

هدایت و کنترل یکپارچه برای رهگیری اهداف سرعت بالا

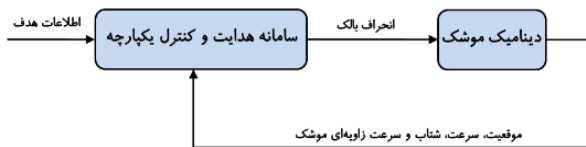
*هادی سلیمانی^۱

۱- کارشناس ارشد مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، h.soleimani@aut.ac.ir

شکل ۱- روش کلاسیک هدایت و کنترل

اگر چه این روش در سال‌های متمادی در بسیاری از موشک‌ها استفاده شده است، مهم‌ترین نقص این روش، تفاوت دینامیک داخلی است که بین دو حلقه به وجود می‌آید و دلیل آن عملکرد دو حلقه بیرونی و درونی در فرکانس‌های متفاوت می‌باشد. همچنین فرآیند طراحی در این روش دارای حلقه‌های تکرارشونده زمان‌بر بین زیرسامانه‌های هدایت و کنترل است. به علاوه اینکه در صورتی که طراح به دنبال یک سامانه بهینه باشد، زیرسامانه‌های هدایت و کنترل که به صورت جداگانه طراحی شده‌اند، به دلیل فرآیند طراحی تکرارشونده، نمی‌توانند تضمینی برای سامانه هدایت و کنترل بهینه باشند. پیشنهادی که می‌تواند سبب بهبود عملکرد کلی سامانه، بدون انجام حلقه‌های تکرارشونده شود، روش هدایت و کنترل یکپارچه است [۱].

اساس روش هدایت و کنترل یکپارچه که در **Error! Reference source not found.** ارائه شده است، توسعه توأم سامانه هدایت و کنترل و اجرای دو زیرسامانه در یک حلقه می‌باشد. یکی از مزایای روش هدایت و کنترل یکپارچه، نیاز به طراحی تنها یک سامانه کنترلی برای آن است که فرآیند طراحی را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد. همچنین با وجود همکاری میان دینامیک داخلی هدایت و کنترل، این روش دارای عملکرد بهتری در فاز نهایی است که نتیجه آن کاهش خطای برخورد می‌باشد. با استفاده از این روش، این امکان برای طراح فراهم می‌شود که از مزایای تعامل میان زیرسامانه‌های هدایت و کنترل به خوبی بهره‌برداری کند. به طور واضح در روشی که دو حلقه به صورت جداگانه طراحی می‌شدند، در دسترس نبود [۱].



شکل ۲- هدایت و کنترل یکپارچه

لازم به ذکر است که روش هدایت و کنترل یکپارچه، منجر به تولید یک فرمان کنترلی می‌گردد که این فرمان، به صورت ورودی برای دینامیک موشک خواهد بود.

استفاده از روش هدایت و کنترل یکپارچه به پژوهش انجام شده در سال ۱۹۸۳ برمی‌گردد که در آن، این روش بر روی یک موشک تاکتیکی اعمال شده بود [۲]. از آن زمان تاکنون روش هدایت و کنترل یکپارچه در پژوهش‌های بسیاری مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. یان و جی در سال ۲۰۱۱ روش هدایت و کنترل یکپارچه‌ای بر اساس روش پسگام برای رهگیری یک هدف هوایی معمولی ارائه نمودند [۳]. در این روش اثبات شده که نرخ خط دید نسبت به مانور هدف و عدم قطعیت‌های مدل موشک، پایدار ورودی به حالت است و پایداری دینامیک موشک نیز تضمین شده است. فان و همکاران در سال ۲۰۱۲ روش هدایت و کنترل یکپارچه بر اساس

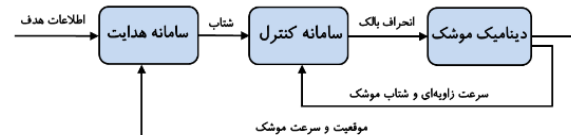
چکیده

در این پژوهش، هدایت و کنترل یکپارچه یک موشک رهگیر در فاز نهایی، برای رهگیری یک هدف مانوری و سرعت بالا در حال ورود به جو، انجام شده است. مدل دینامیکی موشک رهگیر به صورت غیرخطی و دارای عدم قطعیت در نظر گرفته شد. به همین دلیل در طراحی کنترلی کننده از روش کنترل غیرخطی پسگام استفاده شده است. مانور هدف نیز به صورت اعمال شتاب جانبی به آن می‌باشد. از ویژگی‌های بارز این پژوهش در نظر گرفتن آیرودینامیک غیرخطی در مدل دینامیکی موشک رهگیر می‌باشد. پایداری این سیستم یکپارچه، در حضور عدم قطعیت، به روش پایداری ورودی به حالت قابل اثبات است. نتیجه طراحی هدایت و کنترل یکپارچه توسط شبیه‌سازی پرواز به صورت سه درجه آزادی در صفحه فرافراز ارزیابی و با مدل دینامیکی موشک رهگیر با آیرودینامیک خطی مقایسه شده است. در شبیه‌سازی درگیری موشک و هدف با سرعت بالا، در حالتی که آیرودینامیک به صورت غیرخطی در نظر گرفته می‌شود، برخورد به صورت Hit to Kill رخ می‌دهد؛ اما در حالت آیرودینامیک خطی برخورد انجام نمی‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: هدایت و کنترل یکپارچه - ضد بالستیک - کنترل پسگام - آیرودینامیک غیرخطی

۱- مقدمه

مقابله با موشک‌های بالستیک همچنان چالش اساسی در سامانه‌های پدافند هوایی در جهان است. تحقیقات انجام شده در زمینه دفاع ضد موشکی، دارای سابقه طولانی است. تاکنون روش‌های مختلفی در هدایت و کنترل موشک‌های ضد موشک استفاده شده است. با توجه به اینکه چالش اصلی در انهدام موشک‌های بالستیک، سرعت بسیار بالای آن‌ها می‌باشد، استفاده از روش‌های هدایت و کنترل با عملکرد سریع‌تر و بهتر، همواره یکی از مشکلات اساسی محققان بوده است. هدایت و کنترل یکپارچه، روش نوینی است که در آن با ترکیب قوانین هدایت و قوانین کنترل، به یک قانون یکپارچه دست پیدا می‌کنند، که هر دو عمل هدایت و کنترل را به صورت همزمان انجام می‌دهد. این مسئله علاوه بر بهبود عملکرد، سرعت پاسخ دهی را افزایش می‌دهد که می‌تواند در مقابله با اهداف سرعت بالا، مؤثر واقع شود. در روش‌های کلاسیک هدایت و کنترل موشک مانند **Error! Reference source not found.** هدایت و کنترل به صورت جداگانه در دو فرآیند متمایز طراحی می‌شوند. معمولاً در این روش‌ها، هدایت در حلقه بیرونی قرار می‌گیرد و شتاب فرمان تولید شده توسط آن در یک حلقه درونی (خلبان خودکار) کنترل می‌شود.



شکل ۱- هندسه درگیری موشک رهگیر و هدف

با توجه به شکل ۱ معادله سینماتیک درگیری به صورت رابطه‌های ۱ و ۲ می‌باشد:

$$\dot{R} = V_T \cos(\lambda - \varphi_T) - V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \quad (1)$$

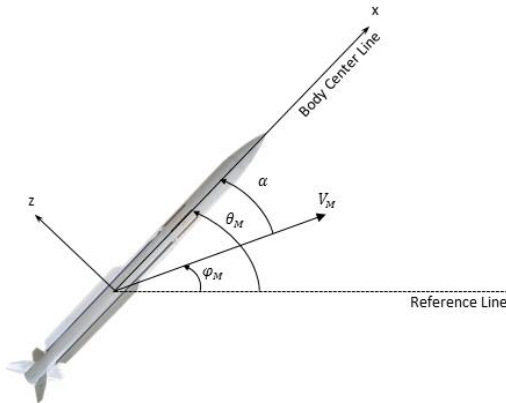
$$R\dot{\lambda} = -V_T \sin(\lambda - \varphi_T) + V_M \sin(\lambda - \varphi_M) \quad (2)$$

که در آن R فاصله میان موشک و هدف در راستای خط دید، λ زاویه خط دید با خط مرجع، V_T و V_M به ترتیب سرعت موشک رهگیر و سرعت هدف، φ_M زاویه مسیر موشک و φ_T زاویه مسیر هدف می‌باشند. سرعت موشک و سرعت هدف در فاز نهایی برخورد، ثابت فرض می‌شود. در نتیجه شتاب موشک به صورت زیر قابل تعریف است:

$$a_M = V_M \dot{\varphi}_M \quad (3)$$

با مشتق‌گیری از روابط ۱ و ۲ و ادغام آن‌ها و با تعریف مؤلفه شتاب هدف عمود بر خط دید به صورت a_{T_\perp} ، رابطه ۴ حاصل می‌شود:

$$\ddot{\lambda} = -\frac{2\dot{R}}{R}\dot{\lambda} + \frac{a_{T_\perp}}{R} - \frac{a_M \cos(\lambda - \varphi_M)}{R} \quad (4)$$



شکل ۲- وضعیت دستگاه بدنی موشک رهگیر نسبت به دستگاه مرجع.

با توجه به شکل ۲، معادلات حرکت سه درجه آزادی برای موشک رهگیر به صورت روابط ۵ می‌باشند:

$$\dot{\alpha} = -\frac{F_{A_z}}{mV_M} + q + \Delta\alpha$$

$$\dot{q} = \frac{M_A}{I_{yy}} + \Delta q \quad (5)$$

$$\dot{\theta} = q$$

که در آن θ ، زاویه فراز (زاویه بدنه موشک با خط مرجع)، F_{A_z} نیروی آیرودینامیکی وارد بر موشک در راستای محور z بدنی، I_{yy} ممان اینرسی موشک، M_A ممان ناشی از نیروی آیرودینامیکی و نیروی پشران موتور موشک و Δq و $\Delta\alpha$ عدم قطعیت‌های کراندار می‌باشند. در مدل موشک رهگیر، ضرایب آیرودینامیک به صورت غیرخطی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند [۹]:

$$C_N = a_1\alpha^3 + b_1\alpha|\alpha| + c_1\alpha \quad (6)$$

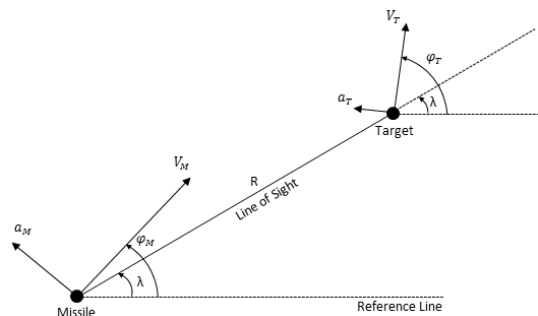
که در آن C_N ضریب نیروی عمود بر بدنه موشک و تابع زاویه حمله (به رادیان) و C_M ضریب ممان موشک و تابع زاویه حمله و زاویه انحراف بالک (به رادیان) در نظر گرفته شده‌اند. از تأثیر زاویه انحراف بالک در ضریب نیروی عمودی، C_N ، صرف نظر شده است.

روش پسگام ارائه نمودند [۴]. هدف از ارائه این روش اصابت به هدف با قید زاویه برخورد می‌باشد. اغتشاشات ناشناخته ایجاد شده توسط هدف، ضرایب آیرودینامیکی موشک و اغتشاشات محیطی، با استفاده از یک مشاهده‌گر اغتشاش مد لغزشی تخمین زده شده‌اند. پایداری این روش نیز با استفاده از تئوری لیاپانوف اثبات شده است. شبیه‌سازی به صورت صفحه‌ای بوده و هدف نیز زمینی و با سرعت پایین می‌باشد. ما و همکاران در سال ۲۰۱۲ روش هدایت و کنترل یکپارچه بر اساس روش پسگام برای اصابت با زاویه برخورد مطلوب به یک هدف ثابت زمینی ارائه نمودند که در آن پایداری سیستم نسبت به عدم قطعیت‌های مدل تضمین شده است [۵]. لازم به ذکر است که در همه پژوهش‌های ارائه شده در این بخش، مدل آیرودینامیک موشک، خطی در نظر گرفته شده است. پدهی و همکاران در سال ۲۰۱۴ روش هدایت و کنترل یکپارچه جزئی برای مقابله با اهداف بالستیک سرعت بالا ارائه نمودند [۶]. در این روش که دارای دو حلقه است، در حلقه بیرونی یک مسئله هدایت بهینه برنامه‌ریزی استاتیک پیش‌بین مدل با توجه به معادلات حرکت شش درجه آزادی غیرخطی موشک رهگیر حل شده است. حلقه درونی نیز بر اساس روش دینامیک معکوس برای اجرای نرخ سرعت زاویه‌ای تولید شده توسط حلقه بیرونی، طراحی شده است. پانچال و همکاران در سال ۲۰۱۸ روش هدایت و کنترل یکپارچه مقاوم را برای یک موشک تاکتیکی ارائه نمودند [۷]. در این روش از دو حلقه کنترلی درونی با دینامیک سریع‌تر و بیرونی با دینامیک کندتر استفاده شده است. همچنین پایداری حلقه بسته سیستم کنترل با روش لیاپانوف اثبات شده است. سینه‌ها و همکاران در سال ۲۰۲۱ روش هدایت و کنترل یکپارچه با قید زمان برخورد به هدف ارائه نمودند [۸]. در این روش که دارای یک حلقه کنترلی اضافی برای احصای قید مسئله می‌باشد، از کنترل مد لغزشی استفاده شده است. همچنین وسیله دارای دو سطح کنترلی بوده و از یک مشاهده‌گر غیرخطی برای تخمین مانور هدف استفاده شده است.

روش هدایت و کنترل یکپارچه پیش رو بر اساس روش پسگام می‌باشد که در آن از آیرودینامیک غیرخطی در مدل موشک رهگیر استفاده و با آیرودینامیک خطی مقایسه شده است. شبیه‌سازی به صورت سه درجه آزادی در صفحه فراز انجام شده است. همچنین هدف سرعت بالا و دارای مانور با شتاب جانبی می‌باشد. در مدل موشک عدم قطعیت نیز لحاظ شده است.

۲- هندسه درگیری و مدل موشک رهگیر

در این بخش هندسه درگیری موشک و هدف به صورت معادلات سینماتیکی و مدل دینامیکی موشک در صفحه فراز که برای معادلات هدایت و کنترل یکپارچه مورد نیاز است، ارائه شده است. هندسه درگیری موشک رهگیر و هدف در شکل ۱ ارائه شده است:



$$V_3 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_3^*)^2 \quad (13)$$

با مشتق گیری از معادله ۱۳، معادله ۱۴ به دست می آید:

$$\dot{V}_3 = x_1\dot{x}_1 + (x_2 - x_2^*)\dot{x}_2 - \dot{x}_2^* + (x_3 - x_3^*)\dot{x}_3 - \dot{x}_3^* \quad (14)$$

حال با جایگذاری معادلات ۹ در معادله ۱۴، می توان به معادله ۱۵ رسید:

$$\dot{V}_3 = B_1x_1^2 + B_2x_1x_2 + x_1\Delta\lambda + A_1x_3(x_2 - x_2^*) - A_1A_3x_2(x_2 - x_2^*) + \Delta\alpha(x_2 - x_2^*) + \left(\frac{B_1}{B_2} + \frac{k_1}{B_2}\right)\dot{x}_1(x_2 - x_2^*) + (x_3 - x_3^*)\left(\dot{x}_3^* - A_1(x_2 - x_2^*) - k_3(x_3 - x_3^*)\right) - \dot{x}_3^* + \Delta q \quad (15)$$

با ساده سازی معادله ۱۵، معادله ۱۶ به دست می آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= B_1x_1^2 + B_2x_1x_2 + x_1\Delta\lambda + A_1x_3(x_2 - x_2^*) - A_1A_3x_2(x_2 - x_2^*) + \Delta\alpha(x_2 - x_2^*) \\ &+ \left(\frac{B_1}{B_2} + \frac{k_1}{B_2}\right)\dot{x}_1(x_2 - x_2^*) + (x_3 - x_3^*)\left(-A_1(x_2 - x_2^*) - k_3(x_3 - x_3^*) + \Delta q\right) \\ &= B_1x_1^2 + B_2x_1x_2 + x_1\Delta\lambda + A_1x_3(x_2 - x_2^*) - A_1A_3x_2(x_2 - x_2^*) + \Delta\alpha(x_2 - x_2^*) \\ &+ \left(\frac{B_1}{B_2} + \frac{k_1}{B_2}\right)\dot{x}_1(x_2 - x_2^*) - A_1(x_2 - x_2^*)(x_3 - x_3^*) - k_3(x_3 - x_3^*)^2 + \Delta q(x_3 - x_3^*) \end{aligned} \quad (16)$$

و در نهایت با حذف عبارت های قرینه، می توان به معادله ۱۷ دست یافت:

$$\dot{V}_3 = -k_1x_1^2 - k_2(x_2 - x_2^*)^2 - k_3(x_3 - x_3^*)^2 + \Delta\lambda x_1 + \Delta\alpha(x_2 - x_2^*) + \Delta q(x_3 - x_3^*) \quad (17)$$

در صورتی که عدم قطعیت ها در نظر گرفته نشوند، با توجه به اینکه پارامترهای $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0$ می باشند، مشتق تابع لیاپانوف در معادله ۱۷ همواره منفی است و پایداری مجانبی برقرار است.

اما با وجود عدم قطعیت ها، اثبات پایداری، با استفاده از روش پایداری ورودی به حالت، انجام می شود. در روش پایداری ورودی به حالت، سیستمی مانند زیر در نظر گرفته می شود:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (18)$$

که در آن $f: [0, \infty) \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$ در t تکه ای پیوسته و به صورت محلی شرط لیپ شیتز است.

تابع پیوسته $\gamma: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ از کلاس K است، اگر اکیداً صعودی و $a(0) = 0$ باشد.

تابع پیوسته $\beta: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ از کلاس KL است، اگر برای هر s ثابت، نگاشت $\beta(r, s)$ نسبت به r از کلاس K باشد و برای هر r ثابت، نگاشت $\beta(r, s)$ نسبت به s نزولی باشد و در صورتی که $s \rightarrow \infty$ ، $\beta(r, s) \rightarrow 0$ ،

سیستم معادله ۱۸، پایدار ورودی به حالت محلی نامیده می شود، اگر تابع β از کلاس KL ، تابع γ از کلاس K وجود داشته باشند، به طوری که:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right) \quad (19)$$

معادله ۱۹ تضمین می کند که برای هر ورودی کراندار $u(t)$ ، حالت $x(t)$ نیز کراندار است. همچنین در صورتی که ورودی صفر باشد، سیستم به صورت یکنواخت پایدار مجانبی خواهد بود.

با تعریف:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= x_2 - x_2^* \\ \tilde{x}_3 &= x_3 - x_3^* \end{aligned} \quad (20)$$

معادله ۱۷ به صورت زیر در می آید:

$$\dot{V}_3 = -k_1x_1^2 - k_2\tilde{x}_2^2 - k_3\tilde{x}_3^2 + \Delta\lambda x_1 + \Delta\alpha\tilde{x}_2 + \Delta q\tilde{x}_3 \quad (21)$$

نامعادلات زیر در نظر گرفته می شود:

۳- معادلات هدایت و کنترل یکپارچه

در این بخش با استفاده از معادلات سینماتیک درگیری و معادلات دینامیکی موشک، معادلات حالت یکپارچه استخراج می شوند. با ترکیب روابط ۳، ۴ و معادله اول رابطه ۵، رابطه ۷ حاصل می شود:

$$\ddot{\lambda} = -\frac{2\dot{R}}{R}\dot{\lambda} + \frac{a_{T_x}}{R} - \frac{F_{A_x} \cos(\lambda - \varphi_M)}{mR} + \frac{V_M \Delta\alpha \cos(\lambda - \varphi_M)}{R} \quad (7)$$

که در آن می توان عبارت $\frac{a_{T_x}}{R}$ که بیانگر مؤلفه شتاب هدف عمود بر خط دید است و عبارت شامل عدم قطعیت، $\frac{V_M \Delta\alpha \cos(\lambda - \varphi_M)}{R}$ ، را به صورت یک عدم قطعیت در نظر گرفت. با ترکیب رابطه ۷ و رابطه ۶، رابطه ۸ حاصل می شود:

$$\ddot{\lambda} = -\frac{2\dot{R}}{R}\dot{\lambda} - \frac{QS \cos(\lambda - \varphi_M)}{mR} (a_1\alpha^3 + b_1\alpha|\alpha| + c_1\alpha) + \Delta\lambda \quad (8)$$

همچنین با ترکیب روابط ۵ و ۶ و بازنویسی رابطه ۸، معادلات یکپارچه به صورت رابطه ۹ استخراج می شوند:

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} &= -\frac{2\dot{R}}{R}\dot{\lambda} - \frac{QS \cos(\lambda - \varphi_M)}{mR} (a_1\alpha^3 + b_1\alpha|\alpha| + c_1\alpha) + \Delta\lambda \\ \ddot{\alpha} &= \frac{QS}{mV_M} (a_1\alpha^3 + b_1\alpha|\alpha| + c_1\alpha) + q + \Delta\alpha \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{q} = \frac{QSd}{I_{yy}} (a_2\alpha^3 + b_2\alpha|\alpha| + c_2\alpha + d_2\delta) + \Delta q$$

که در آن $x = [\dot{\lambda} \quad \alpha \quad q]^T$ حالت ها و $u = \delta$ کنترل معادلات یکپارچه می باشند.

۴- طراحی کنترل کننده پسگام

در این بخش از روش کنترل غیرخطی پسگام بر روی معادلات هدایت و کنترل یکپارچه با آیرودینامیک غیرخطی در مدل موشک رهگیر، استفاده شده است. در این روش قانون کنترل به صورت رابطه ۱۰ می باشد:

$$u = \frac{1}{g_3(x_1, x_2, x_3)} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} g_2(x_1, x_2) - k_3[x_3 - \phi_2(x_1, x_2)] - f_3(x_1, x_2, x_3) \right] = \phi_3(x_1, x_2, x_3) \quad (10)$$

برای طراحی کنترل کننده برای معادلات یکپارچه ابتدا یک تابع لیاپانوف به صورت رابطه ۱۱ در نظر گرفته می شود:

$$V_1 = V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (11)$$

با مشتق گیری از رابطه ۱۱ و جایگذاری روابط معادلات یکپارچه در آن و اجرای روش کنترل پسگام، رابطه ۱۲ به عنوان قانون کنترل برای کل معادلات هدایت و کنترل یکپارچه به دست می آید:

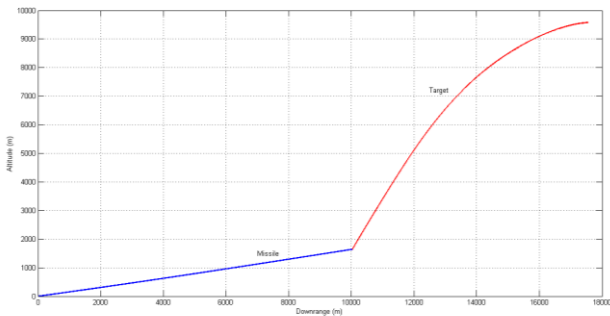
$$u = \frac{1}{C_1} [\dot{x}_3^* - A_1(x_2 - x_2^*) - k_3(x_3 - x_3^*) - C_2] = \phi_3(x_1, x_2, x_3) \quad (12)$$

که در آن:

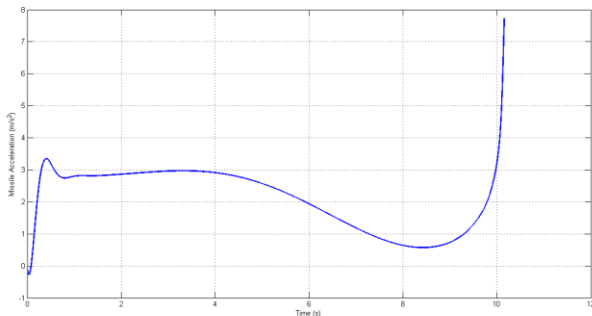
$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{QSd}{I_{yy}} d_2 \\ C_2 &= \frac{QSd}{I_{yy}} (a_2\alpha^3 + b_2\alpha|\alpha| + c_2\alpha) \end{aligned}$$

۵- اثبات پایداری

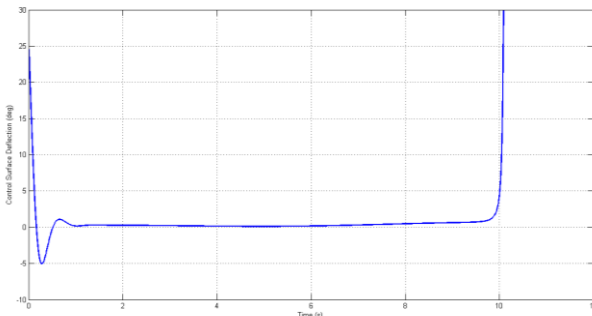
در این بخش با توجه به تابع لیاپانوف به دست آمده در رابطه ۱۲، پایداری سیستم یکپارچه، اثبات می شود. تابع لیاپانوف بر اساس رابطه ۱۲، به صورت زیر است:



شکل ۵- موقعیت موشک رهگیر و هدف



شکل ۶- شتاب جانبی وارده به موشک



شکل ۷- زاویه سطح کنترلی موشک

۷- نتیجه گیری

در درگیری و انهدام سرچنگی موشک بالستیک باید خطای برخورد کمتر از ابعاد هدف باشد. با مقایسه‌ای میان نتایج ارائه شده در [۳] با شبیه‌سازی انجام شده در این پژوهش، عملکرد سیستم بهبود یافته است. در [۳]، زاویه سطح کنترلی در آغاز درگیری به مدت ۵ ثانیه در حالت اشباع بود، در حالی که با بهبود ۹۸ درصدی عملکرد، این اشباع به کمتر از یک دهم ثانیه کاهش یافته است. این بهبود عملکرد به دلیل، تغییر در انتخاب ضرایب کنترلی نسبت به [۳] و انتخاب مقادیر بهتری برای این ضرایب است. در سناریوی اجرا شده با هدف سرعت بالا، در حالتی که آیرودینامیک به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود، برخورد انجام نمی‌گیرد. اما در حالت غیرخطی برخورد با خطای ۱۰/۹ سانتی‌متر و به صورت Hit to Kill رخ می‌دهد که این مسئله برتری مدل کردن آیرودینامیک به صورت غیرخطی بر خطی را نشان می‌دهد.

۸- مراجع

$$\Delta \lambda x_1 \leq \frac{1}{2\delta_1^2} x_1^2 + \frac{\delta_1^2}{2} \Delta \lambda^2$$

$$\Delta \alpha \tilde{x}_2 \leq \frac{1}{2\delta_2^2} \tilde{x}_2^2 + \frac{\delta_2^2}{2} \Delta \alpha^2 \quad (22)$$

$$\Delta q \tilde{x}_3 \leq \frac{1}{2\delta_3^2} \tilde{x}_3^2 + \frac{\delta_3^2}{2} \Delta q^2$$

با اعمال نامعادلات ۲۲ بر روی معادله ۲۱، نامعادله ۲۳ به دست می‌آید:

$$\dot{V}_3 \leq \left(\frac{1}{2\delta_1^2} - k_1 \right) x_1^2 + \left(\frac{1}{2\delta_2^2} - k_2 \right) \tilde{x}_2^2 + \left(\frac{1}{2\delta_3^2} - k_3 \right) \tilde{x}_3^2 + \frac{\delta_1^2}{2} \Delta \lambda^2 + \frac{\delta_2^2}{2} \Delta \alpha^2 + \frac{\delta_3^2}{2} \Delta q^2 \quad (23)$$

با در نظر گرفتن $k_i - \frac{1}{2\delta_i^2} = c_i > 0, (i=1,2,3)$ و جایگذاری در نامعادله

۲۳، به معادله ۲۴ می‌توان رسید:

$$\dot{V}_3 \leq -c_1 x_1^2 - c_2 \tilde{x}_2^2 - c_3 \tilde{x}_3^2 + \frac{\delta_1^2}{2} \Delta \lambda^2 + \frac{\delta_2^2}{2} \Delta \alpha^2 + \frac{\delta_3^2}{2} \Delta q^2 \quad (24)$$

با انتخاب $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ و $c = \min\{c_1, c_2, c_3\}$ ، نامعادله ۲۵ به دست می‌آید:

$$\dot{V}_3 \leq -2cV_3 + \frac{\delta^2}{2} (\Delta \lambda^2 + \Delta \alpha^2 + \Delta q^2) \quad (25)$$

و با حل نامعادله دیفرانسیلی ۲۵، نامعادله ۲۶ به دست می‌آید:

$$V_3 \leq e^{-2ct} V_3(0) + \frac{\delta^2}{2} \int_0^t e^{-2c(t-\tau)} (\Delta \lambda^2 + \Delta \alpha^2 + \Delta q^2) d\tau \leq e^{-2ct} V_3(0) + \delta^2 \frac{1 - e^{-2ct}}{4c} \sup_{0 \leq \tau \leq t} (\Delta \lambda^2 + \Delta \alpha^2 + \Delta q^2) \quad (26)$$

با جذر گرفتن از نامعادله ۲۶ و استفاده از نامعادله $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ برای مقادیر غیرمنفی a و b ، نامعادله ۲۷ به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} |x_1(t)| \\ |\tilde{x}_2(t)| \\ |\tilde{x}_3(t)| \end{pmatrix} \leq e^{-2ct} \begin{pmatrix} |x_1(0)| \\ |\tilde{x}_2(0)| \\ |\tilde{x}_3(0)| \end{pmatrix} + \delta \sqrt{\frac{1 - e^{-2ct}}{4c}} \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \begin{pmatrix} |\Delta \lambda(\tau)| \\ |\Delta \alpha(\tau)| \\ |\Delta q(\tau)| \end{pmatrix} \right) \quad (27)$$

با تنظیم کردن ضرایب c_i و $\delta_i, (i=1,2,3)$ ، x_1 ، \tilde{x}_2 و \tilde{x}_3 به سمت همسایگی کوچکی از صفر همگرا می‌شوند. بنابراین نرخ زاویه خط دید، $(x_1 = \lambda)$ نسبت به شتاب هدف و عدم قطعیت‌های مدل موشک، پایدار ورودی به حالت خواهد بود و به عبارت دیگر کنترلی نسبت به عدم قطعیت مقاوم است.

۶- شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش با توجه به معادلات هدایت و کنترل یکپارچه استخراج شده و همچنین کنترلی کننده به دست آمده، شبیه‌سازی درگیری موشک و هدف در فاز نهایی برخورد انجام شده است. در سناریوی شبیه‌سازی شده، هدف دارای سرعت بالا (۳۰۰۰ متر بر ثانیه) و برخورد به صورت سر به سر می‌باشد. با توجه به اینکه موشک از جلو (و یا کنار) هدف را مورد اصابت قرار می‌دهد، سرعت موشک کمتر از سرعت هدف و برابر ۱۰۰۰ متر بر ثانیه است. همچنین هدف مانوری در نظر گرفته شده است، بدین صورت که دارای شتاب جانبی $1g$ می‌باشد. در نمودارهای شکل‌های ۵، ۶ و ۷، موقعیت موشک رهگیر و هدف در فاز نهایی برخورد، شتاب جانبی وارده به موشک حین برخورد و زاویه سطح کنترلی موشک نشان داده شده است.

- [1] H. Nathan, S.N. Balakrishnan, C. Philips, "Sliding Mode Integrated Missile Guidance and Control," AIAA-2010-7741, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Toronto, Ontario Canada, August 2010.
- [2] D.E. Williams, J. Richman, B. Friedland, "Design of an Integrated Strapdown Guidance and Control System for a Tactical Missile," AIAA-1983-2169, *AIAA Guidance and Control Conference*, Gatlinburg, August 1983.
- [3] H. Yan, H. Ji, "Integrated Guidance and Control Based on Backstepping and Input-to-State Stability," *30th Chinese Control Conference*, Yantai, China, July 2011.
- [4] Z. Fan, D. Yu, H. Zhao, W. Gu, "Integrated Backstepping Guidance and Control with Impact Angle Constraint," *International Conference in Electrics, Communication and Automatic Control*, China, 2012
- [5] W. Ma, H. Yan, H. Ji, "Integrated Guidance and Control Against Ground Fixed Targets Based on Backstepping and Input-to-State Stability," *International Conference on Mechatronics and Automation*, Chengdu, China, August 2012.
- [6] R. Padhi, C. Chawla, P.G. Das, "Partial Integrated Guidance and Control of Interceptors for High-Speed Ballistic Targets," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 37, No. 1, 2014.
- [7] B. Panchal, K. Subramanian, S.E. Talole, "Robust Integrated Guidance and Control Design for a Tactical Missile," AIAA-2018-1120, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Florida, January 2018.
- [8] A. Sinha, S.R. Kumar, D. Mukherjee, "Impact Time Constrained Integrated Guidance and Control Design," *Aerospace Science and Technology*, 2021:106824.
- [9] R.A. Hull, Z. Qu, "Design and Evaluation of Robust Nonlinear Missile Autopilots from a Performance Perspective," *American Control Conference*, Seattle, Washington, June 1995.