

قاب‌های فیوژن مقیاس‌پذیر

اصغر رحیمی

دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

و سامرند مویدزاده*

دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

چکیده. در این مقاله ضمن اشاره به مفاهیم قابهای فیوژن (همجوش) و قابهای مقیاس‌پذیر به معرفی قابهای فیوژن مقیاس‌پذیر می‌پردازیم و شرایط معادلی را ارائه می‌کنیم که نشان می‌دهد مقیاس‌پذیری یک قاب فیوژن معادل با یک شرط عملگری بین عملگری قطری و عملگرهای تجزیه و ترکیب قاب فیوژن مورد مطالعه می‌باشد. **واژه‌های کلیدی:** قاب فیوژن مقیاس‌پذیر، قاب فیوژن، قاب، قاب مقیاس‌پذیر. **طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]:** 42C15.

۱. پیش‌گفتار

تبدیلات فوریه بیش از یک قرن به عنوان ابزار اساسی آنالیز به حساب می‌آیند، اما تبدیلات فوریه در مورد سیگنال‌هایی که طی مدتی بخشی از اطلاعاتشان را از دست می‌دادند ایراد عمده‌ای داشت و در نتیجه نیاز به ابزاری جدید بود تا جایگزین شود. در سال ۱۹۶۴ گابور با بدست آوردن یک تقریب اساسی از تجزیه سیگنال در مفهوم مقدماتی، این ایراد را رفع کرد. مفهوم قاب برای یک فضای هیلبرت به طور رسمی در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه برخی از مسائل عمیق روی سری‌های فوریه غیر توافقی توسط دافین و شفر معرفی شد که به نظر نمی‌رسید این ایده علاقه زیادی را برای مطالعه خارج از سری‌های فوریه ایجاد کند، اما مقاله دابچیس، گراسمان و میر در سال ۱۹۸۶ در مورد این ایده نقطه عطفی برای آن شد. قابها در زمینه‌هایی چون اپتیک، تئوری بانکهای فیلتر، بازیابی سیگنال، پردازش تصویر و... کاربرد دارند و امروزه نیز قابها اثرات مضار ارتباطات مبنای-بسته را کاهش داده و در نتیجه آن حجم وسیعی از داده‌ها گسترده شده است. برای بیان تئوری قابهای فیوژن می‌توان شبکه‌های حسگر را به عنوان مثال بیان کرد و هدف ما توسعه شبیه‌سازی ساختار شبکه‌های حسگر است، که این شبیه‌سازی یک تئوری ریاضی به حساب می‌آید. موارد استفاده تئوری قابهای فیوژن بیشتر توضیح شبیه‌سازی رفتار سلول‌های عصبی مغز هنگام پردازش و ذخیره کردن اطلاعات و بدست آوردن چرخه پردازشی کارآمد و مؤثر برای مجموعه‌ای بزرگ از داده است.

دسته بزرگی از شبکه‌های حسگر شبکه‌ای را به زیر شبکه‌هایی تقسیم می‌کنند تا شبکه را بصورت یک زیر مجموعه از زیر فضاها شکل دهند. حسگرها در هر شبکه‌ای به عنوان بردارهای قاب شبیه‌سازی می‌شوند تا هر قاب را برای یک زیرفضا در فضای هیلبرت شکل دهند. در واقع زیر فضاها به عنوان قابهای بازسازی شده به کار می‌روند و این بازسازی موضعی به عنوان پیش‌درآمدی برای قابهای فیوژن بازسازی شده به کار گرفته می‌شود تا سیگنال ابتدایی را به طور کامل بازسازی کند. طیف گسترده‌ای از برنامه‌های کاربردی از قاب‌ها به دو نوع تقسیم می‌شوند: نوع اول برای تجزیه داده‌ها و نوع دوم استفاده از قابها برای گسترش داده‌ها می‌باشد. همه این برنامه‌های کاربردی به الگوریتم‌هایی نیاز دارند که این الگوریتم‌ها کلاسی از قاب‌تنگ می‌باشند. [۱] یک سوال مطرح می‌شود، آیا همه قاب‌ها می‌توانند به یک قاب‌تنگ تبدیل شوند؟ یا به صورت دقیق‌تر کدام قاب‌ها این خاصیت را دارند که به یک قاب‌تنگ تبدیل شوند؟

پاسخ این سؤال از لحاظ نظری ساده است. با به کار بردن ریشه دوم عملگری موسوم به عملگر قاب می‌توان از یک قاب، قاب‌تنگ ایجاد کرد. اما یک مشکل اساسی در این روش وجود دارد، در این روش همه خواص مورد انتظار یک قاب که به واسطه آنها قاب با دقت بیشتری مشخص می‌شود، از بین می‌رود. اما با استفاده از ضرب هر بردار قاب در یک ضریب عددی که این ضرایب عددی با دقت و با استفاده از روش‌هایی مشخص می‌شوند، می‌توان بعضی از قابها را به قاب‌تنگ تبدیل کرد که به لحاظ نظری روشی آسان‌تر از روش قبل است و بعلاوه تقریباً همه خواص قاب مانند مقاومت در برابر پاک‌شدگی یا گوناگونی بسط ضرایب بدون تغییر باقی می‌ماند. این روش بصورت گسترده تحت عنوان قابهای مقیاس‌پذیر مورد مطالعه قرار گرفته است. [۲]

در این مقاله به بررسی مقیاس‌پذیری قابهای فیوژن می‌پردازیم و این که در تبدیل یک قاب فیوژن به قاب فیوژن تنگ چه خواصی از آن حفظ می‌شود تا همان‌طور که بیان شد الگوریتم‌هایی از قابهای فیوژن حاصل شود و طیف گسترده‌ای از برنامه‌های کاربردی قابهای فیوژن را شامل شود.

* سخنران

تعریف ۱.۱. فرض کنید $\{W_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از زیرفضاهای بسته هیلبرت H بوده و $\{v_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از وزن ها باشد که در آن $v_i > 0$ ، $i \in I$ می باشد. خانواده $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ را یک قاب فیوژن می نامیم هرگاه اعداد ثابت $0 < C \leq D < \infty$ موجود باشد به طوری که به ازاء هر f از فضای هیل برت H داشته باشیم:

$$(۱) \quad C\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} (v_i)^2 \|\pi_{w_i} f\|^2 \leq D\|f\|^2$$

که در آن π_{w_i} تصویر متعامد H روی زیر فضای بسته $w_i \subset H$ را نشان می دهد. ضرایب ثابت C و D را کران های قاب فیوژن می گوئیم. هرگاه $C = D = 1$ باشد آن را قاب فیوژن پارسوال می نامیم.

تعریف ۲.۱.

$$(۲) \quad \left(\sum_{i \in I} \oplus w_i\right)_{l^2} = \left\{ \{f_i\}_{i \in I} \mid \{f_i\} \in w_i, \{\|f_i\|\} \in l^2 \right\}$$

گزاره ۳.۱. اگر $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک دنباله بسل فیوژن روی H باشد (یعنی در رابطه ۱ نامساوی سمت راست برقرار باشد) و به ازاء هر $i \in I$ ، $f_i \in w_i$ باشد در اینصورت سری $\sum_{i \in I} v_i f_i$ همگرای نامشروط است.

تعریف ۴.۱. اگر $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن باشد، عملگر ترکیب $T_w : \left(\sum_{i \in I} \oplus w_i\right)_{l^2} \rightarrow H$ را به ازاء هر $f = \{f_i\}_{i \in I}$ به صورت $T_w f = \sum_{i \in I} v_i f_i$ تعریف می کنیم.

تعریف ۵.۱. اگر $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن باشد، عملگر الحاق عملگر T_w را عملگر تجزیه می نامیم و با T_w^* نشان می دهیم که $T_w^* : H \rightarrow \left(\sum_{i \in I} \oplus w_i\right)_{l^2}$ به ازاء هر $f \in H$ به صورت $T_w^* f = \{v_i \pi_{w_i} f\}_{i \in I}$ تعریف می کنیم.

تعریف ۶.۱. با ترکیب کردن دو عملگر T_w و T_w^* ، عملگر قاب فیوژن S_w را بدست می آوریم که به ازاء هر $f \in H$:

$$(۳) \quad s_w f = T_w T_w^* f = T_w(\{v_i \pi_{w_i} f\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} v_i^2 \pi_{w_i} f$$

گزاره ۷.۱. اگر $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن روی H باشد و عملگر معکوس پذیر $U : H \rightarrow H$ روی H باشد، آنگاه $\{(UW_i, v_i)\}_{i \in I}$ نیز یک قاب فیوژن است.

تعریف ۸.۱. اگر $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن برای فضای هیلبرت H باشد، در اینصورت آن را مقیاس پذیر می نامند هرگاه به ازاء هر $i \in I$ ، ثابت های $c_i > 0$ چنان موجود باشند که $V = \{(V_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن پارسوال باشد، یعنی رابطه زیر به ازای هر $f \in H$ برقرار باشد.

$$(۴) \quad \sum_{i \in I} v_i^2 \|c_i \pi_{V_i} f\|^2 = \|f\|^2$$

که در آن $\pi_{V_i} = c_i \pi_{w_i}$ تصویر متعامد H روی زیر فضای بسته $V_i \subset H$ را نشان می دهد.

هرگاه $\delta > 0$ چنان موجود باشد که $c_i > \delta$ در این صورت آن را مقیاس پذیر اکید می نامند.

اکید بودن قاب فیوژن مقیاس پذیر برای حالت متناهی برقرار است و برای قاب فیوژن مقیاس پذیر $\{(V_i, v_i)\}_{i \in I}$ از قاب فیوژن $\{(W_i, v_i)\}_{i \in I}$ با توجه به $|I| < \infty$ و ثابت های مثبت c_i خود یک قاب فیوژن است ولی اگر در حالت نامتناهی بررسی کنیم شاید این گونه نباشد. فرض کنید $\{e_{ij}\}_{j \in J_i}$ یک پایه متعامد یکه برای $\left(\sum_{i \in I} \oplus V_i\right)_{l^2}$ باشد عملگر $D = D_c$ از $\left(\sum_{i \in I} \oplus V_i\right)_{l^2}$ بتوی $\left(\sum_{i \in I} \oplus V_i\right)_{l^2}$ با توجه به دنباله $\{c_i\}_{i \in I}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$(۵) \quad D_c \{f_i\}_{i \in I} = \{c_i f_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I} \in \text{dom } D_c$$

$$(۶) \quad \text{dom } D_c := \left\{ \{f_i\}_{i \in I} \in \sum_{i \in I} \oplus V_i; \{c_i f_i\}_{i \in I} \in \sum_{i \in I} \oplus V_i \right\}$$

واضح است که به ازاء تمام $i \in I$ ها عملگر D_c در $l^2(I)$ خودالحاق است اگر و تنها اگر $c_i \in \mathbb{R}$ [۴].

تعریف ۹.۱. معرفی عملگر ICR : عملگر خطی T را از فضای هیلبرت H بتوی فضای هیلبرت K ، ICR گوئیم هرگاه یک به یک و دارای برد بسته باشد. به طور مثال هرگاه وجود داشته باشد $\delta > 0$ بطوریکه $\|Tf\| \geq \delta \|f\|$ برای هر $f \in \text{dom } T$ برقرار باشد. عملگر آنالیز قاب فیوژن همواره یک عملگر ICR است و همچنین D_c یک ایزومورفیسم است اگر عملگری اکیدا کراندار باشد [۵].

گزاره ۱۰.۱. فرض کنید $W = \{(w_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن برای فضای هیلبرت H باشد با عملگر قاب S_w و عملگر آنالیز T_w^* و $c_i \in \mathbb{R}^+$ در اینصورت روابط زیر معادلند:

الف) $V = \{(V_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن است.

ب) $ICR, D_c|_{ran(T_w^*)}, ran T_w^* \subset dom D_c$ است.

در اینجا عملگر قاب فیوژن $V = \{(V_i, v_i)\}_{i \in I}$ بصورت $S_V = \overline{T_V D_c} D_c T_V^*$ ، [۳]

گزاره ۱۱.۱. فرض کنید $W = \{(w_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن برای فضای هیلبرت H باشد، آنگاه $V = \{(V_i, v_i)\}_{i \in I}$ که در آن $c_i \pi_{v_i} = \pi_{w_i}$ می‌باشد، یک قاب فیوژن است اگر و تنها اگر $D_c|_{ran(T_w^*)}$ عملگری کراندار و ICR باشد.

گزاره ۱۲.۱. فرض کنید $W = \{(w_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن برای فضای هیلبرت H باشد، با عملگر قاب S_w و عملگر آنالیز T_w^* در اینصورت روابط زیر معادلند:
الف) W مقیاس‌پذیر است.

ب) عملگری قطری و نامنفی مانند D در $\sum_{i \in I} \oplus W_i$ وجود دارد بطوری که $\overline{T_W D D T_W^*} = I_H$:

نتیجه ۱۳.۱. هرگاه H و K فضاهای هیلبرت باشند و $W = \{(w_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن باشد و $U \in B(H, K)$ ایزومورفیسمی باشد بطوریکه $UU^* = I_H$ و $U^*U = I_K$ ، آنگاه W مقیاس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\{(W_i U, v_i)\}_{i \in I}$ مقیاس‌پذیر باشد.

گزاره ۱۴.۱. فرض کنید $W = \{(w_i, v_i)\}_{i \in I}$ یک قاب فیوژن برای فضای هیلبرت H باشد و $c_i \in \mathbb{R}$ ، به طوریکه $D_c W$ یک قاب فیوژن باشد آنگاه:

الف) اگر $V = \{(V_i, v_i)\}_{i \in I}$ به طوری که به ازاء هر $i \in I$ و $f \in H$:

$$(V) \quad \|V_i f - W_i f\| \leq \lambda_1 \|W_i f\| + \lambda_2 \|V_i f\|$$

که $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ آنگاه $D_c V$ قاب فیوژن هستند.

ب) هرگاه $T_i \in B(H_i, K_i)$ به طوری که به ازاء هر $i \in I$ و $f_i \in H_i$:

$$(A) \quad C' \|f_i\| \leq \|T_i f_i\| \leq D' \|f_i\|$$

که $C', D' > 0$ آنگاه $L = \{(L_i, v_i)\}_{i \in I}$ که در آن $T_i \pi_{L_i} = \pi_{v_i} D_c L$ قاب فیوژن هستند.

ج) هرگاه $U : \sum_{i \in I} \oplus W_i \rightarrow \sum_{i \in I} \oplus V_i$ عملگری کراندار و ICR باشد که $UW_i \subset V_i$ عملگری کراندار و ICR باشد، آنگاه $D_c UW$ و UW قاب انتقال هستند.

مراجع

1. P. G. Casazza and X. Chen, Frame scalings: A condition number approach, Linear Algebra and Applications. 523 (2017) 152-168.
2. P. G. Casazza, and L.D.Carli, *Piecewise Scalable Frames*, 23 Mar 2022, <https://arxiv.org/abs/2203.12678>
3. P. G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of subspaces, Wavelets, Frames and Operator Theory (College Park, MD, 2003), 87-113, Contemp. Math. 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
4. G. Kutyniok, K.A. Okoudjou, F. Phillip, and E.K. Tuley, Scalable frames, Linear Algebra Appl. 438(5) (2013) 2225-2238.
5. G. Kutyniok, K. A. Okoudjou, and F. Philipp, Scalable frames and convex geometry, Contemp. Math. 626 (2014) 19-32.

پست الکترونیکی: rahimi@maragheh.ac.ir

پست الکترونیکی: samrand.moayaedzadeh@gmail.com