پانزدهمین سمینار احتمال
و فرآیندهای تصادفی
۸ و ۹ شهریور ۱۴۰۴
دانشگاه کردستان

15th Seminar On Probability and Stochastic Processes
August 30-31, 2025
University of Kurdistan

بررسی انشعاب‌های تصادفی مدل رشد لجستیک جمعیت

سمیرا مهموئی [۱] ، امید ربیعی مطلق [۲] ، حاجی محمد محمدی‌نژاد [۳]

[۱,۲,۳] دانشکده علوم ریاضی و آمار دانشگاه بیرجند

چکیده: تحلیل رفتار جمعیت و فرآیندهای زیستی از مسائل کلیدی در علوم ریاضی و زیست‌شناسی به‌شمار می‌آید. در این زمینه، مدل رشد لجستیک به‌عنوان ابزاری مؤثر برای بررسی رفتار جمعیت‌ها و فرآیندهای بیولوژیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به افزایش جمعیت و چالش‌های محیطی، مدیریت پایدار منابع امری ضرروی است. این مقاله به بررسی انشعاب‌های معادله رشد لجستیک تحت تأثیر حرکت وینر و عوامل تصادفی می‌پردازد. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهنده تغییرات ناگهانی در امید ریاضی و وقوع P-انشعاب در رفتار سیستم است. هدف ارائه چارچوبی جامع برای درک بهتر دینامیک‌های سیستم‌های جمعیتی در شرایط ناپایدار است.

واژه‌های کلیدی: مدل رشد لجستیک جمعیت، انشعاب تصادفی، معادلات تصادفی، تابع چگالی احتمال.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 37G10، 34F05، 37N25.

۱ مقدمه

مدل رشد لجستیک[1] در ساختارهای ریاضی متنوعی مانند مدل‌سازی رشد جمعیت باکتری‌ها، پیاده‌سازی شبکه‌های عصبی مصنوعی، تخمین پویایی $COVID-۱۹$ برای پیشگیری از رشد بیماری، تحلیل مدل‌های رشد جمعیت تومورها به منظور درک رفتار فرآیند آنها و ... استفاده می‌شود(Tsagkis (2023); Postnikov (2020); Mansour (2022); Koyama (2021). با توجه به اینکه جمعیت جهان در حال افزایش است، نیاز برای مدیریت رشد پایدار و اطمینان از اینکه رشد جمعیت در محدوده منابع موجود باقی می‌ماند، ضروری است. همانطور که می‌دانیم، چالش‌هایی مانند تخریب محیط زیست با افزایش جمعیت تشدید می‌شود. اندازه جمعیت به‌طور قابل توجهی بر توسعه اجتماعی، اقتصادی، سیاسی و اکولوژیکی تأثیر می‌گذارد.

با توجه به اینکه عوامل متعددی بر نرخ رشد جمعیت تأثیر می‌گذارند، ورهولست [۲] عوامل متعدد در نرخ رشد جمعیت را در قالب

[۱] سخنران، s.mahmoiy@birjand.ac.ir

[1] Logistic Growth Model

[۲] مدل رشد لجستیک اولین بار توسط پیر فرانسوا ورهولست $Pierre-FranoisVerhulst$ در سال ۱۸۳۸ معرفی شد.

مدل لجستیک، برای نشان دادن رشد خود محدود شونده‌ی یک جمعیت زیستی فرمول‌بندی کرد. این معادله اغلب به عنوان یک نمایش استاندارد از رشد جمعیت مورد استفاده قرار می‌گیرد، که در آن نرخ تولیدمثل مستقیماً با اندازه جمعیت فعلی و منابع موجود مرتبط است. در اینجا از توسیع مدل ورهولست به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} dx &= \Big[x(۱-\frac{x}{y})-ax^۲\Big]\,dt,\\ dy &= \Big[-h\frac{x(y-x)}{y(c+x)^۲}-bxy+\alpha y\Big]\,dt, \end{aligned} \qquad (۱.۱)$$

$$x(۰)=x_۰,\quad y(۰)=y_۰,$$

که $x(t)$ نشان‌دهنده‌ی جمعیت در لحظهt، $y(t)$ ظرفیت برد و a,b,c,h,α مقادیر مثبت و پارامترهای دستگاه هستند. نظریه انشعاب تصادفی [۳] تغییرات کیفی را در رفتار مجانبی سیستم‌های دینامیکی تصادفی هنگامی که پارامترهای سیستم تغییر می‌کنند، بررسی می‌کند. انشعاب‌های تصادفی در دو قالب کلّی دسته بندی می‌شوند:

۱- (D-انشعاب[۴] یا انشعاب دینامیکی[۵]): این نوع انشعاب وابسته به تغییر رفتار کیفی جواب‌ها است. در صورت نبودن فاکتور تصادف در معادله، این انشعاب همان انشعاب معمولی در معادلات دیفرانسیل است.

۲- (P-انشعاب[۶] یا انشعاب پدیده‌ای[۷]): این انشعاب وابسته به تغییر ماهیت تصادفی جواب‌ها است (به عنوان مثال وقوع یک انشعاب یا تغییر کیفی در تابع چگالی احتمال جواب‌ها، یک P-انشعاب محسوب می‌شود).

P-انشعاب‌ها را معمولاً بوسیله تحلیل معادله معروف فوکر-پلانک[۸] بررسی می‌کنیم که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

۲ بررسی انشعاب‌های تصادفی مدل رشد لجستیک جمعیت

با توجه به تأثیر عوامل تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی بر رفتار جمعیت‌ها، بررسی این پدیده در مدل‌های ریاضی اهمیت زیادی دارد. در این بخش، انشعاب‌های ماهیتی معادله رشد لجستیک جمعیت در حضور حرکت وینر مورد مطالعه قرار می‌گیرد تا اثرات نویز تصادفی بر پایداری و رفتار بلندمدت سیستم تحلیل و مدل‌سازی شود. هدف اصلی این بخش، ارائه چارچوبی جامع برای درک عمیق‌تر رفتار سیستم‌های پویا در محیط‌های تصادفی و تحلیل تأثیر تغییرات پارامتری بر ویژگی‌های دینامیکی آن‌ها است. مدل رشد لجستیک جمعیت ۱.۱ را در نظر بگیرید. پس از افزودن فاکتور تصادف به سیستم داریم:

$$\begin{aligned} dx &= \overbrace{\Big[x(۱-\frac{x}{y})-ax^۲\Big]}^{=L_۱(x,y)}\,dt+\sigma x\,dw_۱(t)\\ dy &= \underbrace{\Big[-h\frac{x(y-x)}{y(c+x)^۲}-bxy+\alpha y\Big]}_{=L_۲(x,y)}\,dt+\sigma y\,dw_۲(t), \end{aligned} \qquad (۱.۲)$$

[3] stochastic bifurcation
[4] D-bifurcation
[5] dynamical bifurcation
[6] P-bifurcation
[7] phenomenological bifurcation
[8] Fokker–Planck equation

$$x(۰) = x_۰, \quad y(۰) = y_۰,$$

که در آن $dw_۱(t)$ تغییرات تصادفی جمعیت و $dw_۲(t)$ تغییرات تصادفی محیطی را مدل‌سازی می‌کنند. نقطه $E = (x^*, y^*)$ نقطه ثابت دستگاه غیرتصادفی است که در آن $y^* = x^*/(۱ - ax^*) > ۰$ و $x^* > ۰$ جواب معادله زیر است:

$$U(x) = x^۲\left(a^۲(-h) - \alpha + ۲bc\right) + x\left(ah + bc^۲ - ۲\alpha c\right) + bx^۳ - \alpha c^۲.$$

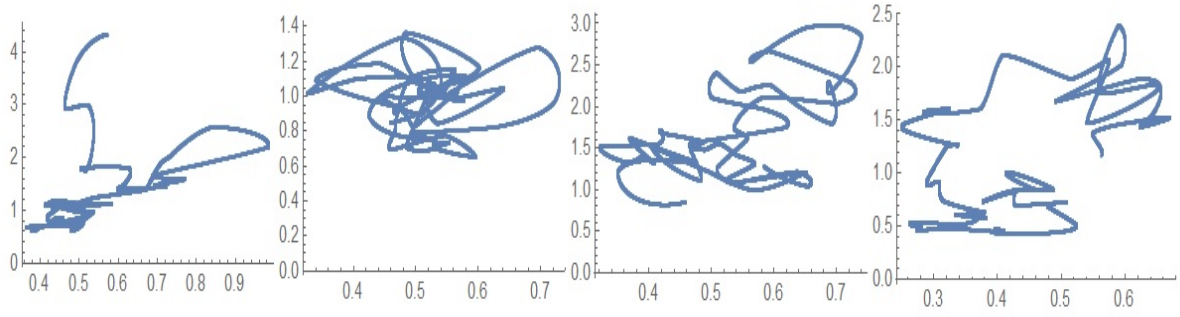
با استفاده از مقادیر پارامترهای جدول ۱، نقطه تعادل به صورت تقریبی برابر با $E = (x^*, y^*) = (۰/۰۸۲۵, ۰/۰۸۹۹)$ می‌باشد. ماتریس قسمت خطی سیستم به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ - \dfrac{۲x(۱+y)}{y} & \dfrac{x^۲}{y^۲} \\ -\dfrac{۲}{(۲+x)^۳} - y + \dfrac{x(۴+y)}{(۲+x)^۳y} & ۰/۱ + x\left(-۱ - \dfrac{x}{(۲+x)^۲y^۲}\right) \end{bmatrix}$$

محاسبه‌ی مقادیر ویژه این ماتریس در نقطه‌ی E منجر به دو مقدار $\lambda_۱ = -۱/۰۹۵, \lambda_۲ = -۰/۸۱۲$ می‌شود. از آن‌جا که هر دو مقدار ویژه دارای قسمت حقیقی منفی و غیرصفر هستند، نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی E یک نقطه‌ی تعادل هذلولوی است. بنابراین، در همسایگی این نقطه هیچ‌گونه D-انشعاب رخ نمی‌دهد. شکل ۱ جواب‌های سیستم (۱.۲) را در اطراف E به ازای مقادیر پارامتر جدول ۱ نشان می‌دهد.

σ	T	$y(۰)$	$x(۰)$	b	c	h	α	a
۰/۳	۱۰	۰/۰۸۹۹	۰/۰۸۲۵	۱	۲	۱	۰/۵	۱

جدول ۱: مقادیر پارامتر سیستم (۱.۲)



شکل ۱: جواب‌های تصادفی معادله (۱.۲)

به منظور بررسی P-انشعاب دستگاه ۱.۲، فرض‌کنید $P \equiv P(t, x, y)$ تابع چگالی احتمال جواب این سیستم باشد، معادله

فوکر-پلانک وابسته به این معادله را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[L_1(x,y)P\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[L_2(x,y)P\right]+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2P\right]+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[y^2P\right]\\ &= -P\frac{\partial L_1(x,y)}{\partial x}-L_1(x,y)\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial L_2(x,y)}{\partial y}-L_2(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}\\ &\quad+\frac{\sigma^2}{2}\left(2P+4x\frac{\partial P}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+2P+4y\frac{\partial P}{\partial y}+y^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

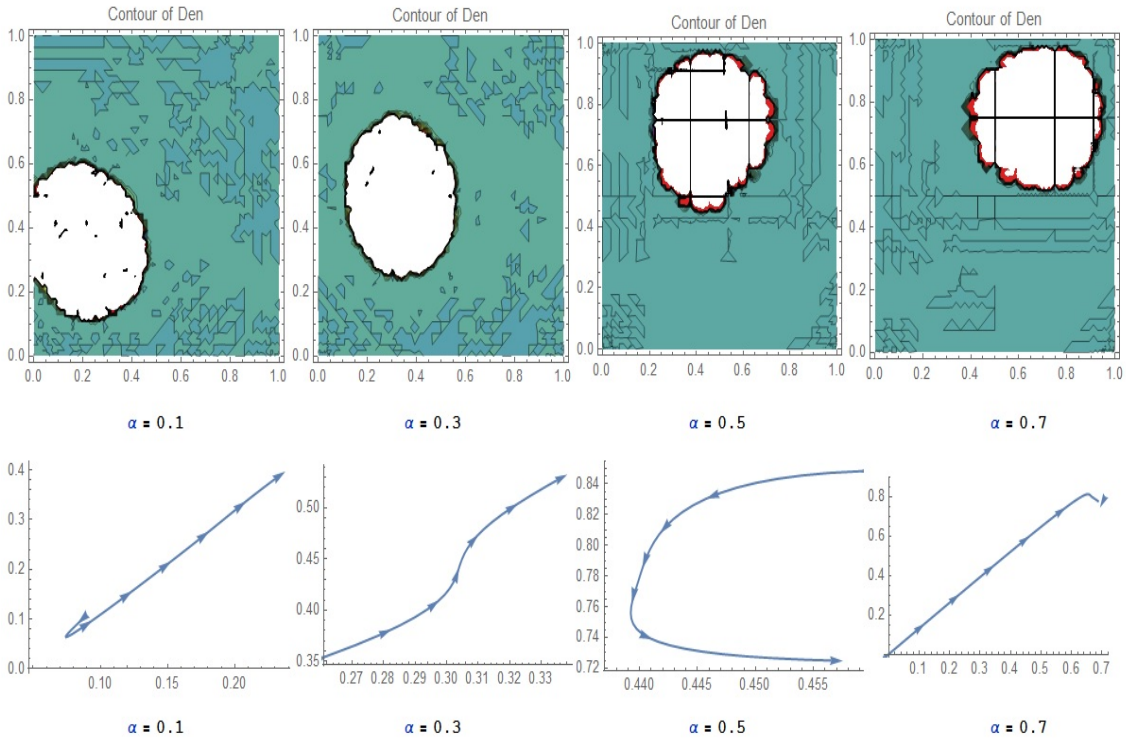
$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial x}\left[2\sigma^2x-L_1(x,y)\right]+\frac{\partial P}{\partial y}\left[2\sigma^2y-L_2(x,y)\right]\\ &\quad+P\left[2\sigma^2-\frac{\partial L_1(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial L_2(x,y)}{\partial y}\right]+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left[\frac{\sigma^2x^2}{2}\right]+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\left[\frac{\sigma^2y^2}{2}\right]\end{aligned}$$

با توجه به شرط اولیه زیر،

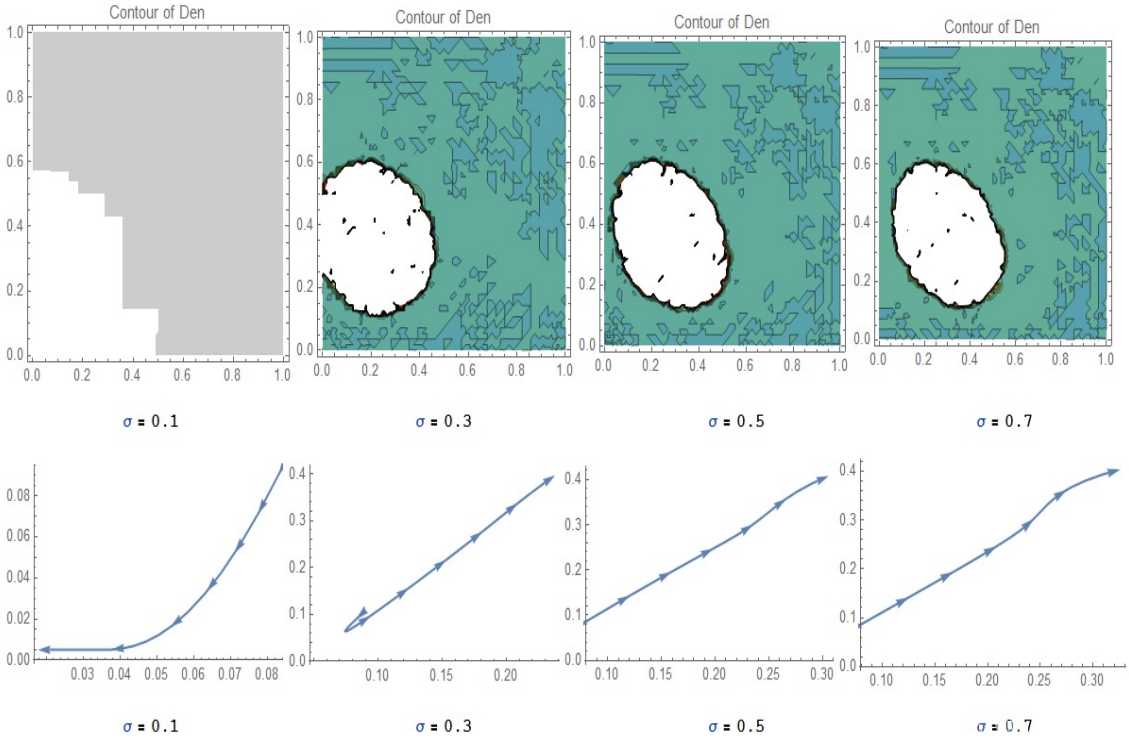
$$P(0,x,y)=\Delta(x,y,\epsilon)=\frac{1}{\pi\epsilon}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{\epsilon}\right),\qquad 0<\epsilon\ll 1$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Delta(x,y,\epsilon)=\delta(x,y)$$

که در آن $\delta(x,y)$ تابع دلتای دیراک است. نمودارهای ۲ و ۳ تغییرات جواب معادله فوکر-پلانک در صفحه را برحسب تغییرات به‌ترتیب α و σ نشان می‌دهند و نمودارهای قسمت پایین هر کدام از شکل‌ها امید ریاضی جواب دستگاه (۱.۲) را نشان می‌دهند. همان‌طورکه ملاحظه می‌شود نمودار امید ریاضی دچار تغییرات ناگهانی شده که تغییر رفتار سیستم (۱.۲) را نشان می‌دهد و بنابراین این سیستم دچار P-انشعاب شده است.



شکل ۲: برای $\sigma=0/3;\epsilon=0/002;a=1;b=1;c=2;h=1$



شکل ۳: برای $\epsilon = ۰/۰۰۲; a = ۱; b = ۱; c = ۲; h = ۱; \alpha = ۰/۱$

بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، با تکیه بر مدل رشد لجستیک و توسعه آن در بستر سیستم‌های تصادفی، به بررسی پایداری دینامیکی جمعیت در حضور نویزهای تصادفی پرداخته شد. تحلیل معادله رشد لجستیک با در نظر گرفتن حرکت وینر نشان داد که اعمال اختلالات تصادفی می‌تواند منجر به بروز رفتارهای پیچیده و انشعابات تصادفی در سیستم شود. نتایج حاصل از محاسبه مقادیر ویژه در نقطه‌ی تعادل E نشان داد که این نقطه هذلولوی بوده و در آن انشعاب D-گونه رخ نمی‌دهد، در حالی‌که بررسیP-انشعاب در چارچوب معادله فوکر-پلانک، تصویر روشن‌تری از ناپایداری‌های ممکن در سیستم ارائه می‌دهد و نشان می‌دهد که حتی تغییرات کوچک در پارامترهای محیطی می‌توانند منجر به تحولات بنیادی در پاسخ سیستم شوند.

این نتایج اهمیت در نظر گرفتن نویزهای تصادفی در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی، به‌ویژه در حوزه‌هایی مانند رشد جمعیت، انتشار بیماری‌ها و گسترش تومورها را برجسته می‌سازد. چارچوب ارائه‌شده در این پژوهش می‌تواند به‌عنوان مبنایی برای تحلیل پایداری و پاسخ سیستم‌های زیستی و اجتماعی در برابر ناپایداری‌های محیطی مورد استفاده قرار گیرد. در مجموع، بررسی مدل رشد لجستیک در بستر تصادفی نه تنها درک عمیق‌تری از رفتار بلندمدت سیستم‌های پویا فراهم می‌سازد، بلکه راهگشای توسعه سیاست‌ها و راهکارهای مبتنی بر داده برای مدیریت پایداری در مواجهه با عدم‌قطعیت‌های دنیای واقعی خواهد بود.

مراجع

Tsagkis P., Bakogiannis E. and Nikitas A. (2023), Analysing urban growth using machine learning and open data: An artificial neural network modelled case study of five Greek cities, *Sustainable Cities and Society,***89**, 104337.

Postnikov E. B. (2020), Estimation of COVID-19 dynamics “on a back-of-envelope”: Does the simplest SIR model provide quantitative parameters and predictions?, *Chaos, Solitons and Fractals,***135**, 109841.

Mansour M. B. A. and Abobakr A. H. (2022), Stochastic differential equation models for tumor population growth, *Chaos, Solitons and Fractals,***164**, 112738.

Koyama K., Hiura S., Abe H. and Koseki S. (2021), Application of growth rate from kinetic model to calculate stochastic growth of a bacteria population at low contamination level, *Journal of Theoretical Biology,***525**, 110758.

Investigation of Stochastic Bifurcations in the Logistic Growth Model of Populations

Samira Mahmooee[1], **Omid RabieiMotlagh**[2],**Hajimohammad Mohammadinejad**[3]

[1,2,3] Dept. of Applied Math., University of Birjand, Birjand, Iran

---

Abstract: The logistic growth model is employed as a key tool in analyzing the behavior of populations and biological processes. Given the increasing population and environmental challenges, sustainable resource management is essential. This paper investigates the bifurcations of the logistic growth equation under the influence of Wiener motion and stochastic factors. The results obtained reveal sudden changes in the expected value and the occurrence of P-bifurcation in the system's behavior. The objective is to provide a comprehensive framework for a better understanding of the dynamics of population systems under unstable conditions.

Keywords: Logistic growth model, Stochastic bifurcation, Stochastic equations, Probability density function.

Mathematics Subject Classification (2020): 37G10، 34F05، 37N25.
