



پانزدهمین سمینار احتمال
و فرآیندهای تصادفی

۸ و ۹ شهریور ۱۴۰۴
دانشگاه کردستان



Seminar On Probability
and Stochastic Processes

August 30- 31, 2025
University of Kurdistan



مروری بر استفاده از خانواده توزیع‌های فاز-نوع در مدل شوک‌های تعمیم یافته

سیروس فتحی منش^۱، محی‌الدین ایزدی^۲

^۱ گروه آمار- دانشگاه کردستان

^۲ گروه آمار- دانشگاه رازی

چکیده: استفاده از خانواده توزیع‌های فاز-نوع که بر اساس فرایندهای مارکف زمان گسسته و پیوسته تعریف می‌شوند در مدل‌بندی متغیرهای تصادفی نامنفی گسسته و پیوسته رو به گسترش است. در دهه اخیر، استفاده از این خانواده توزیع‌ها در برخی مدل‌های شوک مورد توجه پژوهشگران زمینه قابلیت اعتماد قرار گرفته است. در این مقاله هدف ما مروری بر نحوه استفاده از خانواده توزیع‌های فاز-نوع در سه مدل شوک کرانگین تعمیم‌یافته، تجمعی تعمیم‌یافته و دلتای تعمیم یافته است. استفاده از این خانواده از توزیع‌ها در مدل شوک‌های ذکرشده توجیه می‌شود و سپس توزیع تعداد شوک‌ها و طول عمر سیستم بر اساس روابط ماتریسی موجود در خانواده توزیع‌های فاز-نوعی بیان می‌شوند.

کلمات کلیدی: خانواده توزیع‌های فاز-نوع، فرایندهای مارکف، مدل شوک تجمعی تعمیم یافته، مدل شوک دلتای تعمیم یافته، مدل شوک کرانگین تعمیم یافته.

۱ مقدمه

در مدل‌های آماری استفاده از خانواده توزیع‌های منعطف که با تغییر پارامتر، دامنه وسیعی از توزیع‌ها را شامل شود بسیار حائز اهمیت است، زیرا اشتباه در انتخاب توزیع برای برازش به یک مجموعه داده متناسب با وسعت دامنه آن خانواده، کاهش می‌یابد. خانواده توزیع‌های فاز-نوعی^۱ یک خانواده گسترده از توزیع‌های آماری است که برای هر دو حالت گسسته و پیوسته قابل تعریف می‌باشند. این خانواده به‌طور گسترده‌ای در مدل‌بندی متغیرهای تصادفی نامنفی در زمینه‌های مختلفی مانند قابلیت اعتماد، نظریه صف، ریسک‌های بیمه‌ای و مالی، زیست‌شناسی و سایر علوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. ایده اولیه این توزیع در **ارلنگ** (۱۹۰۹) مطرح گردید و سپس

^۱ سخنران، s.fathimanesh@uok.ac.ir

^۱ phase-type distribution

نیوتس^۲ در سال ۱۹۷۵ آن را در یک چارچوب ریاضی مدون بسط داد و به عنوان یک خانواده از توزیع‌ها معرفی نمود (نیوتس^۲، ۱۹۷۵).

خاصیت بسته بودن این خانواده از توزیع‌ها نسبت به مجموع متناهی، توزیع‌های آمیخته و سیستم‌های منسجم قابلیت اعتمادی در اسف و لویکسون (۱۹۸۲) مورد بررسی قرار گرفت. در دهه ۹۰ میلادی و بعد از آن، پژوهشگران مختلفی به تطبیق این توزیع‌ها بر پدیده‌های تصادفی مختلف و همچنین به کنکاش بیشتری از خواص این خانواده پرداختند. در سینی (۱۹۹۰) ویژگی‌ها و نحوه مشخص‌سازی این توزیع‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین، نحوه محاسبه برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای این خانواده از توزیع‌ها در بابیو و کومنی (۱۹۹۲) شرح داده شد. در آلن (۱۹۹۵) و فدی (۱۹۹۵) از توزیع‌های فاز-نوع به ترتیب برای مدل‌بندی داده‌های تحلیل بقا و قابلیت اعتماد استفاده شد. در لی (۲۰۰۳) و کای و لی (۲۰۰۵) به کاربرد حالت چند متغیره این توزیع‌ها در مدل‌های شوک و نظریه ریسک پرداخته شد. همچنین، بلاد (۲۰۰۵) یک مقاله مروری در زمینه مدل‌بندی ریسک با استفاده از توزیع‌های فاز-نوع نوشت. از جمله مقالات پیشرو در زمینه کاربرد این توزیع‌ها در مدل‌های شوک می‌توان به منتورو و همکاران (۲۰۰۹) و سگویا و لابیو (۲۰۱۳) اشاره نمود. در چند سال اخیر نیز موجی جدید از توجه به توزیع‌های فاز-نوع در انواع مدل شوک ایجاد شده است. از جمله این مقالات می‌توان به ایرلماز (۲۰۱۷)، ژائو و همکاران (۲۰۱۸)، ازکوت و ایرلماز (۲۰۱۹)، وانگ و همکاران (۲۰۲۲)، ایرلماز و اتلو (۲۰۲۳)، اوزکوت و همکاران (۲۰۲۴)، دانگ و همکاران (۲۰۲۵) و منش و همکاران (۲۰۲۵) اشاره نمود.

در این مقاله، هدف ما مروری بر استفاده از خانواده توزیع‌های فاز-نوع در چند مدل شوک جدید و مختلف معرفی شده در چند سال اخیر است. برای این منظور به‌طور ویژه، سه مدل شوک: کرانگین تعمیم یافته^۳، دلتای تعمیم یافته^۴ و تجمعی تعمیم یافته^۵ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ویژگی‌های توزیعی و قابلیت اعتمادی طول عمر سیستم‌های تحت این گونه شوک‌ها را بر مبنای توزیع‌های فاز-نوع بیان می‌کنیم. در ادامه این مقاله نخست، به معرفی اجمالی خانواده توزیع‌های فاز-نوع گسسته و پیوسته می‌پردازیم. سپس مدل شوک‌های پایه‌ای را بصورت مختصر توضیح داده و در نهایت نحوه استفاده از خانواده توزیع‌های فاز-نوع را برای مدل شوک‌های بیان شده در بالا را شرح می‌دهیم.

۲ توزیع‌های فاز-نوع

توزیع‌های فاز-نوع به هر دو صورت گسسته و پیوسته و بر مبنای فرآیندهای مارکف گسسته و پیوسته قابل تعریف هستند. در این بخش نخست، حالت گسسته و سپس حالت پیوسته را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرایند مارکف زمان-گسسته $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ با فضای حالت $L = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$ ، که در آن m حالت اول گذرا و حالت $(m+1)$ م جاذب است، ماتریس احتمال انتقال

$$P = \begin{pmatrix} T & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن T یک زیر ماتریس $m \times m$ مربوط به احتمال انتقال حالت‌های گذرا است و توزیع اولیه $\pi_0 = (\alpha', \alpha_{m+1})'$ را در نظر

²Neuts

³generalized extreme shock model

⁴generalized δ shock model

⁵generalized cumulative shock model

بگیرید. اگر متغیر تصادفی X را زمان تا جذب فرایند تعریف کنیم در اینصورت X دارای توزیع فاز-نوع گسسته با پارامترهای α و $\mathbf{T}$ است و آن را با نماد $X \sim PH_d(\alpha, \mathbf{T})$ نشان می‌دهیم.

برای این توزیع می‌توان روابط زیر را بدست آورد.

• تابع جرم احتمال:

$$p_X(k) = \alpha' \mathbf{T}^{k-1} \mathbf{t}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

• تابع توزیع تجمعی:

$$F_X(k) = 1 - \alpha' \mathbf{T}^k \mathbf{1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

• تابع مولد احتمال:

$$H_X(z) = E(z^X) = \alpha_{m+1} + z \alpha' (\mathbf{I} - z \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t},$$

•

$$\frac{d^k H(z)}{dz^k} \Big|_{z=1} = E(X(X-1) \dots (X-(k-1))) = k! \alpha' (\mathbf{I} - z \mathbf{T})^{-k} \mathbf{T}^k \mathbf{1}.$$

تعریف ۲.۲. فرایند مارکف زمان-پیوسته $\{X_t, t \geq 0\}$ با فضای حالت $L = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$ که در آن m حالت اول گذرا و حالت $m+1$ مام جاذب است، ماتریس پارامترهای بینهایت کوچک^۶

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{m \times m} & \mathbf{t}_{m \times 1} \\ \mathbf{o}_{1 \times m} & \mathbf{o} \end{pmatrix}$$

که در آن $\mathbf{T}_{m \times m}$ یک زیر ماتریس $m \times m$ مربوط به پارامترهای بی‌نهایت کوچک حالت‌های گذرا است و توزیع اولیه $\pi_0 = (\alpha', \alpha_{m+1})'$ را در نظر بگیرید. اگر متغیر تصادفی پیوسته X را زمان تا جذب فرایند تعریف کنیم در اینصورت X دارای توزیع فاز-نوع پیوسته با پارامترهای α و $\mathbf{T}$ است و آن را با نماد $X \sim PH_c(\alpha, \mathbf{T})$ نشان می‌دهیم.

برای حالت پیوسته نیز می‌توان روابط زیر را بدست آورد.

• تابع چگالی احتمال:

$$f_X(x) = \alpha' \exp(\mathbf{T}x) \mathbf{t}, \quad x \geq 0$$

که در آن

$$\exp(\mathbf{T}x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{T}x)^i}{i!}$$

به ماتریس نمایی معروف است و $\mathbf{T}^0 = \mathbf{I}$ تعریف می‌شود.

• تابع توزیع تجمعی:

$$F_X(x) = 1 - \alpha' \exp(\mathbf{T}x) \mathbf{1}, \quad x \geq 0$$

که در آن $\mathbf{1}' = (1, \dots, 1)$.

⁶Infinitesimal

• تابع تبدیل لاپلاس:

$$L_X(s) = E(\exp(-sX)) = \alpha_{m+1} + \alpha'(s\mathbf{I} - z\mathbf{T})^{-1}\mathbf{t},$$

این خانواده از توزیع‌ها دارای ویژگی‌های بستاری جالبی در هر دو حالت گسسته و پیوسته می‌باشند که در پایین به بیان مختصری از آنها می‌پردازیم.

• نسبت به ترکیبات خطی بسته است. به بیان دیگر اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل که همگی عضو خانواده توزیع‌های

فاز-نوع گسسته (پیوسته) باشند، آنگاه برای مقادیر ثابت و نامنفی $a_1, \dots, a_n$

$\sum_{i=1}^n a_i X_i$ نیز دارای توزیع فاز-نوع گسسته (پیوسته) است.

• نسبت به آمیختگی متناهی بسته است. به بیان دیگر اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل که همگی عضو خانواده

توزیع‌های فاز-نوع گسسته (پیوسته) باشند، آنگاه برای متغیرهای تصادفی $I_i \sim \text{Ber}(p_i)$ با شرط $\sum_{i=1}^n I_i = 1$ نتیجه

می‌شود که توزیع آمیخته متناهی آنها یعنی $\sum_{i=1}^n I_i X_i$ نیز دارای توزیع‌های فاز-نوع گسسته (پیوسته) است.

• نسبت به مجموع تصادفی بسته است. به بیان دیگر اگر $X_1, \dots, X_n, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع

$(i.i.d)$ فاز-نوع پیوسته باشند و N دارای توزیع فاز-نوع گسسته باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^N X_i$ دارای توزیع فاز-نوع پیوسته

است.

• نسبت به آماره‌های مرتب بسته است. به بیان دیگر اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل که همگی عضو خانواده

توزیع‌های فاز-نوع گسسته (پیوسته) باشند، آنگاه آماره‌های مرتب متناظر با آنها، یعنی $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ نیز دارای توزیع

فاز-نوع گسسته (پیوسته) می‌باشند.

• خانواده توزیع‌های فاز-نوع در بین خانواده توزیع‌های نامنفی چگال است یعنی برای هر متغیر تصادفی نامنفی دلخواه می‌توان

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی عضو خانواده توزیع‌های فاز-نوع را به گونه‌ای یافت که به متغیر تصادفی مورد نظر در توزیع همگرا

باشد.

• ممکن است برای یک متغیر تصادفی عضو خانواده توزیع‌های فاز-نوعی بیش از یک نمایش از لحاظ شیوه تعریف پارامترها وجود

داشته باشد و لزوماً یکتا نمی‌باشند اما در هر صورت بدیهی است که ویژگی‌های توزیعی در نهایت یکسان خواهند بود.

برای توضیحات بیشتر در مورد این خانواده از توزیع‌ها و اثبات روابط بالا می‌توان به [بلاد و نیلسون \(۲۰۱۷\)](#) و [هی \(۲۰۱۴\)](#) مراجعه

نمود.

۳ مدل‌های شوک

یکی از مدل‌های رایج در قابلیت اعتماد در مدل‌بندی طول عمر سیستم‌ها یا قطعاتی با عامل خرابی خارجی (خارج از سیستم) مدل‌های

شوکی می‌باشند. در این مدل‌ها، خرابی سیستم بر اساس الگوی معینی از نحوه وارد شدن شوک‌ها از لحاظ شدت و فاصله زمانی بین

⁷independent and identical distribution

شوکه‌ها تعریف می‌شود. شوک‌های خارجی، بسته به سیستم مورد مطالعه، می‌توانند نوسانات الکتریکی و دمایی، ضربات و تکانه‌ها، خرابی بخشی از سیستم و غیره باشد. همچنین، این شوک‌ها در مسائل مالی و بیمه نیز بصورت اتفاقات نامطلوب قابل تعبیر است. به عنوان مثال، در یک مدل ریسک، هر ادعای خسارت می‌تواند به عنوان یک شوک تلقی گردد. در قابلیت اعتماد، انواع مختلفی از مدل‌های شوک تعریف شده‌اند و از آنها جهت مدل‌بندی طول عمر سیستم‌های تصادفی مختلف به منظور مطالعه شاخص‌های قابلیت اعتمادی و یا سیاست نگهداری بهینه استفاده شده است.

فرض کنید یک سیستم از لحظه صفر شروع به کار می‌کند و شوک‌ها نیز طبق یک فرایند تصادفی معین، به این سیستم وارد می‌شوند. فاصله زمانی بین شوک $(i-1)$ ام و i ام را با X_i ، شدت شوک i ام را با Y_i ، تعداد شوک‌های وارد شده به سیستم تا لحظه خرابی را با N ، مقدار ثابت و معین حد آستانه را با d و طول عمر سیستم را با $T = \sum_{i=1}^N X_i$ نشان می‌دهیم. مدل‌های شوک مختلفی بر اساس نحوه تعریف N قابل تعریف هستند که از بین آنها سه مدل شوک زیر پایه‌ای و بنیادی هستند که بقیه مدل شوک‌ها نیز بصورت تعمیمی از این مدل شوک‌ها تعریف می‌شوند.

• **مدل شوک کرانگین:** در این مدل تا زمانیکه شدت شوک‌های وارده از یک حد آستانه مانند d بیشتر نشود سیستم فعال است و در نتیجه $N = \min\{n, Y_n > d\}$ (گات و سلر، ۱۹۹۹).

• **مدل شوک تجمعی:** در این مدل تا زمانیکه مجموع شدت شوک‌های وارده از یک حد آستانه مانند d بیشتر نشود سیستم فعال است و در نتیجه $N = \min\{n, Y_1 + \dots, Y_n > d\}$ (گات، ۱۹۹۰).

• **مدل شوک دلتا:** در این مدل، بدون توجه به میزان شدت شوک‌ها، اگر فاصله زمانی بین دو شوک پیاپی از حد آستانه δ کمتر باشد سیستم فعال است و در نتیجه $N = \min\{n, X_1 > \delta, \dots, X_{n-1} > \delta, X_n \leq \delta\}$ (لی و ژائو، ۲۰۰۷).

نویسندگان بسیاری تعمیم‌هایی از مدل‌های بالا و همچنین مدل‌های شوک آمیخته را که ترکیبی از دو یا چند مدل شوک‌های قبلی هستند را ارائه کرده‌اند. برای توضیحات بیشتر به عنوان نمونه می‌توان به گات (۲۰۰۱) و مالور و همکاران (۲۰۰۶) مراجعه کرد.

۴ مدل‌های شوک بر اساس خانواده توزیع‌های فاز-نوع

با توجه به نحوه تعریف N در بسیاری از موارد و تحت شرایط نه‌چندان محدود کننده، می‌توان از توزیع‌های فاز-نوع گسسته برای مدل‌بندی N و همچنین توزیع‌های فاز-نوع پیوسته برای مدل‌بندی T استفاده نمود. در این بخش، نحوه استفاده از توزیع‌های فازنوع را برای چند مدل شوک تعمیم یافته مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۴ مدل شوک کرانگین تعمیم یافته

این مدل شوک بوسیله بوزبولت و ایرلاماز (۲۰۲۰) و برخی خواص آن نیز بوسیله منش و همکاران (۲۰۲۳) مورد بررسی قرار گرفت. در این مدل مانند مدل شوک کرانگین معمولی، اگر شوک وارد شده به سیستم از حد آستانه d عبور کند سیستم از کار می‌افتد با این تفاوت که در حالت تعمیم یافته به جای یک منبع شوک، m منبع شوک مستقل وجود دارند. اگر $Y_{i,k}$ برای $k = 1, \dots, m$ نشان‌دهنده میزان شدت i امین شوک وارد به سیستم از منبع شوک k ام باشد و d_k حد آستانه آن باشد در اینصورت $P_k = P(Y_i^k > d_k)$ احتمال خرابی

سیستم توسط این شوک است. همچنین احتمال وارد شدن شوک از طریق منبع k ام برابر π_k است. تحت این مفروضات و نمادگذاری‌ها، دو نوع مدل کرانگین تعمیم یافته در بوزبولت و ایرلماز (۲۰۲۰) تعریف شده است

- مدل ۱: در این مدل، در طول فعال بودن سیستم، شوک‌ها می‌توانند از منابع مختلف به سیستم وارد شوند.
- مدل ۲: در این مدل، اولین شوک از هر منبعی وارد شود در ادامه بقیه شوک‌ها نیز تا زمان از کار افتادن سیستم فقط از آن منبع وارد می‌شوند.

فرض کنید تعداد شوک‌های وارد شده به سیستم تا زمان خرابی مطابق این دو مدل به ترتیب N_1 و N_2 و طول عمر سیستم تحت این دو مدل به ترتیب $T_1 = \sum_{i=1}^{N_1} X_i$ و $T_2 = \sum_{i=1}^{N_2} X_i$ باشند. در اینصورت در مدل ۱، N_1 زمان جذب یک فرآیند مارکف گسسته با فضای وضعیت $L = \{0, 1\}$ است که در آن ۱ فعال بودن سیستم (وضعیت گذرا) و ۰ از کار افتادن سیستم (وضعیت جاذب) را نشان می‌دهد. بنابراین،

$$N_1 \sim Ph_d(1, 1 - \sum_{i=1}^m p_i \pi_i) \sim Geo(1 - \sum_{i=1}^m p_i \pi_i).$$

در مدل ۲، N_2 زمان جذب یک فرآیند مارکف گسسته با فضای وضعیت $L = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$ است. وضعیت i نشان دهنده این است که شوک وارد شده از منبع i باعث از کار افتادن سیستم نشده است و وضعیت $m+1$ از کار افتادن سیستم را نشان می‌دهد. در این حالت، توزیع اولیه فرایند $\mathbf{a} = (\pi_1, \dots, \pi_m)'$ و زیر ماتریس احتمال انتقال حالت‌های گذرا به ترتیب بصورت

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - p_m \end{pmatrix}$$

می‌باشند. در نتیجه $N_2 \sim PH_d(\mathbf{a}, \mathbf{Q})$. اگر X_i ها را نیز متغیرهای تصادفی $(i.i.d)$

از توزیع $PH_c(\alpha, \mathbf{A})$ باشند آنگاه T_1 و T_2 نیز عضو خانواده توزیع‌های فازنوع بصورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} T_1 &\sim PH_c(\alpha, \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + (-\mathbf{A}'\alpha) \otimes (1 - \sum_{i=1}^n \pi_i p_i)) \\ T_2 &\sim PH_c(\alpha \otimes \mathbf{a}, \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + (-\mathbf{A}'\alpha) \otimes \mathbf{Q}). \end{aligned}$$

در این روابط، نماد $\otimes$ نشان دهنده ضرب کرونگر^۸ بین دو ماتریس است. برای توضیحات بیشتر در مورد این نوع ضرب ماتریسی می‌توان به گراهام (۲۰۱۸) مراجعه کرد. حال، با توجه به روابط موجود در توزیع‌های فاز-نوعی می‌توان ویژگی‌های قابلیت اعتمادی مختلف مانند تابع قابلیت اعتماد، تابع نرخ خطر و میانگین طول عمر باقی مانده را برای T_1 و T_2 و بصورت روابط ماتریسی یافت.

۲.۴ مدل شوک تجمعی تعمیم یافته

در مدل شوک تجمعی تعمیم یافته همانند مدل شوک تجمعی، اگر مجموع شوک‌های وارد شده به سیستم از یک حد آستانه عبور کند سیستم از کار می‌افتد اما با این تفاوت که در حالت تعمیم یافته به جای یک منبع شوک، m منبع شوک مستقل وجود دارد که هر شوک

^۸kronecker product

با احتمال π_i از منبع i ام صادر می‌شود (گانگ و همکاران، ۲۰۲۰). اگر برای $i = 1, \dots, m$ شدت شوک وارد شده از منبع i ام را $Y^{(i)}$ نشان دهیم و شوک وارد شده به سیستم را با Z نشان دهیم در اینصورت

$$P(Z > t) = \sum_{i=1}^m \pi_i P(Y^{(i)} > t).$$

در این مدل

$$N = \min\{n, Z_1 + \dots + Z_n > d\}, \quad T = \sum_{i=1}^N X_i.$$

حال اگر فرض کنیم $Y^{(i)} \sim PH_c(\alpha_i, \mathbf{A}_i)$ در اینصورت از بسته بودن خانواده توزیع‌های فازنوعی نسبت به توزیع‌های آمیخته نتیجه می‌شود که

$$Z = \sum_{i=1}^m I_i Y^{(i)} \sim PH_c(\alpha, \mathbf{A}), \quad \alpha = (\pi_1 \alpha_1, \dots, \pi_m \alpha_m), \quad \mathbf{A} = \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m\}.$$

همچنین با توجه به بسته بودن این خانواده نسبت به مجموع، داریم

$$\sum_{i=1}^n Z_i \sim PH_c(\gamma, \Gamma)$$

که در آن

$$\gamma = (\alpha', c\alpha', \dots, c^{n-1}\alpha')', \quad c = 1 - \alpha'1 \quad \mathbf{A}^\circ = -\mathbf{A}1,$$

و

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}^\circ \alpha' & \dots & c^{n-2} \mathbf{A}^\circ \alpha' \\ \circ & \mathbf{A} & \dots & c^{n-3} \mathbf{A}^\circ \alpha' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

اکنون، با داشتن توزیع $\sum_{i=1}^n Z_i$ می‌توانیم توزیع N را از رابطه زیر بیابیم.

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P\left(\sum_{i=1}^n Z_i > d, \sum_{i=1}^{n-1} Z_i \leq d\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n Z_i > d\right) - P\left(\sum_{i=1}^{n-1} Z_i > d\right). \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن فرض استقلال فاصله زمانی بین شوک‌ها و شدت آنها، تابع قابلیت اعتماد سیستم نیز بصورت یک توزیع آمیخته به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$P(T > t) = P\left(\sum_{i=1}^N X_i > t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n X_i > t\right) p(N = n).$$

علاوه براین، اگر فرض کنیم فاصله زمانی بین ورود شوک‌ها iid از توزیع فاز-نوعی هستند آنگاه $\sum_{i=1}^n X_i$ نیز عضو این خانواده باقی می‌مانند و توزیع T قابل بیان بصورت آمیخته‌ای از توزیع‌های فاز-نوعی هستند.

۳.۴ مدل شوک دلتای تعمیم یافته

مدل شوک دلتای تعمیم یافته بوسیله **ایرلماز و انلو (۲۰۲۳)** و به عنوان تعمیمی از مدل شوک دلتا ارائه گردید. بر اساس این مدل، سیستم در لحظه صفر فعال است و فاصله بین زمان‌های ورود شوک متغیرهای تصادفی *iid* می‌باشند. این سیستم تا زمانی که m شوک پیاپی در یک فاصله زمانی کمتر از δ به سیستم وارد نشود، سیستم فعال است. اگر تعداد شوک‌های وارد شده به این سیستم تا لحظه خرابی را با $N_{\delta,m}$ نشان دهیم در اینصورت برای $n \geq m$ داریم

$$\{N_{\delta,m} = n\} = \{X_1 + \dots + X_m \geq \delta, X_1 + \dots + X_{m+1} \geq \delta, \dots, X_{n-m} + \dots + X_{n-1} \geq \delta, X_{n-m+1} + \dots + X_n < \delta\}$$

و طول عمر سیستم نیز بصورت $T = \sum_{i=1}^{N_{\delta,m}} X_i$ خواهد بود. اگر $m = 1$ باشد این مدل، به مدل شوک δ معمولی تبدیل می‌شود. به جهت وابستگی مجموع زمان‌های تعریف شده در تعریف $N_{\delta,m}$ ، محاسبه دقیق توزیع آن مشکل است **ایرلماز و انلو (۲۰۲۳)** با تعریف $N_{\delta,m}^*$ متغیر تصادفی $p_1 = P(X_1 + \dots + X_m \geq \delta, X_1 + \dots + X_{m+1} \geq \delta)$ و $p_2 = P(X_1 + \dots + X_m \geq \delta)$ آن را با متغیر تصادفی $N_{\delta,m}^*$ بصورت زیر تقریب زدند.

$$P(N_{\delta,m}^* = n) = \begin{cases} 0 & n < m \\ 1 - p_2, & n = m \\ p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{n-m-1} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right), & n > m. \end{cases}$$

تحت فرض فاز-نوعی بودن توزیع X_i ها و با فرض $1 = P(X_i > 0)$ توزیع تقریبی $N_{\delta,m}$ برای هر دو حالت گسسته و پیوسته بودن X_i ها قابل محاسبه است.

حالت گسسته

در این حالت، فرض کنید $X \sim PH_d(\mathbf{a}, \mathbf{Q}_{k \times k})$ باشد در اینصورت با توجه به خواص توزیع‌های فاز-نوعی $\sum_{i=1}^m X_i \sim PH_d(\pi_m, \mathbf{Q}_m)$ که در آن $\pi_m = (1, 0, \dots, 0)'$ یک بردار mk بعدی، $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}$ و

$$\mathbf{Q}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{m-1} & (\mathbf{I}_{(m-1)k} - \mathbf{Q}_{m-1})\mathbf{a}' \\ 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix}.$$

با در نظر گرفتن این مفروضات p_1 و p_2 از روابط زیر قابل محاسبه هستند.

$$\begin{aligned} p_1 &= \pi'_{m-1} \mathbf{Q}_{m-1}^{\delta-1} \mathbf{1} + \sum_{s=1}^{\delta-1} \mathbf{a}' (\mathbf{Q}^{\delta-s-1} \mathbf{1}) \pi'_{m-1} \mathbf{Q}_{m-1}^{s-1} (\mathbf{I}_{(m-1)k} - \mathbf{Q}_{m-1}) \mathbf{1} \\ p_2 &= \pi'_m \mathbf{Q}_{m-1}^{\delta-1} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

حالت پیوسته

اگر فاصله زمانی بین ورود شوک‌ها متغیرهای تصادفی پیوسته باشند مقادیر p_1 و p_2 در حالت کلی بصورت زیر قابل محاسبه هستند.

$$p_1 = \bar{F}_{m-1}(\delta) + \int_0^\delta (\bar{F}(\delta-s))^2 f_{m-1}(s) ds \quad (1.4)$$

$$p_2 = \bar{F}_{m-1}(\delta) + \int_0^\delta \bar{F}(\delta-s) f_{m-1}(s) ds \quad (2.4)$$

در روابط (۱.۴) و (۲.۴) عبارت $\bar{F}_{m-1}$ و f_{m-1} به ترتیب تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی احتمال $X_1 + \dots + X_{m-1}$ می‌باشند. اگر فرض کنیم $X \sim PH_c(\alpha, A)$ ، در اینصورت با توجه به خواص توزیع‌های فاز-نوعی روابط (۱.۴) و (۲.۴) بصورت زیر قابل محاسبه هستند.

$$p_1 = \alpha' \exp(As) 1 + \int_0^\delta (\alpha' \exp(A(\delta - s)) 1)' \alpha' \exp(As) a^\circ ds$$

$$p_2 = (\alpha', c\alpha') \exp\left(\begin{pmatrix} A & A^\circ \alpha' \\ 0 & A \end{pmatrix} \delta\right) 1.$$

مراجع

- AALEN, O.O. (1995), Phase type distributions in survival analysis, *Scand. J. Statist* , **22**, 447-463.
- Assaf, D. and Levikson, B. (1982), Closure of phase-type distributions under operations arising in reliability theory, *The Annals of Probability* , **10**, 265-269.
- Bladt, M. (2005), A review on phase-type distributions and their use in risk theory, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **35(1)**, 145-161.
- Bladt, M., & Nielsen, B. F. (2017), *Matrix-exponential distributions in applied probability (Vol. 81, pp. 1-736)*, New York: Springer.
- Bobbio A, Cumani A (1992), ML estimation of the parameters of a PH distribution in triangular canonical form, in: Balbo G, Serazzi G (eds) Computer performance evaluation, Elsevier, Amsterdam, 173-206.
- Bozbulut, A.A. & Eryilmaz, S. (2020), extreme shock models and their applications, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **49(1)** 110-120.
- Cai, J., and Li, H. (2005), Multivariate risk model of phase type, with applications to shock models., *Insurance: Mathematics and Economics*, **36(2)**, 137-152.
- Dong, Q., Bai, M., Yan, Z., & Wu, B. (2025), An Optimal load adjustment policy for multi-state k-out-of-n balanced systems with self-healing mechanisms, *Reliability Engineering & System Safety*, 111091.
- ERLANG, A. (1909), Sandsynlighedsregning og telefonsamtaler, *Nyt tidsskrift for Matematik* , **20**, 33-39.
- Eryilmaz, S. (2017), Computing optimal replacement time and mean residual life in reliability shock models, *Computers and industrial engineering*, **103**, 40-45.
- Eryilmaz, S., & Unlu, K. D. (2023), A new generalized δ -shock model and its application to 1-out-of-(m+1): G cold standby system, *Reliability Engineering & System Safety*, **234**, 109203.

- Faddy MJ. (1995), Phase-type distributions for failure times, *Math Comput Model* , **22**, 63-70. Phase-type distributions for failure times.
- Gong, M., Eryilmaz, S., & Xie, M. (2020), Reliability assessment of system under a generalized cumulative shock model, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, **234(1)**, 129-137.
- Graham, A. (2018), *Kronecker products and matrix calculus with applications*, Courier Dover Publications.
- Gut, A. (1990), Cumulative shock models, *Advances in Applied Probability*, **22 (2)** 504-507.
- Gut, A. (2001), Mixed shock models, *Bernoulli*, **7(3)** 541-555.
- Gut, A., & Hušler, J. R. (1999), Extreme shock models, *Extremes*, **2** 295-307.
- He, Q. M. (2014), *Fundamentals of matrix-analytic methods (Vol. 365)*, New York: Springer.
- Li, H., (2003), Association of multivariate phase-type distributions, with applications to shock models., *Statist. Probab. Lett* , **64**, 281-392.
- Li, Z. and Zhao, P. (2007), Reliability Analysis on the δ -Shock Model of Complex Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **56(2)** 340-348.
- Mallor, F., Omei, E. and Santos, J. (2006), Asymptotic results for a run and cumulative mixed shock model, *Journal of Mathematical Sciences*, **138(1)** 5410-5414.
- Manesh, S. F., Izadi, M., & Khaledi, B. E. (2023), On stochastic ordering among extreme shock models, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **37(4)** 961-972.
- Manesh, S. F., Izadi, M., & Khaledi, B. E. (2025), A new mixed generalized δ -shock model, *statistics & probability letters*, submitted.
- Montoro-Cazorla, D., Pérez-Ocón, R., and Segovia, M. C. (2009), Shock and wear models under policy N using phase-type distributions, *Applied mathematical modelling*, **33(1)**, 543-554.
- Neuts, M.F., (1975), Probability distributions of phase type, In: *Liver Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*, University of Louvain, Belgium, **20**, 173-206.
- O'CINNEIDE, C.A. (1990), Characterization of phase-type distributions, *Comm. Statist Stochastic Models* , **6**, 1-57.

- Ozkut, M., and Eryilmaz, S. (2019), Reliability analysis under Marshall–Olkin run shock model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **349**,52-59.
- Ozkut, M., Kan, C., & Franko, C. (2024), Analyzing the multi-state system under a run shock mode, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **38(4)**,619-931.
- Segovia, M. C., and Labeau, P. E. (2013), Reliability of a multi-state system subject to shocks using phase-type distributions, *Applied mathematical modelling*, **37(7)**,488-554.
- Wang, X., Zhao, X., Wu, C., & Wang, S. (2022), Mixed shock model for multi-state weighted k-out-of-n: F systems with degraded resistance against shocks, *Reliability Engineering & System Safety*, **217**,108098.
- Zhao, X., Guo, X., and Wang, X. (2018), Reliability and maintenance policies for a two-stage shock model with self-healing mechanism, *Reliability Engineering and System Safety*, **172**,185-194.

A review of the use of the family of phase-type distributions in the generalized shock model.

Sirous Fathi Manesh ¹, Muhyiddin Izadi ²

¹ Department of Statistics, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

²Department of Statistics, Razi University, Kermanshah, Iran

Abstract: The utilization of phase-type (PH) distributions - defined through discrete-time and continuous-time Markov processes - is increasingly prevalent in modelling non-negative discrete and continuous random variables. In recent years, these distributions have gained considerable attention among reliability researchers for their application in various shock models. This paper presents a comprehensive review of PH distribution applications in three principal shock models: the generalized shock model, generalized cumulative shock model, and generalized delta shock model. We provide theoretical justification for employing PH distributions in these shock models, followed by derivation of both shock count distribution and system lifetime distribution using the inherent matrix-based relationships characteristic of PH distributions.

Keywords: Generalized cumulative shock model, Generalized delta shock model, Generalized extreme shock model, Markov Processes, Phase-type distribution family.
