یازدهمین سمینار آنالیز هارمونیک و کاربردها
۱۲ و ۱۳ اردیبهشت ماه ۱۴۰۳
دانشگاه کردستان
11th Seminar on Harmonic Analysis and Applications
1 - 2 May 2024
University of Kurdistan

دوگان G-K- قاب‌های پیوسته در فضاهای هیلبرت سی‌استار مدول

جهانگیر چشم آور و اسدالله حسین پور*
دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله، ضمن مطالعه $g-K$ -قاب های پیوسته در یک فضای هیلبرت C^*-مدول، $g-K$ - بسل‌های پیوسته دوگان متناظر را معرفی و برخی خواص آن‌ها را بررسی می کنیم.
واژه‌های کلیدی: $g-K-$ قاب‌های پیوسته ، $g-K-$ بسل پیوسته دوگان.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 42C15, 46L99.

۱. پیش‌گفتار

یکی از دلایل مطالعه قاب ها در فضاهای هیلبرت C^* -مدول این است که بین ساختار فضاهای هیلبرت و هیلبرت C^*-مدول تفاوت هایی وجود دارد. به عنوان مثال، در حالت کلی، هر عملگر کراندار روی یک فضای هیلبرت یک الحاقی منحصر به فرد دارد، در حالی که این واقعیت در حالت کلی برای هیلبرت C^*-مدول ها برقرار نیست . فرانک و لارسون [۳] مفهوم قاب برای یک عملگر را روی یک فضای هیلبرت C^* -مدول گسترش دادند، لذا پس از این بود که تعمیم قاب ها در فضاهای هیلبرت C^* -مدول توجه بیشتری را به خود جلب کردند، به عنوان مثال، منابع [۱، ۴] را ببینید. مفهوم g-قاب‌ها در فضاهای هیلبرت C^* -مدول در [۳، ۴] معرفی شده است و همچنین، مفهوم $K-$ قاب‌ها در فضاهای هیلبرت C^* -مدول برای یک عملگر $K \in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ در [۵] تعریف شده است، که در آن $\mathcal{A}$ یک C^* -جبر مختلط با نرم $\| \ \|_{\mathcal{A}}$ و $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ نشان دهنده مجموعه ای از همه نگاشت های $\mathcal{A}$-خطی الحاق پذیر روی هیلبرت $\mathcal{A}-$ مدول $\mathcal{H}$ است. در بخش دوم، مفهوم $c-K-g$-قاب در فضاهای هیلبرت C^* -مدول بیان می شوند. در بخش سوم، دوگان $c-K-g$-قاب‌ها را روی این فضاها معرفی و سپس برخی از خصوصیات سیستم $c-K-g$-بسل دوگان را ارائه می دهیم. در این مقاله U و V را به عنوان دو فضای هیلبرت C^* -مدول و $\{V_k\}_{k\in I}$ را به عنوان خانواده ای از زیر فضاهای V در نظر می‌گیریم. در نهایت فرض می کنیم $(\mathcal{M},\ \mu)$ یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ می باشد. یک پیش-هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول $\mathcal{X}$ ، یک $\mathcal{A}$-مدول (چپ) مجهز به یک ضرب داخلی $\mathcal{A}$-مقدار است.
نرم روی $\mathcal{X}$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\|f\|_{\mathcal{X}} = \|\langle f f\rangle\|^{1/2}_{\mathcal{A}} \quad , \quad \forall f \in \mathcal{X}.$$

اگر $\mathcal{X}$ با نرم $\| \cdot \|_{\mathcal{X}}$ یک فضای باناخ باشد، آنگاه $\mathcal{X}$ یک هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول یا یک هیلبرت C^* -مدول روی $\mathcal{A}$ نامیده می شود. از آنجایی که هر فضای هیلبرت مختلط یک هیلبرت $\mathbb{C}$-مدول است، هیلبرت C^*-مدول ها بین فضاهای هیلبرت و فضاهای باناخ قراردارند. برای یک C^*-جبر $\mathcal{A}$ فرض می کنیم $\bigoplus_{m\in\mathcal{M}} V_m$ ، هیلبرت $\mathcal{A}$-مدول باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\bigoplus_{m\in\mathcal{M}} V_m := \left\{ \{g_m\}_{m\in\mathcal{M}} : g_m \in V_m,\ \| \int_{\mathcal{M}} |g_m|^2 d\mu(m)\| < \infty \right\},$$

که در آن به ازای هر $f = \{f_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ و $g = \{g_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ در $\bigoplus_{m\in\mathcal{M}} V_m$، ضرب داخلی $\mathcal{A}$-مقدار به صورت زیر می باشد:

$$\langle f,\ g\rangle = \int_{\mathcal{M}} \langle f_m,\ g_m\rangle d\mu(m).$$

تعریف ۱,۱. فرض کنید U یک هیلبرت C^* -مدول و $(\mathcal{M},\ \mu)$ یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ باشد. یک قاب پیوسته یا به طور ساده، یک c-قاب برای U نسبت به $(\mathcal{M},\ \mu)$، یک خانواده $\{f_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ از بردارهای در U است، به طوری که
(الف) به ازای هر $f \in U$، نگاشت $m \mapsto \langle f, f_m\rangle$ بر $\mathcal{M}$ اندازه پذیر است .
(ب) ثابت های مثبت B, A وجود دارند، به طوری که

$$A\langle f,\ f\rangle \leq \int_{\mathcal{M}} \langle f,\ f_m\rangle\langle f_m,\ f\rangle d\mu(m) \leq B\langle f,\ f\rangle, \qquad \forall f \in U.$$

* سخنران

ثابت های A, B کران های c-قاب نامیده می شوند.
خانواده $\{f_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک سیستم c-بسل برای U با کران B نامیده می شود، هرگاه حداقل نامساوی سمت راست فوق برقرار باشد.

تعریف ۱,۲. یک خانواده $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U, V_m)$ یک g-قاب پیوسته یا به طور ساده، یک g-c-قاب برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ نامیده می شود، اگر خواص زیر برقرار باشند:
(الف) به ازای هر $f \in U$، نگاشت $m \mapsto \langle f, \Lambda_m f\rangle$ بر $\mathcal{M}$ اندازه پذیر است .
(ب) ثابت های مثبت A, B وجود دارند به طوری که

$$A\langle f,\ f\rangle \leq \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m f,\ \Lambda_m f\rangle\langle f_m,\ f\rangle d\mu(m) \leq B\langle f,\ f\rangle, \qquad \forall f \in U.$$

ثابت های A, B کران های g-c-قاب نامیده می شوند. هرگاه حداقل نامساوی سمت راست فوق برقرار باشد، آن را یکg-بسل پیوسته یا به طور ساده، یک g-c-بسل برای U با کران B گوییم. اگر $A = B$، خانواده $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک g-c-قاب چسبان برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ نامیده می شود.

شبیه به حالت گسسته، یک پایه g-متعامد یکه پیوسته، (یا برای سادگی پایه g-c-متعامد یکه) برای یک خانواده از عملگرهای الحاق پذیر روی یک هیلبرت C^* -مدول معرفی شده است [۲].

تعریف ۱,۳. خانواده $\Theta = \{\Theta_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ را در نظر بگیرید.

(الف) Θ را یک g-کامل گویند، هرگاه: $\{f : \Theta_m f = 0, \forall m \in \mathcal{M}\} = \{0\}$.

(ب) یک پایه g-c-متعامد یکه برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$، خانواده ای چون Θ می باشد که در شرایط زیر صدق کند:
(۱) به ازای هر $f \in U$، نگاشت $m \mapsto \langle f, f_m\rangle$ بر $\mathcal{M}$ اندازه پذیر است .

(۲) تقریبا برای همه $n \in \mathcal{M}$، $\int_{\mathcal{M}}\langle \Theta^*_m g_m,\ \Theta^*_n g_n\rangle d\mu(m) = \langle g_m,\ g_n\rangle,\ \forall g_m \in V_m,\ \forall g_n \in V_n.$

(۳) برای هر $f \in U$، $\int_{\mathcal{M}}\langle \Theta_m f,\ \Theta_m f\rangle d\mu(m) = \langle f,\ f\rangle$.

۲. c-g-K-قاب ها درهیلبرت C^*-مدول ها

این بخش را با تعریف c-g-K- قاب‌ها در فضاهای هیلبرت C^*-مدول شروع می‌کنیم.

تعریف ۲,۱. فرض کنید $(\mathcal{M},\ \mu)$ یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ و $K \in End^*_{\mathcal{A}}(U)$. گوییم $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک g-K-قاب پیوسته (یا بطور خلاصه یک c-g-K- قاب)، برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ است، اگر در شرایط زیر صدق کند:
(الف) به ازای هر $f \in U$، نگاشت $m \mapsto \langle f, \Lambda_m f\rangle$ بر $\mathcal{M}$ اندازه پذیر باشد.
(ب) ثابت های مثبت A, B وجود داشته باشند، به طوری که

$$A\langle K^*f,\ K^*f\rangle \leq \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m f,\ \Lambda_m f\rangle d\mu(m) \leq B\langle f,\ f\rangle,\ \forall f \in U. \qquad (۱)$$

ثابت های A, B را کران های c-g-K- قاب می نامند . گوییم که خانواده $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک c-g-K- قاب چسپان است ، اگر ثابت $A > 0$ وجود داشته باشد،بطوری که

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m f,\ \Lambda_m f\rangle d\mu(m) = A\langle K^*f,\ K^*f\rangle,\ \forall f \in U.$$

یک c-g-K- قاب پارسوال برای U ،نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک c-g-K- قاب چسپان است، هرگاه $A = 1$ باشد .
خانواده $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ را یک سیستم g-c- بسل برای U نسبت $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ با کران c-g- بسل B می گویند، هرگاه حداقل نامساوی سمت راست رابطه (۱) برقرار باشد.

نکته ۲,۲. هر g-c-قاب برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$، یک$c$-$K$-$g$- قاب برای U است.
در واقع ،اگر $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک g-c- قاب برای U باشد،آنگاه طبق تعریف ، ثابت های $A, B > 0$ وجود دارد بطوریکه

$$A\langle f,\ f\rangle \leq \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m f,\ \Lambda_m f\rangle d\mu(m) \leq B\langle f,\ f\rangle,\ \ \forall f \in U.$$

از سوی دیگر، با استفاده از

$$\langle K^*f,\ K^*f\rangle \leq \|K\|^2\langle f,\ f\rangle, \qquad \forall f \in U \quad ,$$

بدست می آوریم که

$$A\|K\|^{-2}\langle K^*f,\ K^*f\rangle \leq \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m f,\ \Lambda_m f\rangle d\mu(m) \leq B\langle f,\ f\rangle,\ \ \forall f \in U.$$

بنابراین خانواده $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک c-g-K-قاب برای U نسبت به خانواده $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$می باشد.

تعریف ۲,۳. [۲] فرض کنید که $K \in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ و $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک c-g-K-قاب برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$باشد. عملگر خطی S را به شرح زیر تعریف می کنیم:

$$S : U \longrightarrow U, \quad Sf = \int_{\mathcal{M}} \Lambda_m^*\Lambda_m f d\mu(m),\ \ \forall\ f \in U.$$

عملگر S را یک عملگر c-g-قاب $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ می نامیم.

این عملگر یک عملگر مثبت، کراندار و خود الحاق است. علاوه بر این، عملگرS در تساوی زیر صدق می کند:

$$\langle Sf,\ g\rangle = \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m^*\Lambda_m f,\ g\rangle d\mu(m),\ \ \forall f,\ g \in U.$$

نکته ۲,۴. به یاد می آوریم که، عملگر قاب از یک c-g-قاب برای U، یک عملگرمثبت،خود الحاق و معکوس پذیر روی U است و در حالت کلی ، مشابه K-قاب ها، عملگر c-g-قاب،S از یک c-g-K-قاب برای یک هیلبرت C^*-مدول U روی U معکوس پذیر نیست. اما اگر $K \in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ دارای برد بسته باشد،آنگاه عملگر c-g-قاب S بر $R(K)$ معکوس پذیر، خود الحاق و مثبت است.

لم ۲,۵. [۲] فرض کنید $\Theta = \{\Theta_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک پایه c-g-متعامد یکه برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$باشد. فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک خانواده ای از نگاشت های اندازه پذیر $m \mapsto \langle f,\ \Lambda_m f\rangle$ به ازای هر $f \in U$ باشد . آنگاه، $\Lambda = \{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک سیستم c-g-بسل برای U است اگر و فقط اگروجود داشته باشدیک عملگر کراندار واحد $R \in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ با $\Lambda_m = \Theta_m R^*,\ \forall m \in \mathcal{M}$.

قضیه ۲,۶. فرض کنید $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک سیستم c-g-بسل برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ و دارای کران c-g-بسلBباشد. آنگاه، برای همه $\bigoplus_{m\in\mathcal{M}} V_m$ ، نگاشت $f = \{f_m\}_{m\in\mathcal{M}} \in \bigoplus_{m\in\mathcal{M}} V_m$ را بوسیله $T : \bigoplus_{m\in\mathcal{M}} V_m \to U$

$$\langle Tf,\ g\rangle = \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m^* f_m,\ g\rangle d\mu(m),\ \ \forall g \in U,$$

تعریف می کنیم که یک عملگر خطی،کراندار$\|T\| \leq \sqrt{B}$می باشد. بعلاوه، T یک عملگر الحاق پذیر به ازای هر $g \in U$ که $S = TT^*$ بطوریکه $T^*g = \{\Lambda_m g\}_{m\in\mathcal{M}}$.

قضیه ۲,۷. فرض کنید که $K \in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ و$\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک سیستم c-g-بسل برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ باشد و با عملگر ترکیب T بطوریکه $\overline{Ran}(T^*)$ مکمل متعامد باشد آنگاه، $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک c-g-K-قاب برای U است اگر و فقط اگر $R(K) \subseteq R(T)$.

مزیت و برتری مطالعه c-g-K-قاب ها این است که با استفاده از خانواده ای از عملگرها که یک c-g-قاب نیستند،می توان یک c-g-K-قاب ساخت.

۳. دوگان $K-g-$ قاب‌های پیوسته

در این بخش، $K-g-$ بسل پیوسته دوگان (c-g-K-بسل دوگان) از یک $K-g-$ قاب پیوسته (c-g-K-قاب) در هیلبرت C^*- مدول ها را تعریف و در ادامه برخی از نتایج آن را مورد بررسی قرار می دهیم. ابتدا قضیه زیر را داریم که محرک و انگیزه تعریف است.

قضیه ۳,۱. فرض کنید $K \in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ و $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U, V_m)$ بطوریکه برای هر $f \in U$، نگاشت $m \mapsto \langle f, \Lambda_m f\rangle$ روی $\mathcal{M}$ اندازه پذیر است. عملگر $T^* : U \mapsto \bigoplus_{m\in\mathcal{M}} V_m$ که $T^*f = \{\Lambda_m f\}_{m\in\mathcal{M}}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\overline{Ran}(T^*)$ مکمل متعامد باشد. آنگاه گزاره های زیر معادل اند:

(الف) $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک c-g-K-قاب برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ است.

(ب) $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک سیستم g-c-بسل برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ است و یک سیستم g-c-بسل $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,V_m)$ برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ وجود دارد، بطوریکه

$$\langle Kf,\ g\rangle = \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m^*\Gamma_m f,\ g\rangle d\mu(m),\ \ \forall f,g\in U.$$

(ج) انتگرال $\int_{\mathcal{M}} \Lambda_m^* g_m d\mu(m)$ به ازای همه $\{g_m\}_{m\in\mathcal{M}} \in \bigoplus_{m\in\mathcal{M}}\{V_m\}$ در U همگرا است و $C > 0$ وجود دارد، بطوری که به ازای هر $f\in U$، وجود دارد $\{g_{m,f}\}_{m\in\mathcal{M}} \in \bigoplus_{m\in\mathcal{M}}\{V_m\}$ به طوری که

$$\langle Kf,\ g\rangle = \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m^*(g_{m,f}),\ g\rangle d\mu(m),\ \ \forall f,g\in U,$$
$$\int_{\mathcal{M}} \langle g_{m,f},\ g_{m,f}\rangle d\mu(m) \le C\langle f,\ f\rangle.$$

تعریف ۳,۲. فرض کنید $K\in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ و $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک g-K-c-قاب برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ باشد. یک سیستم g-c-بسل $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,V_m)$ را g-K-c-بسل دوگان از $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ گویند، هرگاه:

$$\langle Kf,\ g\rangle = \int_{\mathcal{M}} \langle \Lambda_m^*\Gamma_m f,\ g\rangle d\mu(m),\ \ \forall f,g\in U.$$

در این مورد، می گوییم که $(\Lambda_m,\ \Gamma_m)$ یک جفت،g-K-c-دوگان برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$است.

گزاره ۳,۳. فرض کنید $K\in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ و $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,V_m)$ یک g-K-c-قاب برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ و S نیز عملگر g-c-قاب آن باشد، آنگاه برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$،

$$(\Lambda_m S^{\alpha},\ \Lambda_m S^{-1-\alpha}K)$$

یک جفت g-K-c-دوگان برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ می باشد.

خانواده $\{\Lambda_m S^{-1}\}_{m\in\mathcal{M}}$ یکg-K-c-دوگان متعارف از $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ است.
نتیجه بعدی نشان می دهد که خاصیتی از دوگان سیستم های g-K-c-بسل تحت هم طولپایی حفظ می‌شود .

قضیه ۳,۴. فرض کنید $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ و $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ دو خانواده در $End^*_{\mathcal{A}}(U,V_m)$ باشند، بطوری که $(\Lambda_m,\ \Gamma_m)$ یک جفت g-K-c-دوگان برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ تشکیل دهند. اگر $\Theta\in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ یک هم طولپا با $K\Theta=\Theta K$ باشد، آنگاه $(\Lambda_m\Theta^*,\ \Gamma_m\Theta^*)$ یک جفت g-K-c-دوگان برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ می باشد.

قضیه ۳,۵. فرض کنید $K\in End^*_{\mathcal{A}}(U)$ و $\{\Theta_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک پایه g-c-متعامد یکه برای U نسبت به $\{V_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ باشد. فرض کنید که $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک g-K-c-قاب برای U و $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathcal{M}} \subset End^*_{\mathcal{A}}(U,\ V_m)$ یک سیستم g-c-بسل برای U به ترتیب با عملگرهای تجزیهT و R باشد، آنگاه $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ یک سیستم g-K-c-بسل دوگان از $\{\Lambda_m\}_{m\in\mathcal{M}}$ است، اگر و فقط اگر $K=TR^*$.

مراجع

[1] A. Alijani, M. A. Dehghan, *G-frames and their duals for Hilbert C*-modules*, Bull. Iran. Math. Society, **38**, (2012), 567-580.

[2] J. Baradaran, J. Cheshmavar, F. Nikahd, Z. Ghorbani, *Some properties of c-K-g-frames in Hilbert C*-modules*, Linear and MultiLinear Algebra, **71**, 8 (2023), 1323-1337.

[3] M. Frank, D. R. Larson, *Frames in Hilbert C*-modules and C*-algebras*, J. Oper. Theory, **48**, (2002), 273-314.

[4] A. Khosravi, B. Khosravi, *Fusion frames and g-frames in Hilbert C*-modules*, Int. J. Wavelets Multi. Inf. Process., **6**, (2008), 433-466.

[5] A. Najati, M. M. Saem, P. Găvruta, *Frames and operators in Hilbert C*-modules*, Operator and Matrices, **10**, (2016), 73-81.

پست الکترونیکی: j_cheshmavar@pnu.ac.ir
پست الکترونیکی: asadmath95@gmail.com