حاصل می شوند:

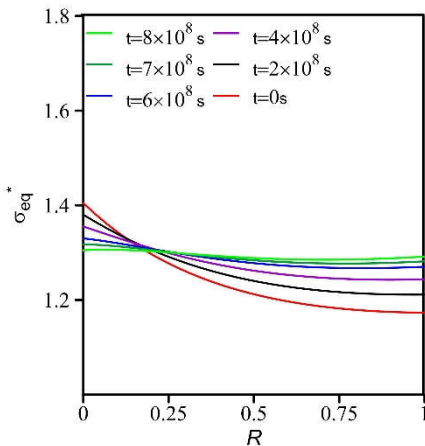
$$\begin{aligned} \sigma_r = & D_1 (m_1 C_1 + C_2) r^{\beta+m_1-1} + D_2 (m_2 C_1 + C_2) \times \\ & r^{\beta+m_2-1} + (B_7 (C_2 - C_1 \beta) + C_3) \dot{A}_1 r^{-1} \\ & + C_1 r^\beta (G'_{11} r^{m_1} + G_{11} m_1 r^{m_1-1} + G'_{21} r^{m_2} + \\ & G_{21} m_2 r^{m_2-1}) + C_2 r^{\beta-1} (G_{11} r^{m_1} + G_{21} r^{m_2}) \end{aligned} \quad (39)$$

$$+ (\sqrt{3} / 2) b_0 \sigma_e^{n_0} r^{h+\beta} (C_5 - C_6)$$

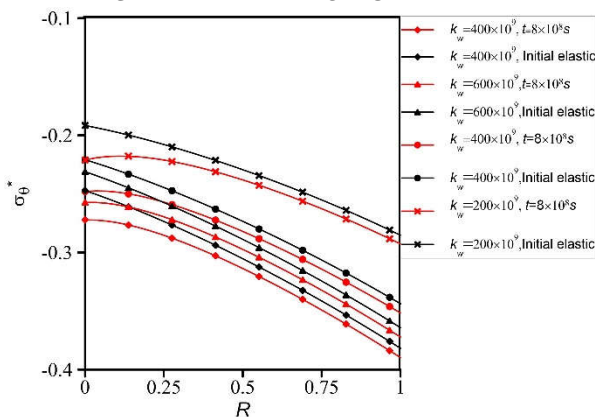
$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & D_1 (m_1 E_1 + E_2) r^{\beta+m_1-1} + D_2 (m_2 E_1 + E_2) \times \\ & r^{\beta+m_2-1} + (B_7 (E_2 - \beta E_1) + E_3) \dot{A}_1 r^{-1} \\ & + E_1 r^\beta (G'_{11} r^{m_1} + G_{11} m_1 r^{m_1-1} + G'_{21} r^{m_2} + \\ & G_{21} m_2 r^{m_2-1}) + E_2 r^{\beta-1} (G_{11} r^{m_1} + G_{21} r^{m_2}) \\ & + (\sqrt{3} / 2) b_0 \sigma_e^{n_0} r^{h+\beta} (E_5 - E_6) \end{aligned} \quad (40)$$



شکل ۳- توزیع جابه جایی های مکانیکی نسبت به زمان



شکل ۴- توزیع تنش های معادل نسبت به زمان

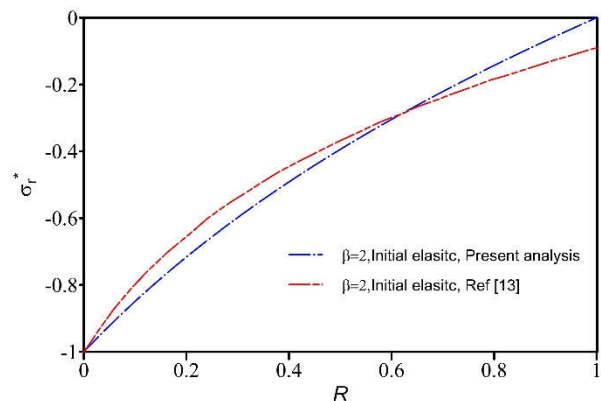


شکل ۵- اثر سفتی وینکلر بر روی توزیع تنش های مماسی

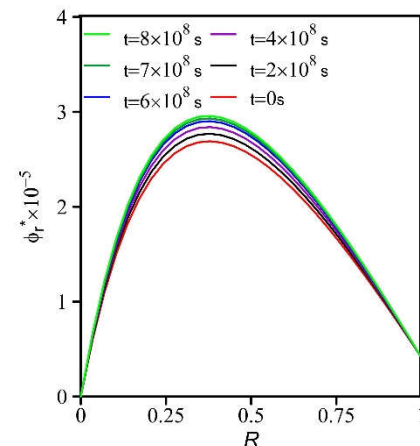
با بررسی سفتی های وینکلر مختلف بر روی توزیع تنش های شعاعی، مماسی و جابه جایی های مکانیکی (شکل ۵ و ۶) مشاهده می شود که با افزایش سفتی وینکلر، مقادیر هر سه متغیر، چه در حالت زمان صفر و چه در زمان 8×10^8 ثانیه کاهش می یابد. همچنین می توان دریافت که با گذشت زمان تنش های خزشی شعاعی و مماسی نسبت به حالت استاتیکی (در سفتی های وینکلر یکسان) کاهش داشته اند؛ اما در جابه جایی های مکانیکی شکل (۶) این رویه بالعکس است و با گذشت زمان مقادیر افزایش جزئی داشته اند.

خارجی به ترتیب $T_a = 100$ و $T_b = 0$ ، نمو زمانی $dt = 1 \times 10^5 s$ پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج $\phi_a = 5000$ و $\phi_b = 0$ و شاخص ناهمگنی $\beta = 2$ در نظر گرفته شده است. ضرایب مادی در جدول ۱ قابل مشاهده است. برای اعتبار سنجی نتایج به دست آمده در این مقاله، تنش های شعاعی با نتایج ارائه شده در مورد خزش استوانه پیزوالکتریک [۱۳] در حالت خاص مقایسه شده است. شکل (۱) نشان می دهد نتایج به دست آمده دارای همخوانی خوبی هستند.

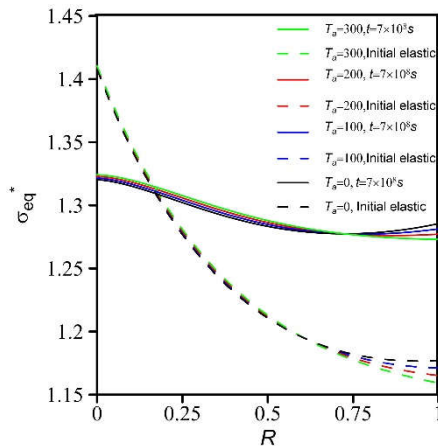
در شکل های (۲ و ۳) همانطور که مشاهده می شود با افزایش زمان مقادیر بی بعد (*) پتانسیل الکتریکی و جابه جایی های مکانیکی افزایش یافته اند؛ تا اینکه در زمان 8×10^8 ثانیه مقادیر آن ها همگرا می شوند. همچنین توزیع پتانسیل های الکتریکی در شعاع های داخلی استوانه صعودی هستند اما در شعاع های بیرونی یک روند نزولی را طی می کنند. اما در جابه جایی های مکانیکی این روند نسبت به شعاع کاملاً نزولی است. شکل (۴) تغییرات تنش های معادل فون مایزر را نسبت به زمان های مختلف نشان می دهد؛ ملاحظه می شود که در شعاع های اولیه با گذشت زمان، تنش های معادل کاهش می یابند اما به یک باره در شعاع های داخلی این روند معکوس شده و با گذشت زمان تنش ها افزایش می یابند و هم چنین هرچه به سمت شعاع های بیرونی حرکت می کنیم مقدار تنش های معادل کاهش می یابند.



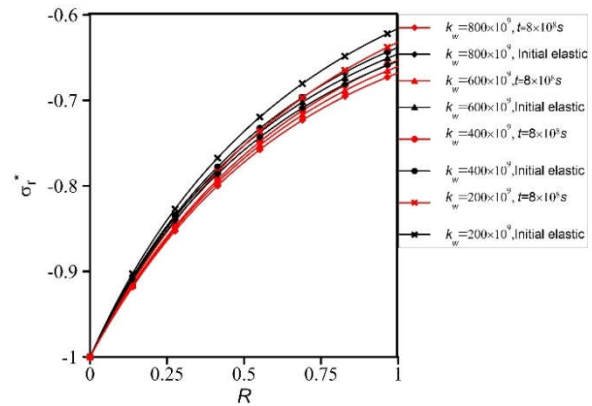
شکل ۱- توزیع تنش های شعاعی در حالت زمان صفر



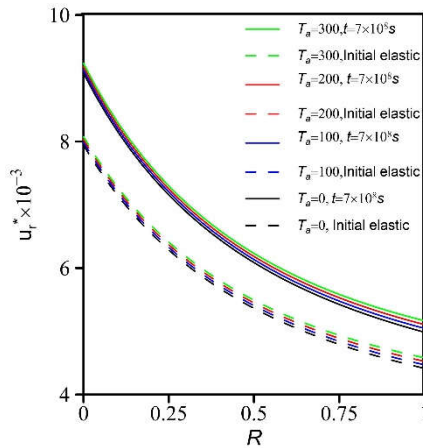
شکل ۲- توزیع پتانسیل های الکتریکی نسبت به زمان



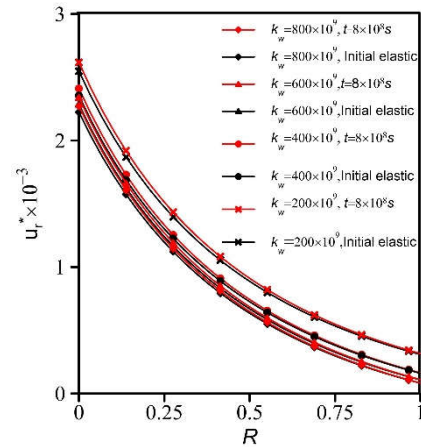
شکل ۹- اثر بارهای حرارتی بر روی توزیع تنش های معادل فون مایز



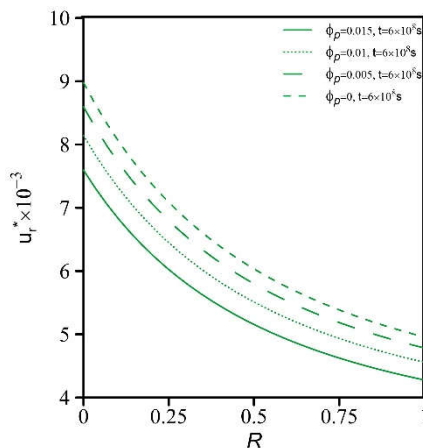
شکل ۶- اثر سفتی وینکلر بر روی توزیع تنش های شعاعی



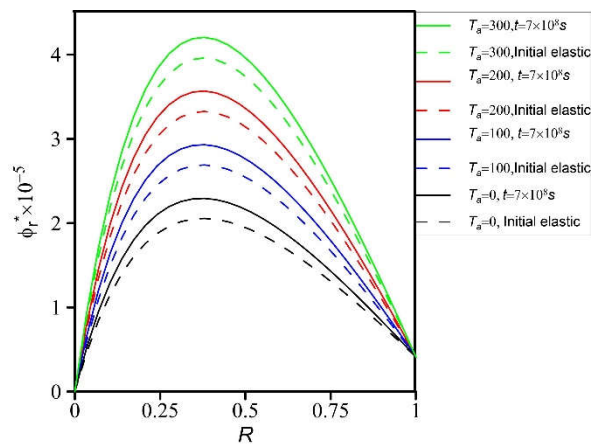
شکل ۱۰- اثر بارهای حرارتی بر روی توزیع جابه جایی مکانیکی



شکل ۷- اثر سفتی وینکلر بر روی توزیع جابه جایی مکانیکی



شکل ۱۱- اثر میزان تخلخل بر روی توزیع جابه جایی مکانیکی



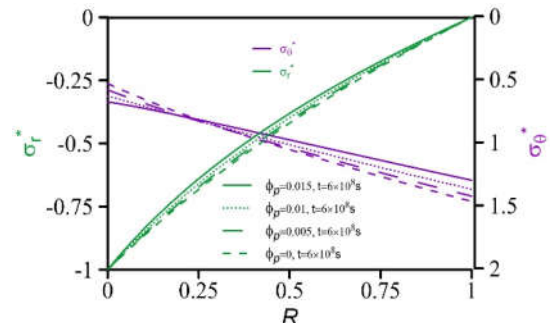
شکل ۸- اثر بارهای حرارتی بر روی توزیع پتانسیل های الکتریکی

در شکل های (۱۱ و ۱۲) توزیع جابه جایی، تنش های شعاعی و مماسی در درصد تخلخل های مختلف ملاحظه می شود. مقادیر جابه جایی با افزایش درصد تخلخل کاهش پیدا کرده اند (شکل ۱۱)، اما تنش های شعاعی رفتاری عکس از خود نشان داده اند و با افزایش درصد تخلخل افزایش یافته اند (شکل ۱۲)؛ تنش های مماسی با افزایش میزان تخلخل در شعاع

تأثیر بارهای حرارتی بر روی پتانسیل های الکتریکی، تنش های معادل و جابه جایی های الکتریکی در شکل های (۸ و ۹ و ۱۰) قابل مشاهده است. پتانسیل های الکتریکی و جابه جایی های مکانیکی با افزایش دما در شعاع داخلی، در زمان های صفر و 7×10^8 ثانیه افزایش داشته اند. (شکل ۸ و ۹). تنش های معادل در شعاع های ابتدایی افزایش را نشان می دهند اما در شعاع های انتهایی این روند معکوس شده و با افزایش دما داخلی، تنش ها کاهش می شوند (شکل ۹).

- [2] ح. ر. ا. ع. پولادخان. مواد هوشمند و کاربردهای آن در رشته های مختلف علوم و مهندسی. تهران: نوآور، ۱۴۰۰.
- [3] ف. مهدیسعدت، "بررسی رفتار استاتیکی و خزش وابسته به زمان در دیسک دوار مگنتوالکتروالاستیک تابعی مدرج در محیط حرارتی"، ۲۰۲۱.
- [4] A. G. ARANI and R. KOLAHCHI, "Successive approximation method for time-dependent creep modeling of functionally graded piezoelectric cylinder," *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, vol. 38, no. 3, pp. 309-322, 2014.
- [5] M. Saadatfar, "Thermoelastic Time-Dependent Creep Analysis of a Rotating Thick-Walled Cylinder Made of Magneto-Electro-Elastic Materials," *mdrsjrns*, vol. 19, no. 11, pp. 2705-2716, 2019. [Online]. Available: <http://mme.modares.ac.ir/article-15-26606-en.html>.
- [6] M. Saadatfar, "Analytical solution for the creep problem of a rotating functionally graded magneto-electro-elastic hollow cylinder in thermal environment," *International Journal of Applied Mechanics*, vol. 11, no. 06, p. 1950053, 2019.
- [7] M. Saadatfar, "Multiphysical time-dependent creep response of FGME hollow cylinder in thermal and humid environment," *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 25, no. 2, pp. 151-173, 2021/06/01 2021, doi: 10.1007/s11043-019-09433-0.
- [8] S. Karampour, "Dimensional Two Steady State Thermal and Mechanical Stresses of a Poro-FGM Spherical Vessel," *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, vol. 46, pp. 4880-4885, 2012/01/01/ 2012, doi: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.353>.
- [9] A. Behravan Rad and M. Shariyat, "Three-dimensional magneto-elastic analysis of asymmetric variable thickness porous FGM circular plates with non-uniform tractions and Kerr

های داخلی کاهش می یابند اما این روند در شعاع های میانی برعکس شده و افزایشی است.



شکل ۱۲- اثر میزان تخلخل بر روی توزیع تنش های شعاعی و مماسی

جمع بندی و نتیجه گیری

در ابتدا با استفاده از معادلات تنش-جابجایی، الکترو استاتیک و معادله ی تعادل استوانه، معادله ی دیفرانسیل حاکم بر استوانه ی متخلخل پیژوالکتریک تابعی مدرج به دست آمد. سپس، معادله ی دیفرانسیل در دو حالت زمان صفر و وابسته به زمان به صورت دقیق حل شد. در بخش نتایج تأثیر پارامترهایی مانند گذشت زمان، بارهای حرارتی، تخلخل و ضریب الاستیک وینکلر بر روی توزیع پتانسیل های الکتریکی، تنش های شعاعی، مماسی و جابه جایی مورد بحث و بررسی قرار گرفتند؛ که می توان نتایج آن را به صورت زیر بیان کرد:

- گذشت زمان سبب افزایش پتانسیل الکتریکی و جابه جایی مکانیکی می شود اما تنش معادل در شعاع های بیرونی افزایش می یابد.
- استفاده از بستر الاستیک با سفتی بزرگتر سبب کاهش تنش های شعاعی و مماسی و هم چنین جابه جایی می شود.
- افزایش بار حرارتی سبب افزایش قابل توجهی در مقادیر پتانسیل های الکتریکی می شود، اما جابه جایی و تنش های معادل افزایش جزئی خواهند داشت.
- میزان تخلخل با تنش های شعاعی رابطه ی مستقیم دارد به گونه ای که با افزایش درصد تخلخل، تنش ها شعاعی افزایش یافته اند، اما رابطه ی تخلخل با جابه جایی معکوس است؛ تنش های مماسی نیز در شعاع های بیرونی افزایش داشته اند.

مراجع و منابع

- [1] A. Hadj Mostefa, S. Merdaci, and N. Mahmoudi, "An Overview of Functionally Graded Materials «FGM»," in *Proceedings of the Third International Symposium on Materials and Sustainable Development*, Cham, B. Abdelbaki, B. Safi, and M. Saidi, Eds., 2018// 2018: Springer International Publishing, pp. 267-278.

- elastic foundations," *Composite Structures*, vol. 125, pp. 558-574, 2015/07/01/ 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.049>.
- [10] M. Jabbari and M. S. Tayebi, "Time-Dependent Electro-Magneto-Thermoelastic Stresses of a Poro-Piezo-Functionally Graded Material Hollow Sphere," *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 138, no. 5, 2016, doi: 10.1115/1.4033089.
- [11] T. Dai, H.-L. Dai, and Z.-Y. Lin, "Multi-field mechanical behavior of a rotating porous FGME circular disk with variable thickness under hydrothermal environment," *Composite Structures*, vol. 210, pp. 641-656, 2019/02/15/ 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.077>.
- [12] M. Saadatfar, M. H. Zarandi, and M. Babaelahi, "Effects of porosity, profile of thickness, and angular acceleration on the magneto-electro-elastic behavior of a porous FGME rotating disc placed in a constant magnetic field," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 235, no. 7, pp. 1241-1257, 2021/04/01 2020, doi: 10.1177/0954406220938409.
- [13] H.-L. Dai, L. Hong, Y.-M. Fu, and X. Xiao, "Analytical solution for electromagnetothermoelastic behaviors of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, no. 2, pp. 343-357, 2010/02/01/ 2010, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.04.008>.