



پانزدهمین سمینار احتمال
و فرآیندهای تصادفی

۸ و ۹ شهریور ۱۴۰۴
دانشگاه کردستان



Seminar On Probability
and Stochastic Processes

August 30-31, 2025
University of Kurdistan



مفصل‌های دایره‌ای-خطی: ویژگی‌ها و کاربردها

نجیب‌الله کریمی^۱، علی دست‌برآورده^۲

^۱دانشجوی دکتری آمار، دانشگاه یزد

^۲عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه یزد

چکیده: در این مقاله به معرفی ویژگی‌ها و کاربردهای مفصل‌های دایره‌ای-خطی پرداخته شده است. برای تحلیل ساختار وابستگی داده‌های دایره‌ای و خطی در حالت‌های مختلف، چند مفصل دایره‌ای-خطی نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. علاوه بر این، از طریق شبیه‌سازی، پارامترهای مفصل‌ها برآورد شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که مفصل‌های با بخش‌های ویژه برای داده‌های حرکتی مناسب هستند.

واژه‌های کلیدی: داده‌های حرکتی، داده‌های دایره‌ای-خطی، مفصل با بخش‌های ویژه، مفصل دایره‌ای-خطی.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62F99, 62G30, 62H11.

۱ مقدمه

در بسیاری از حوزه‌های علمی مانند هواشناسی، زیست‌شناسی، علوم زمین و روان‌شناسی با داده‌هایی مواجه هستیم که ماهیتی زاویه‌ای دارند. این داده‌ها که به داده‌های دایره‌ای معروف هستند، بر روی محیط یک دایره واحد تعریف می‌شوند و ویژگی اصلی آن‌ها تناوب و برابری در انتها و ابتدای مقیاس اندازه‌گیری است. نمونه‌هایی از داده‌های دایره‌ای عبارت‌اند از: جهت باد، چرخه‌های زمان در طی شبانه‌روز، زاویه‌های فاز در پردازش سیگنال و جهت حرکت حیوانات. برای مثال، زوایای 0° درجه و 360° درجه در یک فضای دایره‌ای معادل هستند. به همین دلیل، روش‌های آماری متداول که بر پایه مفروضات داده‌های خطی بنا شده‌اند، برای تحلیل این نوع داده‌ها مناسب نیستند (ماریا و جاب، ۲۰۰۰).

در بسیاری از مطالعات، متغیر دایره‌ای با یک یا چند متغیر خطی همراه است. برای مثال، در بررسی رفتار حیوانات، ممکن است جهت حرکت (دایره‌ای) با سرعت حرکت (خطی) ترکیب شوند یا در تحلیل باد، سرعت و جهت به‌طور توأم بررسی شوند. به داده‌هایی که

از رفتار حیوانات یا وزیدن باد به‌دست می‌آیند، داده‌های حرکتی نیز می‌گویند. در رفتار حیوانات، داده‌های مربوط به جهت حرکت را معمولاً تحت عنوان زاویه‌های چرخش و داده‌های مربوط به سرعت حرکت را تحت عنوان طول‌های گام بررسی می‌کنند (هودل و فبرینگ، ۲۰۲۱).

در چنین مواردی، درک دقیق وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای و خطی برای تفسیر درست پدیده‌ها ضروری است. یکی از روش‌های منعطف و قدرتمند برای مدل‌سازی وابستگی بین متغیرها، استفاده از مفصل‌ها است. مفصل‌ها این امکان را فراهم می‌کنند که ساختار وابستگی میان متغیرها جدا از توزیع‌های حاشیه‌ای مدل‌سازی شود (نلسون، ۲۰۰۶). با این وجود، توسعه مفصل‌هایی که به‌طور خاص برای مدل‌سازی وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای و خطی طراحی شده باشند، نسبتاً جدید و در حال گسترش است. این مفصل‌ها، قادرند با حفظ ماهیت تناوبی متغیرهای دایره‌ای و خواص متغیر خطی، ساختار وابستگی را به دقت مدل کنند (دورنت و سمپی، ۲۰۱۵). از سوی دیگر، پژوهش‌هایی مانند نگار و همکاران (۲۰۲۳) با تمرکز بر کاربردهای عملی مدل‌سازی وابستگی دایره‌ای-خطی در داده‌های زیستی و پزشکی، مسیرهای جدیدی را در این داده‌ها گشوده‌اند.

این مقاله، علاوه بر مقدمه، سه بخش دیگر دارد. در بخش دوم به مفاهیم پایه مرتبط با متغیرهای دایره‌ای و مفصل‌های خطی پرداخته شده و محدودیت‌های این مفصل‌ها در مدل‌سازی وابستگی بین داده‌های دایره‌ای-خطی، بیان شده است. در بخش سوم، مفصل‌های دایره‌ای-خطی معرفی شده و ویژگی‌های آن‌ها تحلیل گردیده است. در بخش چهارم، با شبیه‌سازی از چند مفصل دایره‌ای-خطی، کاربردهای آن‌ها در مدل‌سازی وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای و خطی، بیان شده است. برای شبیه‌سازی از بسته cylcop در نرم‌افزار R استفاده کرده‌ایم.

۲ مفاهیم پایه

۱.۲ متغیرهای دایره‌ای

متغیرهای دایره‌ای به متغیرهای اطلاق می‌شوند که مقادیر آنها در فضای دایره‌ای تعریف شده و خاصیت تناوبی دارند. این متغیرها که معمولاً با $\theta \in [0, 2\pi)$ نمایش داده می‌شوند، در تحلیل‌های جهت‌دار و زاویه‌ای کاربرد فراوانی دارند. از جمله مهم‌ترین کاربردهای عملی می‌توان به جهت باد در هواشناسی، زوایای حرکت در ناوبری و زمان وقوع پدیده‌های تناوبی در زیست‌شناسی اشاره کرد. مدل‌سازی توزیع‌های احتمال متغیرهای دایره‌ای موسوم به آمار جهتی است. (ماریا و جاپ، ۲۰۰۰). تابع چگالی احتمال یک متغیر دایره‌ای، تابعی با دوره تناوب 2π است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$f_{\Theta}(\theta) = f_{\Theta}(\theta + 2\pi), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

تابع توزیع تجمعی متناظر نیز تابعی با دوره تناوب 2π است که در مقادیر $2k\pi$ دچار جهش می‌شود. مدل‌های توزیع خطی ممکن است برای متغیرهای دایره‌ای نامعتبر باشند. بنابراین، استفاده از مدل‌های توزیع خاص برای متغیرهای دایره‌ای ضروری است. به‌عنوان مثال می‌توان به توزیع فون‌میزس، توزیع کوشی پوشانده‌شده و توزیع نرمال پوشانده‌شده اشاره کرد. در اینجا فقط به توزیع فون‌میزس که به عنوان معادل دایره‌ای توزیع نرمال شناخته می‌شود، اشاره می‌کنیم. تابع چگالی این توزیع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\theta; \mu, k) = \frac{e^{k \cos(\theta - \mu)}}{2\pi I_0(k)}, \quad (2.2)$$

که در آن $\mu \in [0, 2\pi)$ پارامتر مکان (میانگین جهت)، $k \geq 0$ پارامتر تمرکز و $I_0(k)$ تابع بسل اصلاح‌شده از نوع اول و مرتبه صفر است (ابرامویتز و استیگون، ۱۹۶۵). این توزیع در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی با ماهیت تناوبی کاربرد گسترده‌ای دارد.

۲.۲ مفصل و ساختار وابستگی

نظریه مفصل بر پایه قضیه اسکالر (اسکلار، ۱۹۵۹) بنا شده است و روش منعطف‌تر و مناسب‌تر برای ساخت توزیع توأم چندمتغیره (که در اینجا ما دو متغیره آن را بررسی می‌کنیم) فراهم می‌آورد. قضیه اسکالر بیان می‌کند که تابع توزیع توأم چندمتغیره را می‌توان به صورت ترکیبی از یک تابع مفصل که ساختار وابستگی بین متغیرها را توصیف می‌کند و توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای برای تمام متغیرهای حاشیه‌ای نوشت. در مفصل‌ها، ساختار وابستگی میان متغیرها جدا از توزیع هر متغیر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، مدل مناسب برای توزیع حاشیه‌ای هر متغیر را می‌توان به طور مستقل و آزادانه انتخاب کرد. فرض کنید $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ و $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ به ترتیب تابع توزیع تجمعی توأم و تابع چگالی احتمال توأم برای متغیرهای تصادفی (X_1, X_2) باشند. در این صورت، برای هر $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ، با استفاده از یک تابع مفصل C داریم (وانگ و همکاران، ۲۰۲۱):

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(u_1, u_2), \quad (3.2)$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c(u_1, u_2) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2), \quad (4.2)$$

که در آن $u_i = F_{X_i}(x_i)$ ، $i = 1, 2$ ، مقدار تابع توزیع حاشیه‌ای X_i در نقطه x_i ، $f_{X_i}(x_i)$ مقدار تابع چگالی متناظر با آن و c تابع چگالی مفصل C هستند. تابع چگالی c به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}. \quad (5.2)$$

تعریف ۱.۲. مفصل تجربی: با استفاده از یک نمونه شامل n مشاهده‌ی دو بُعدی مستقل و هم‌توزیع به صورت (x_i, y_i) که از یک توزیع توأم استخراج شده‌اند، می‌توان مفصل تجربی را به صورت زیر محاسبه کرد (جینیست و فوری، ۲۰۰۷):

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\left(\frac{r_i}{n+1} \leq u, \frac{s_i}{n+1} \leq v\right), \quad (6.2)$$

که در آن $I(\cdot)$ تابع نشانگر، r_i و s_i به ترتیب رتبه مشاهدات x_i و y_i هستند. هنگامی که یکی از متغیرهای تصادفی ماهیت دایره‌ای داشته باشد، می‌توان همان رویه را دنبال کرد، اما برای تعیین رتبه‌های متغیر دایره‌ای، نیاز به تعریف یک مرجع خواهیم داشت. در این مقاله، مقدار مرجع را $-\pi$ در نظر می‌گیریم.

۳.۲ محدودیت‌های مفصل‌های کلاسیک برای داده‌های دایره‌ای-خطی

هنگامی که یکی از متغیرها دایره‌ای و دیگری خطی باشد، مفصل‌های کلاسیک با چالش‌های اساسی مواجه می‌شوند. مشکل اصلی ناشی از ناسازگاری ذاتی بین ساختار تناوبی متغیرهای دایره‌ای و مفروضات اساسی مفصل‌های کلاسیک است (جانسون و وهرلی، ۱۹۷۸). این ناسازگاری می‌تواند منجر به برآوردهای نادرست و تفسیرهای اشتباه از روابط بین متغیرها شود. علاوه بر این، پیچیدگی‌های محاسباتی ناشی از نیاز به تبدیل‌های خاص برای متغیرهای دایره‌ای، استفاده از روش‌های استاندارد را با دشواری مواجه می‌سازد. در مفصل‌های کلاسیک، فرض بر این است که داده‌ها از یک ترتیب ویژه پیروی می‌کنند، در حالی که داده‌های دایره‌ای دارای ماهیت تناوبی‌اند و آغاز و

پایان مشخص ندارند. همچنین، استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای نامناسب برای داده‌های دایره‌ای در چارچوب مفصل‌های کلاسیک می‌تواند به نتایج آماری گمراه‌کننده منجر شود. برای رفع این چالش‌ها، مفصل‌های سازگار با داده‌های دایره‌ای-خطی ضروری به نظر می‌رسد.

۳ مفصل دایره‌ای-خطی

۱.۳ معرفی و ویژگی‌ها

مفصل‌های دایره‌ای-خطی از دهه ۱۹۷۰ در ادبیات آماری مطرح بوده‌اند، از جمله در آثار **جانسون و وهرلی (۱۹۷۸، ۱۹۷۷)**؛ هرچند در آن زمان هنوز واژه «مفصل» به‌کار نمی‌رفت. از آن زمان تا کنون، این حوزه موضوع پژوهش‌های فعال بوده است. فرض کنید Θ یک متغیر تصادفی دایره‌ای پیوسته و X یک متغیر تصادفی خطی پیوسته باشند. در حالی که X روی کل خط حقیقی ($x \in \mathbb{R}$) و متغیر زاویه‌ای Θ روی دایره واحد ($\theta \in S$) تعریف می‌شوند، در اینجا ما آن را به‌صورت بازه‌ای از طول 2π ، یعنی $[a, a + 2\pi)$ در نظر می‌گیریم.

هر تابع چگالی احتمال دایره‌ای-خطی پیوسته روی زیرمجموعه‌ای از فضای استوانه‌ای ($S \times \mathbb{R}$) تعریف شده است. بنابراین، دامنه مفصل دایره‌ای-خطی نیز به جای مربع واحد $([0, 1]^2)$ ، سطح یک استوانه با ارتفاع واحد و محیط واحد خواهد بود و با این فرض، در ادامه u را به‌عنوان بعد دایره‌ای و v را به‌عنوان بُعد خطی در نظر می‌گیریم. برای اختصار، مفصل‌هایی که چگالی آن‌ها دارای ویژگی زیر باشند را «دوره‌ای^۱ در جهت u » یا به اختصار «دوره‌ای» می‌نامیم (ویژگی اصلی یک مفصل دایره‌ای-خطی):

$$c(u = 0, v) = c(u = 1, v), \forall v \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

بررسی رفتار حیوانات یکی از واضح‌ترین کاربردهای مفصل‌های دایره‌ای-خطی است. البته نتایج آن را می‌توان برای بسیاری از داده‌های دایره‌ای-خطی دیگر نیز تعمیم داد. در رفتار حیوانات، برای نمایش زاویه‌های چرخش معمولاً بازه $\Theta \in [-\pi, \pi)$ را در نظر می‌گیرند. در این بازه، زوایای منفی به چرخش به چپ و زوایای مثبت به چرخش به راست اشاره دارند. تکیه‌گاه متغیر تصادفی X (طول گام)، به اعداد حقیقی نامنفی محدود شده است. زاویه‌های چرخش تا حدودی با سایر متغیرهای دایره‌ای متفاوت‌اند، زیرا منطقی است فرض کنیم که یک حیوان تمایل ذاتی به چرخش به چپ یا راست ندارد. این فرض را می‌توان با استفاده از یک تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای که حول $\theta = 0$ متقارن است، به همراه مفصلی که نه تنها چگالی آن دوره‌ای است (به رابطه ۱.۳ توجه کنید)، بلکه در بُعد u نیز حول $u = 0.5$ متقارن است، محقق ساخت (**هودل و فبریگ، ۲۰۲۱**). منظور ما از مفصل متقارن در u یا به‌طور خلاصه مفصل متقارن، مفصلی با ویژگی زیر است:

$$c(u, v) = c(1 - u, v) \quad \forall u, v \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

هرچند انواع دیگر تقارن نیز برای مفصل‌ها قابل تعریف است، اما در اینجا به همین تقارن بسنده می‌کنیم. (به **نلسون ۲۰۰۶**) مراجعه شود). هر مفصل متقارن، الزاماً دوره‌ای نیز است.

^۱Periodic

۲.۳ چند مفصل دایره‌ای-خطی

در این بخش، چند مفصل دایره‌ای-خطی که ویژگی‌های مورد نیاز در رابطه (۱.۳) را دارند، معرفی می‌شوند. این مفصل‌ها برای مدل‌سازی وابستگی بین متغیرهای دایره‌ای و خطی طراحی شده‌اند.

• مفصل جانسون-وهرلی: مفصل جانسون-وهرلی به صورت زیر تعریف می‌شود (وانگ و همکاران، ۲۰۲۱):

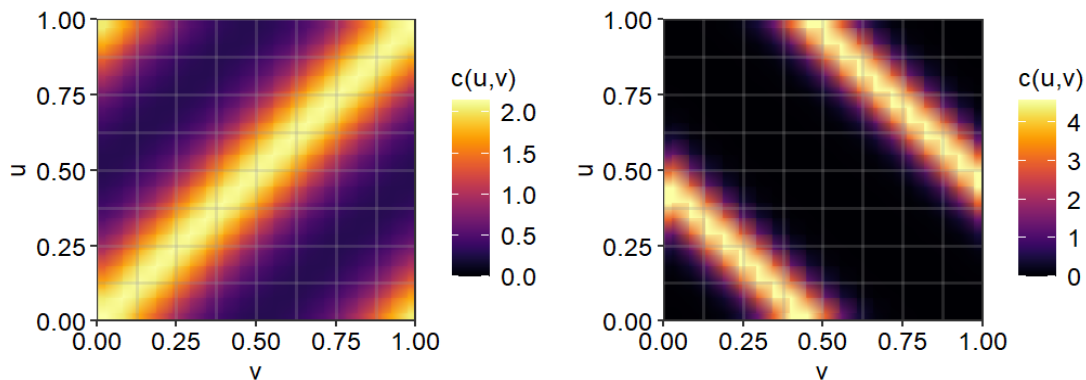
$$c(u, v) = \sqrt{2} \pi g(\eta), \quad \eta = \begin{cases} \sqrt{2} \pi(u - v), & u \geq v \\ \sqrt{2} \pi(u - v) + \sqrt{2} \pi, & u < v, \end{cases} \quad (۳.۳)$$

$$C(u, v) = \int_0^u dw_1 \int_0^v \sqrt{2} \pi g[\sqrt{2} \pi(w_1 - w_2)] dw_2 = \int_0^u [-G[\sqrt{2} \pi(w_1 - w_2)]]' dw_1, \quad (۴.۳)$$

که در آن یک متغیر دایره‌ای، $\eta \in [0, \sqrt{2} \pi]$ و $g(\cdot)$ تابع چگالی احتمال η و $G(\cdot)$ تابع توزیع متناظر با $g(\cdot)$ هستند. در رابطه (۳.۳)، اگر به جای $g(\cdot)$ توزیع فون میز را قرار دهیم، به مفصل به دست آمده مفصل فون میز استوانه‌ای می‌گویند. این مفصل به صورت زیر است:

$$C(u, v) = uv + \frac{1}{\sqrt{2} \pi^2 I_0(k)} \sum_{j=1}^{\infty} I_j(k) \left(\frac{\cos[\sqrt{2} \pi u - \sqrt{2} \pi v - \mu]}{j^2} + \frac{-\cos[j(-\sqrt{2} \pi v - \mu)] + \cos[-j\mu]}{j^2} \right), \quad (۵.۳)$$

که در آن $I_j(\cdot)$ تابع بسل اصلاح‌شده‌ی مرتبه j است (ابرامویتز و استیگون، ۱۹۶۵). پارامتر μ تابع چگالی احتمال را در جهت v جابجا می‌کند و k تمرکز را تعیین می‌نماید. تابع چگالی این مفصل در دو حالت مختلف ($\mu = \pi, k = 4$ و $\mu = 0, k = 1$) در شکل ۱ نشان داده شده است. شکل‌های سمت چپ و راست به ترتیب نشان می‌دهند که مفصل همبستگی مثبت دارد یا منفی. برای $k = 0$ مفصل استقلال را داریم و برای $k = \infty$ در شرط همبستگی مثبت به کران بالایی (M) و در شرط همبستگی منفی به کران پایینی (W) فرشه-هافدینگ میل می‌کند. در حالی که مفصل فون میز استوانه‌ای یک مفصل دایره‌ای-خطی و دارای ویژگی تناوبی است، اما متقارن نیست؛ موضوعی که کارایی آن را برای مدل‌سازی داده‌های حرکتی محدود می‌کند. در ادامه، مفصل‌هایی معرفی می‌شوند که چگالی‌های آن‌ها هم تناوبی و هم متقارن در بُعد u ($u = 0/5$) هستند.



شکل ۱: چگالی مفصل فون میز استوانه‌ای در دو حالت (چپ: $\mu = 0, k = 1$; راست: $\mu = \pi, k = 4$).

• مفصل چندجمله‌ای مرتبه دو: مفصل چندجمله‌ای مرتبه دو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c(u, v) = 1 + 2\pi\alpha \cos(2\pi u)(1 - 2v), \quad (6.3)$$

$$C(u, v) = uv + \alpha \sin(2\pi u)v(1 - v), \quad (7.3)$$

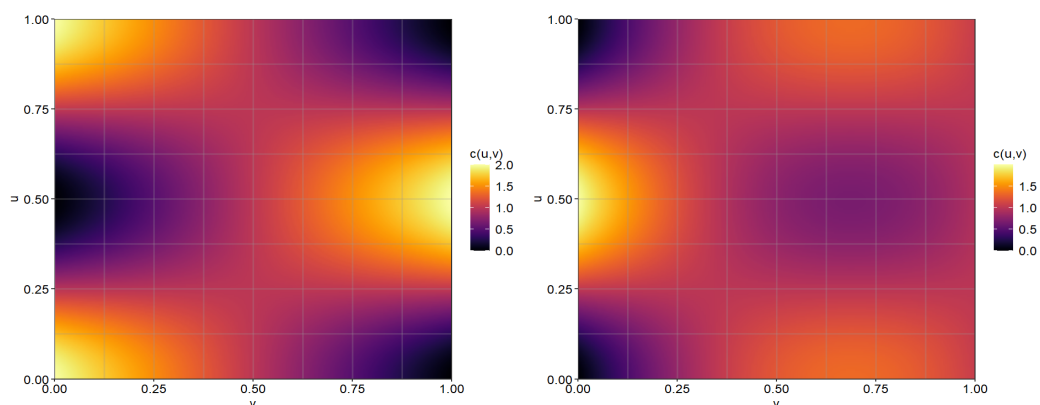
که در آن α پارامتر مفصل است و $|\alpha| \leq (2\pi)^{-1}$.

• مفصل چندجمله‌ای مرتبه سه^۲: به‌طور مشابه، مفصل چندجمله‌ای مرتبه سه به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$c(u, v) = 1 + 2\pi\alpha \cos(2\pi u)(1 - 2v + 2v^2) + 2\pi\beta \cos(2\pi u)(2v - 3v^2), \quad (8.3)$$

$$C(u, v) = v(1 - v)[\alpha \sin(2\pi u)(1 - v) - \beta \sin(2\pi u)v], \quad (9.3)$$

که در آن $|\alpha| \leq (2\pi)^{-1}$ و $|\beta| \leq (2\pi)^{-1}$. برای آسانی کار، از مفصل چندجمله‌ای مرتبه دو به‌عنوان مفصل مرتبه دو و از مفصل چندجمله‌ای مرتبه سه به‌عنوان مفصل مرتبه سه یاد می‌کنیم. آشکار است که مفصل‌های دایره‌ای-خطی مرتبه دو و مرتبه سه در بُعد خطی v ، در جهت دایره‌ای u متناوب و متقارن هستند. مفصل‌های مرتبه دو و مرتبه سه در مقاله [هودل و فیریگ \(۲۰۲۱\)](#) با جزئیات ارائه شده‌اند. همچنین، [هودل \(۲۰۲۲\)](#) بسته cylcop را در نرم‌افزار R برای مفصل‌های دایره‌ای-خطی با تقارن زاویه‌ای، ارائه کرد. توابع چگالی این دو مفصل در شکل ۲ رسم شده است. در این مفصل‌ها برای $\alpha = 0$ (و $\beta = 0$) مفصل استقلال به‌دست می‌آید، اما کران‌های فرشه-هافدینگ را به‌دست آورده نمی‌توانیم. برای $\alpha > 0$ (و $\beta < 0$)، مفصل همبستگی مثبت را بین u و v بیان می‌کند اگر $u \in [0, \pi/5]$ و همبستگی منفی را نشان می‌دهد اگر $u \in [\pi/5, \pi]$. برای حالت مقابل یعنی $\alpha < 0$ (و $\beta > 0$) نیز این جهت‌های همبستگی مشابه قبل هستند.



شکل ۲: چگالی‌های مفصل دایره‌ای-خطی با بخش‌های ویژه نسبت به v . چپ: چگالی مفصل دایره‌ای-خطی مرتبه دو ($\alpha = \frac{1}{2\pi}$)، راست: چگالی مفصل دایره‌ای-خطی مرتبه سه ($\alpha = -\frac{1}{2\pi}$, $\beta = 0$).

۳.۳ برآورد پارامترها

با در اختیار داشتن مجموعه‌ای شامل n مشاهده‌ی مستقل و هم‌توزیع ($i.i.d$) از یک جفت متغیر دایره‌ای و خطی (θ_i, x_i) ، یک خانواده مفصل مفروض $C(u, v; \alpha)$ و توزیع‌های حاشیه‌ای مفروض $F_\Theta(\theta; \beta)$ و $F_X(x; \gamma)$ ، به‌طور نظری می‌توانیم بردار پارامترهای (α, β, γ) را از طریق ماکسیمم‌سازی لگاریتم تابع درستنمایی توأم برآورد کنیم. با این حال، این رویکرد مستلزم بهینه‌سازی هم‌زمان تعداد زیادی از پارامترها است و مشخص‌سازی نادرست توزیع‌های حاشیه‌ای می‌تواند منجر به برآوردهای اریب برای پارامترهای مفصل شود و برعکس. اگر توزیع‌های حاشیه‌ای معلوم باشند، لگاریتم تابع درستنمایی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\ell(\alpha) = \sum_{i=1}^n \log [c(F_\Theta(\theta_i), F_X(x_i); \alpha)]. \quad (۱۰.۳)$$

این رویکرد به دو شیوه جایگزین برای برآورد پارامترهای مفصل منتهی می‌شود که در آنها برآوردهایی از F_Θ و F_X در رابطه (۱۰.۳) جای‌گذاری می‌شوند. این برآوردها، یعنی $\hat{F}_\Theta(\theta)$ و $\hat{F}_X(x)$ می‌توانند به‌صورت پارامتری با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی (MLE)^۴ و ناپارامتری به‌صورت شبه‌مشاهده، یعنی نمونه‌گیری از مفصل تجربی حاصل شوند (هودل و فبریگ، ۲۰۲۱). برآورد پارامترهای مفصل با استفاده از حاشیه‌های ناپارامتری برآورد شده، به‌عنوان برآورد ماکسیمم شبه‌درستنمایی (MPLE)^۵ شناخته می‌شود. برای بسیاری از مفصل‌های خطی-خطی، برآورد پارامترها را می‌توان به‌صورت تحلیلی از روی برآورد یک معیار وابستگی مانند ضریب اسپیرمن یا ضریب کندال به‌دست آورد؛ اما برای بیش‌تر مفصل‌های معرفی‌شده در این مقاله، راه‌حل تحلیلی در دسترس نیست و بنابراین نیاز به بهینه‌سازی عددی داریم.

برای سایر مفصل‌های دایره‌ای-خطی، می‌توان از جستجوی شبکه‌ای^۶ بهره‌گرفت تا پارامترهایی را یافت که اختلاف یک معیار وابستگی بین مفصل تجربی و مفصل پارامتری را مینم کند (هودل و فبریگ، ۲۰۲۱). در نهایت، انتخاب مدل را می‌توان بر پایه معیار اطلاع آکاییک (AIC)^۷ انجام داد؛ ولی در زمینه MPLE مورد مناقشه نیز بوده است؛ یعنی تعدادی از پژوهش‌گران باورمند هستند انتخاب مدلی که پارامترهای آن به روش MPLE برآورد شده‌اند، بر مبنای معیار اطلاع آکاییک درست نیست (گرونبریگ و هجورت، ۲۰۱۴).

۴.۳ معیارهای همبستگی

معیارهای پارامتری همبستگی دایره‌ای-خطی مستلزم آن هستند که متغیر خطی دارای توزیع نرمال باشد (جانسون و وهرلی، ۱۹۷۷؛ ماردیا، ۱۹۷۶) و بنابراین، به‌طور کلی برای تمام داده‌های دایره‌ای-خطی قابل استفاده نیستند. از این‌رو، هودل و فبریگ (۲۰۲۱) از یک برآورد ناپارامتری برای ضریب همبستگی دایره‌ای-خطی، با نماد D ، استفاده کردند که برای نخستین بار توسط ماردیا (۱۹۷۶) معرفی شد و در مطالعاتی چون سلو و همکاران (۱۹۸۸) و اخیراً توسط تاو (۲۰۱۵) به کار رفته است. این ضریب با رتبه‌بندی داده‌ها برآورد می‌شود و به‌صورت زیر است:

$$D = k \left(\left(\sum_i s_i \cos \frac{\sqrt{\pi} r_i}{n} \right)^2 + \left(\sum_i s_i \sin \frac{\sqrt{\pi} r_i}{n} \right)^2 \right), \quad (۱۱.۳)$$

^۴Maximum Likelihood Estimator

^۵Maximum Pseudo-likelihood Estimator

^۶Grid-Search

^۷Akaike Information Criterion

که در آن k یک ثابت نرمال‌سازی، r_i رتبه زاویه‌ای (دایره‌ای) مشاهده i (با نقطه مرجع $-\pi$) و s_i رتبه خطی همان مشاهده هستند. با این حال، ضریب D فقط می‌تواند مقادیری بین 0 و 1 را بگیرد و بنابراین نمی‌تواند همبستگی مثبت یا منفی را از هم تمایز دهد. همچنین، **لیگوی و همکاران (۲۰۱۹)** یک معیار همبستگی را بر مبنای اطلاعات متقابل معیار واگرایی کولبگ-لیبلر بین توزیع توأم و حاصل ضرب توزیع‌های حاشیه‌ای پیاده‌سازی کرده‌اند.

$$\begin{aligned} I(\Theta, X) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f_{\Theta, X}(\theta, x) \log \left(\frac{f_{\Theta, X}(\theta, x)}{f_{\Theta}(\theta) f_X(x)} \right) d\theta dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} c(F_{\Theta}(\theta), F_X(x)) f_{\Theta}(x) f_X(x) \log \left(c(F_{\Theta}(\theta), F_X(x)) \right) d\theta dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 c(u, v) \log(c(u, v)) du dv. \end{aligned} \quad (12.3)$$

برابری آخر با تغییر متغیر $u = F_{\Theta}(\theta)$ و $v = F_X(x)$ به دست آمده است. از این عبارت، بلافاصله مشخص می‌شود که اطلاعات متقابل برابر منفی آنروپی مرتبط با تابع چگالی مفصل $c(u, v)$ است (**ما و سون، ۲۰۱۱**). از آنجایی که محاسبه انتگرال در خط آخر رابطه (**۱۲.۳**) دشوار است، نمی‌توانیم پارامترهای خانواده مفصل انتخاب‌شده را به‌طور مستقیم تعیین کنیم. با این حال، نشان داده شده است که اطلاعات متقابل نسبت به پارامتر وابستگی در دامنه وسیعی از مفصل‌های دومتغیره، رفتار یکنواخت دارد (**تنزیر و ایلیدن، ۲۰۱۶**). بنابراین، انتظار می‌رود که چارچوب بهینه‌سازی تقریبی توضیح داده‌شده در بالا، در استفاده از اطلاعات متقابل به عنوان معیار وابستگی، به خوبی عمل کند.

می‌توان تخمینی از اطلاعات متقابل را با دسته‌بندی داده‌ها (مشاهدات متغیر تصادفی دایره‌ای و خطی) و گرفتن میانگین اطلاعات متقابل نقطه‌ای-که براساس فراوانی نقاط داده در هر دسته محاسبه می‌شود- بر روی تمام ترکیب‌های دسته‌ها به دست آورد. هم‌چنین توجه داشته باشید که اطلاعات متقابل داده‌ها برابر با اطلاعات متقابل مفصل تجربی است. در صورت نیاز، می‌توان اطلاعات متقابل را با استفاده از آنروپی H به بازه $[0, 1]$ طوری نرمال‌سازی کرد که مقدار صفر مفصل استقلال و مقدار یک مفصل بالایی فرشه-هافدینگ را معرفی کنند (**تنزیر و ایلیدن، ۲۰۱۶**):

$$I_{norm}(u, v) = \frac{I(u, v)}{\sqrt{H(u)H(v)}}. \quad (13.3)$$

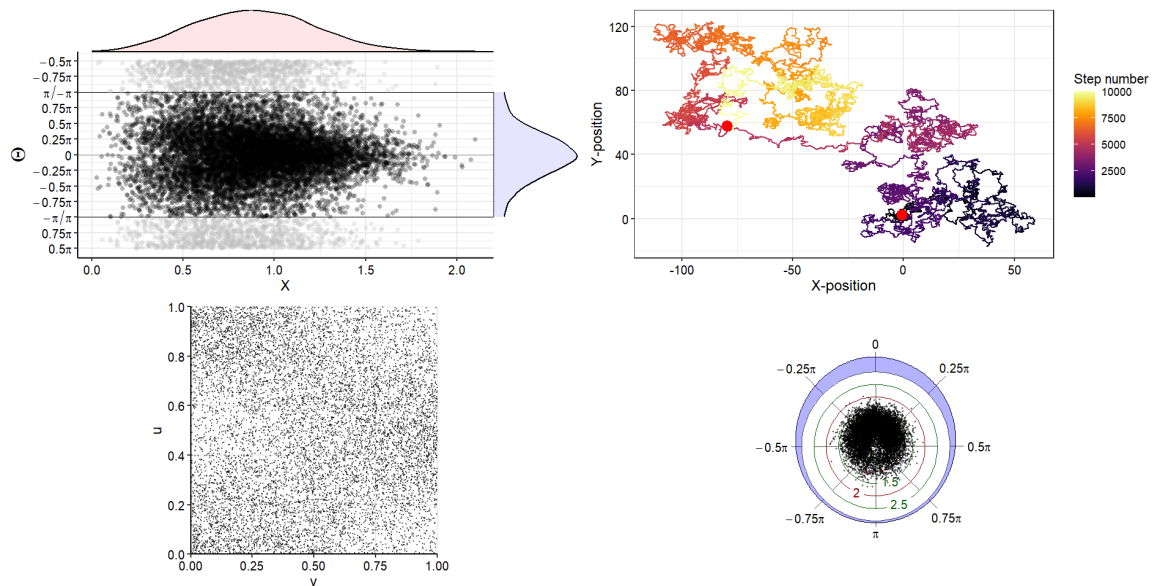
در نهایت، اگر بپذیریم که مفصل واقعی نسبت به متغیر u متقارن است، می‌توانیم مفصل تجربی را نیز متقارن‌سازی کنیم (به این صورت که مقادیر u بزرگ‌تر از 0.5 را با $1 - u$ جایگزین کنیم).

۴ کاربردها

همان‌طوری که قبلاً اشاره شد، مفصل دایره‌ای-خطی فون‌میزس متقارن نیست و استفاده‌ی آن برای داده‌های حرکتی مانند داده‌های باد یا حرکت حیوانات که معمولاً متقارن فرض می‌شوند، برآوردهای مناسب به دست نمی‌دهد. از سوی دیگر، مفصل‌های مرتبه دو و مرتبه سه این مشکل را برطرف می‌کنند. در این مقاله از مفصل مرتبه دو با $\alpha = 0.1$ ، تعداد 10000 داده تولید شده که توزیع حاشیه‌ای دایره‌ای (زاویه‌های چرخش) آن را توزیع فون‌میزس با پارامترهای $(\mu, k) = (0, 1)$ و توزیع حاشیه‌ای خطی (طول‌های گام) آن را توزیع وایبل با پارامترهای $(a, b) = (3, 3)$ تشکیل می‌دهند. چون مفصل‌های معرفی‌شده بیش‌تر به موضوعات حرکتی می‌پردازند، داده‌های تولیدشده از آن‌ها را داده‌های مسیر^۸ نیز می‌گویند. نمودارهای این داده‌ها در شکل ۳ آورده شده است. در این شکل، نمودار بالا (سمت چپ)، نمودار

^۸Trajectory Data

پراکنش زاویه‌های چرخش و طول‌های گام به‌ترتیب با برآوردهای چگالی ناپارامتری به رنگ‌های آبی و سرخ را نشان می‌دهد؛ نمودار بالا (سمت راست)، نمودار مسیر است که از دنباله زاویه‌های چرخش و طول‌های گام مشتق شده است؛ نمودار پایین (سمت چپ)، نمودار پراکنش مفصل به‌کاربرده شده را نشان می‌دهد و نمودار پایین (سمت راست)، نمودار پراکنش دایره‌ای زاویه‌های چرخش و طول‌های گام است.



شکل ۳: نمایش داده‌های دایره‌ای-خطی که با استفاده از مفصل مرتبه دو با حاشیه‌های فون میزس و وایبل شبیه‌سازی شده است.

ضریب همبستگی بین متغیرهای دایره‌ای و خطی در دو حالت بررسی شده و در جدول ۱ آمده است. همان‌طوری‌که در جدول دیده می‌شود، مقدار ضریب همبستگی رابطه (۱۱.۳) $D = 0.67$ و مقدار ضریب همبستگی اطلاعات متقابل $I_{norm}(u, v) = 0.18$ هستند. هردو معیار، همبستگی بین زاویه‌های چرخش و طول‌های گام را کم نشان می‌دهند.

در ادامه، از مفصل مرتبه سه با پارامترهای $(\alpha, \beta) = (0.3, -\frac{1}{\pi})$ و توزیع‌های حاشیه‌ای مفصل قبلی داده تولید کردیم. تعداد داده‌های تولیدشده را در اینجا نیز ۱۰۰۰۰ در نظر گرفتیم و از رسم نمودارهای آن خودداری کردیم. ضریب همبستگی رابطه (۱۱.۳) و اطلاعات متقابل به‌ترتیب به‌صورت $D = 0.61$ و $I_{norm}(u, v) = 0.19$ به‌دست آمدند. بر مبنای این مفصل نیز ضریب همبستگی‌ها کوچک هستند. در بخش بعدی، پارامترهای مفصل‌ها به‌روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و ماکسیمم شبه‌درست‌نمایی برآورد شده و در جدول ۱ آورده شده است. هردو روش برآوردهای نزدیک به پارامترهای اصلی را به‌دست می‌دهند. برای انتخاب مدل، از معیار آکاییک استفاده کردیم که در اینجا مفصل مرتبه سه بهتر عمل می‌کند؛ چون معیار آکاییک آن (۸۲۲-) کوچک‌تر از معیار آکاییک مفصل مرتبه دو (۶۸۴-) است.

جدول ۱: برآورد پارامترها، معیارهای آکاییک و ضرایب همبستگی برای مفصل‌های مرتبه دو و مرتبه سه

مفصل‌ها	MLE	MPLE	AIC	ضرایب همبستگی
مفصل مرتبه دو	$\alpha = 0/100$	$\alpha = 0/101$	-۶۸۴	$D = 0/67$
	...	...		$I_{norm}(u, v) = 0/18$
مفصل مرتبه سه	$\alpha = 0/32$	$\alpha = 0/31$	-۸۲۲	$D = 0/61$
	$\beta = -0/160$	$\beta = -0/159$		$I_{norm}(u, v) = 0/19$

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، ضمن معرفی داده‌های دایره‌ای و مفصل‌ها، مفصل‌های دایره‌ای-خطی و ویژگی‌های آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت و به چند مفصل مهم در این حوزه پرداخته شد. نتایج شبیه‌سازی نشان دادند که مفصل‌های با بخش‌های ویژه از جمله مفصل مرتبه دو و مفصل مرتبه سه، می‌توانند برازش‌های مناسبی برای داده‌های حرکتی ارائه دهند و ساختار وابستگی در این نوع داده‌ها را به‌طور مناسب مدل می‌کنند. داده‌های حرکتی شامل داده‌های دایره‌ای و خطی می‌شوند و ویژگی‌های تناوب و تقارن را هم‌زمان دارا می‌باشند. نظر به این ویژگی‌ها، هر مفصل دایره‌ای-خطی نمی‌تواند وابستگی بین آن‌ها را به‌درستی مدل کند.

قدردانی و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهادات داوران گرامی که موجب بهبود و ارائه بهتر آن شده‌اند، کمال سپاس و امتنان دارند.

مراجع

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1965), *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover.
- Durante, F. and Sempi, C. (2015), *Principles of Copula Theory*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC.
- Genest, C. and Favre, A. C. (2007), Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask, *Journal of Hydrologic Engineering*, **24**(4), 347–368.
- Gronneberg, S. and Hjort, N. L. (2014), The Copula Information Criteria, *Scandinavian Journal of Statistics*, **41**(2), 436–459.
- Hodel, F.H. and Fieberg, J. R. (2021), Cylcop: A Package for Circular-Linear Copulae with Angular Symmetry, *BioRxiv* (2021): 2021-07.
- Hodel, F. H. (2022), Package 'cylcop', URL: <https://cran.r-project.org/package=Cylcops>.

- Johnson, R. A and Wehrly, T. E. (1977), Measures and Models for Angular Correlation and Angular-Linear Correlation, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, **39**(2), 222–229.
- Johnson, R. A and Wehrly, T. E. (1978), Some Angular-Linear Distributions and Related Regression Models, *Journal of the American Statistical Association*, **73**(363), 602–606.
- Leguey, I., Larranaga, P., Bielza, C. and Kato, K. (2019), A Circular-Linear Dependence Measure under Johnson-Wehrly Distributions and its Application in Bayesian Networks, *Information Sciences*, **486**, 240–253.
- Ma, J. and Sun, Z. (2011), Mutual Information is Copula Entropy, *Tsinghua Science and Technology*, **16**(1), 51–54.
- Mardia, K. V. (1976), Linear-Circular Correlation Coefficient and Rhythmometry, *Biometrika*, 403–405.
- Mardia, K. V. and Jupp, P. E. (2000), *Directional Statistics*, Second Edition, New York, John Wiley and Sons, Ltd, Chichester.
- Nagar, P., Bekker, A., Arashi, M., Kat C. J. and Barnard, A. C. (2024), A Dependent Circular-Linear Model For Multivariate Biomechanical Data: ILIZARV RING FIXATOR STUDY, *Statistical Methods in Medical Research*, **33**(9), 1660-1672.
- Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Second Edition, New York, Springer.
- Sklar, M. (1959), Functions de repartition a n dimensions et leurs marges, *Annales de l'ISUP*, **8**(3), 229–231.
- Solow, A. R., Bullister, J. L. and Nevison, C. (1988), An Application of Circular-Linear Correlation Analysis to the Relationship between Freon Concentration and Wind Direction in Woods Hole, Massachusetts, *Environmental Monitoring and Assessment*, **10**(3), 219–228.
- Tenzer, Y. and Elidan, G. (2016), On the Monotonicity of the Copula Entropy, *arXiv preprint arXiv:1611.06714*.
- Tu, R. (2015), A Study of the Parametric and Nonparametric Linear-Circular Correlation Coefficient, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*, 1–24, URL: <http://digitalcommons.calpoly.edu/statsp/51/>.
- Wang, Z. W., Zhang, W. M., Zhang, Y. F. and Liu, Z. (2021), Circular-Linear-Linear Probabilistic Model Based on Vine Copulas: An Application to the Joint Distribution of Wind Direction, Wind Speed, and Air Temperature, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **215**, 104704.

Circular-Linear Copulas: Properties and Applications

Najibullah Karimi¹, Ali Dastbaravarde²

¹PhD Student of Statistics, Yazd University

²Department of Statistics, Faculty of Mathematics, Yazd University, 89195-741, Yazd, Iran

Abstract: This paper presents the properties and applications of circular-linear copulas. To analyze the dependence structure of circular and linear data, various forms of circular-linear copulas are examined. Furthermore, through simulation, copula parameters are estimated. The results indicate that the copulas with specific sections are suitable for modeling movement data.

Keywords: Movement Data, Circular-Linear Data, Copula with Special Sections, Circular-Linear Copula.

Mathematics Subject Classification (2020): 62H11, 62G30, 62F99.
