پانزدهمین سمینار احتمال
و فرآیندهای تصادفی
۸ و ۹ شهریور ۱۴۰۴
دانشگاه کردستان

15th Seminar On Probability and Stochastic Processes
August 30-31, 2025
University of Kurdistan

مقایسه دو رویکرد نیم‌رخی و نامقید در برازش مدل رگرسیون بر اساس نمونه داده‌های ترکیبی با تواتر متفاوت

فرزین رنجبر، علی آقامحمدی [۱] ، مجید ادیب[۲]

[۱]گروه آمار، دانشگاه زنجان

[۲]گروه ریاضی، دانشگاه زنجان

چکیده: این مقاله به مقایسه روش نیم‌رخی و نامقید در برآورد پارامترهای مدل رگرسیون بر اساس نمونه داده‌های ترکیبی با تواتر متفاوت (MIDAS) می‌پردازد. روش نیم‌رخی با ترکیب حداقل مربعات معمولی (OLS) برای برآورد ضرایب رگرسیونی و بهینه‌سازی پارامترهای وزن‌دهی چندجمله‌ای، کارایی محاسباتی بهتر و خطای پیش‌بینی کمتری نسبت به روش براورد پارامتر نامقید نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مدل رگرسیونی نمونه داده‌های ترکیبی با تواتر متفاوت، روش برآورد پارامتر نامقید، روش برآورد پارامتر نیم‌رخی.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): xxAxx، xxBxx، xxCxx.

---

۱ مقدمه

در اقتصادسنجی مدرن، تحلیل داده‌های سری زمانی با تواتر متفاوت به یکی از چالش‌های اساسی محققان تبدیل شده است. مدل‌های نمونه داده‌های با تواتر متفاوت (MIDAS) [۲] که توسط گیلز و همکاران (۲۰۰۴) و گیلز و همکاران (۲۰۰۶) معرفی شدند، ابزاری قدرتمند برای مواجهه با این چالش محسوب می‌شوند. این مدل‌ها قابلیت ترکیب اطلاعات متغیرهای اقتصادی با تواترهای متفاوت نظیر داده‌های روزانه، ماهانه و فصلی را فراهم می‌آورند. اهمیت این تحقیق در چندین جنبه نمایان می‌شود. نخست، مدل‌های MIDAS سنتی نیازمند استفاده از روش‌های حداقل مربعات غیرخطی هستند که از لحاظ محاسباتی پیچیده و گاهی دارای مشکلات همگرایی می‌باشند آندرو و همکاران (۲۰۱۰).

در ادامه برای کاهش پیچیدگی محاسباتی و کاهش تعداد پارامترها، روش استنباطی نیم‌رخی ارائه شده است که ابتدا به مفهوم آن می‌پردازیم.

---

[۱] aghamohammadi.ali@znu.ac.ir

[۲] Mixed Data Sampling

مفهوم تابع درستنمایی نیم‌رخی [۱] ریشه‌ای عمیق در ادبیات آماری دارد و توسط محققانی چون پاتیفلد (۱۹۷۷) توسعه یافته است. فرض کنید متغیرهای تصادفی y_t مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال $f(y;\delta,\theta)$ باشند و هدف برآورد پارامترهای δ,θ باشد. با یک نمونه به اندازه T لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{L}(\delta,\theta)=\sum_{t=1}^{T}\log f(y_t;\delta,\theta)$$

در بسیاری مواقع، بیشینه‌سازی این تابع نسبت به تمامی پارامترها دشوار است. اما اگر θ را ثابت در نظر گرفته شود، یعنی $\theta=\bar{\theta}$، بیشینه‌سازی نسبت به δ برای θ ثابت ساده‌تر است. در چنین مواردی می‌توان لگاریتم تابع درستنمایی به شکل $L_{T,\delta}(\theta)$ بازنویسی کرد که به آن لگاریتم تابع درستنمایی نیم‌رخی گفته می‌شود و نسبت به δ برای یک θ معین بهینه می‌شود. بنابرین مسئله بهینه‌سازی به $(\hat{\delta},\hat{\theta})=\arg\max_{\theta} L_{T,\delta}(\theta)$ تبدیل می‌شود. این توابع عمدتاً زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که δ پارامتری با بعد کم و θ پارامتری با بعد بالا یا مزاحم محسوب شود. مورفی (۲۰۰۰) توجیه کلی برای استفاده از تابع درستنمایی نیم‌رخی را به عنوان یک رهیافت استنباطی ارائه دادند.

در این پژوهش، رویکرد تابع درستنمایی نیم‌رخی برای مدل‌های رگرسیون MIDAS ارائه می‌شود که در آن θ نشان‌دهنده پارامترهای وزن چندجمله‌ای MIDAS و δ شامل پارامترهای عرض از مبدأ و شیب مدل رگرسیون است. برای مقدار ثابت $\theta=\bar{\theta}$، رویکرد نیم‌رخی مسئله برآورد را به مجموعه‌ای از برآوردگرهای حداقل مربعات معمولی (OLS) مدل‌های رگرسیون خطی نسبتاً ساده $\hat{\delta}(\bar{\theta})$ تقلیل می‌دهد. از آنجا که پارامترهای چندجمله‌ای MIDAS یعنی θ دارای ابعاد پایین هستند - گاهی اوقات حتی تک‌بعدی - انتخاب $\bar{\theta}$ در یک شبکه نقاط، نسبتاً آسان است. که این امر بهینه‌سازی را از نظر محاسباتی ساده می‌نماید.

روش دیگر در تحلیل مدل های رگرسیون MIDAS ، روش MIDAS نامقید (U-MIDAS) [۲] است که توسط فورنی و همکاران (۲۰۱۵) پیشنهاد شده است. U-MIDAS یک روش برآورد برای مدل‌های MIDAS است که برخلاف روش استاندارد MIDAS که از توابع پارامتریک (مانند چندجمله‌ای بتا و ...) برای وزن‌دهی به وقفه داده‌های با تواتر بالا استفاده می‌کند. U-MIDAS هیچ محدودیت پارامتریکی بر روی وزن‌های وقفه‌ها اعمال نمی‌کند. در عوض، این روش هر وزن وقفه را به صورت جداگانه و بدون ساختار با استفاده از حداقل مربعات معمولی (OLS) برآورد می‌کند. این روش زمانی جذاب است که اختلاف تواترها کم باشد. مثلاً در داده‌های فصلی/ماهانه (که هر فصل شامل ۳ ماه است)، U-MIDAS می‌تواند ۳، ۶ یا ۹ وقفه ماهانه را مستقیماً در مدل وارد کند و تمام پارامترها را با OLS برآورد کند. این رویکرد برای مواردی که ساختار وزن‌ها نامشخص است یا تفاوت تواترها کم است، مناسب می‌باشد. اما اگر اختلاف تواترها بزرگ باشد (مثلاً داده‌های روزانه در مدل‌های فصلی که هر فصل شامل ۹۰ روز است) U-MIDAS نیاز به تخمین تعداد زیادی پارامتر (مثلاً وزن ۹۰ وقفه) دارد که منجر به پیچیدگی محاسباتی بالا و مشکل بیش برازش می‌شود. نتیجه قابل توجه و غیرمنتظره این است که در مواردی که U-MIDAS جذاب به نظر می‌رسد، رویکرد جدید نیم‌رخی برای مدل رگرسیون MIDAS از نظر محاسباتی سریع‌تر از روش OLS است فورنی و همکاران (۲۰۱۵). دلیل این امر آن است که U-MIDAS مثلاً در حالت فصلی/ماهانه یک مدل رگرسیونی با ۳، ۶ یا ۹ وقفه از داده‌های ماهانه و داده‌های فصلی با وقفه است که بر روی داده‌های فصلی جاری یا آینده تصویر می‌شوند، در حالی که روش برآورد نیم‌رخی تنها شامل یک متغیر توضیحی (با نادیده گرفتن عرض از مبدأ در هر دو حالت) است که این متغیر توضیحی با اعمال چندجمله‌ای MIDAS (با فرض $\bar{\theta}$) بر داده‌های با تواتر بالا ساخته می‌شود. روش برآورد نیم‌رخی از نظر محاسباتی کارآمد، از لحاظ آماری جذاب و پیچیدگی محاسباتی روش کمترین مربعات غیرخطی را برای برآورد پارامترهای مدل MIDAS را ندارد.

[۱] Profiling

[۲] Unrestricted Mixed Data Sampling

در مجموعه مدل‌های MIDAS ، مطالعات متنوعی انجام شده است. کلمنتز و همکاران (۲۰۰۹) بر جنبه‌های پیش‌بینی این مدل‌ها تمرکز کردند، در حالی که بررسی‌های جامع‌تری توسط آرمستو و همکاران (۲۰۱۰) و آندرو و همکاران (۲۰۱۰) انجام شده است. گیلز و همکاران (۲۰۱۱) نخستین بار ایده نیم‌رخی را در رگرسیون چندکی MIDAS به کار گرفتند. هدف اصلی این مطالعه، ارائه روشی نوین برای برازش مدل‌های MIDAS است که مزایای محاسباتی OLS را با دقت و انعطاف‌پذیری مدل‌های پارامتری ترکیب می‌کند. نوآوری اصلی در استفاده از رویکرد نیم‌رخی برای برآورد پارامترهای چندجمله‌ای بتا نهفته است، که امکان کاهش پیچیدگی محاسباتی را فراهم می‌آورد.

یافته‌های ما نشان می‌دهد که مدل MIDAS با رویکرد نیم‌رخی، علی‌رغم دارا بودن ضریب تعیین (R^2) کمتر در نمونه، از قدرت پیش‌بینی بالاتری در خارج از نمونه برخوردار است. میانگین مربعات خطای پیش‌بینی خارج از نمونه در روش نیم‌رخی به طور قابل توجهی پایین‌تر است. این یافته نشان‌دهنده این است که U-MIDAS مشکل بیش برازشی نیز دارد. در بخش دوم مدل رگرسیون MIDAS به اختصار توضیح داده شده و رویکردهای نیم‌رخی و نامقید در این مدل‌ها بررسی می‌شوند. بخش سوم شامل شبیه‌سازی برای مقایسه این رویکرد و تحلیل نتایج حاصل از آن است.

۲ مدل رگرسیون MIDAS

مدل‌های MIDAS معمولا بر ترکیبی از دو تواتر متفاوت، به ترتیب تواتر بالا و پایین، تمرکز دارند. فرض کنید $t = ۱, \dots, T$ نشان‌دهنده واحد زمانی با تواتر پایین و m تعداد دفعاتی است که تواتر بالا در همان واحد زمانی ظاهر می‌شود. به عنوان مثال، برای رشد تولید ناخالص داخلی فصلی و شاخص‌های ماهانه به عنوان متغیرهای توضیحی، $m = ۳$ خواهد بود. متغیر با فرکانس پایین با y_t^L و متغیر با فرکانس بالا نیز با $x_{t-j/m}^H$ نمایش داده می‌شود که در آن $t - j/m$ بیانگر دوره زمانی jام (گذشته) با تواتر بالاتر است و $j = ۰, ۱, \dots$. برای یک ترکیب فصلی/ماهانه، x_t^H، $x_{t-۱/۳}^H$، $x_{t-۲/۳}^H$ به ترتیب نشان‌دهنده آخرین، دومین و اولین ماه فصل t هستند.

مدل‌های رگرسیونی MIDAS در اصل نوعی مدل‌های رگرسیونی هستند که داده‌هایی با تواترهای متفاوت (مثلاً ماهانه و فصلی) را به طور همزمان در یک مدل ترکیب می‌کنند. تأثیر متغیر با تواتر بالا با استفاده از یک تابع وزن‌دهی مدل می‌شود که به‌صورت خودکار وزن‌های تمام وقفه‌های گذشته را محاسبه و توزیع می‌کند. این کار باعث می‌شود تعداد پارامترهای مدل به حداقل برسد و مشکلات مربوط به انتخاب تعداد وقفه‌های مناسب نیز رفع گردد.

مدل اساسی MIDAS با یک متغیر توضیحی با تواتر بالا برای پیشبینی h دوره بعد در تواتر پایین، در حالتی که داده‌های با تواتر بالا تا x_t^H در دسترس هستند، به صورت زیر

$$y_{t+h}^L = a_h + b_h C(L^{۱/m}; \theta_h) x_t^H + \varepsilon_{t+h}^L \qquad (۱.۲)$$

است، که در آن $C(L^{۱/m}; \theta) = \sum_{j=۰}^{j_{\max}-۱} c(j;\theta) L^{j/m}$ و $C(۱;\theta) = \sum_{j=۰}^{j_{\max}-۱} c(j;\theta) = ۱$ است. مؤلفه j^{max} حداکثر تعداد وقفه‌هایی است که از متغیر با تواتر بالا (مثلاً داده‌های روزانه) در مدل استفاده می‌شود.این مدل اغلب DL-MIDAS نامیده می‌شود که DL به معنای وقفه توزیع‌شده است. پارامتری‌سازی ضرایب وقفه‌دار $c(j;\theta)$ به شیوه‌ای صرفه‌جویانه، یکی از ویژگی‌های کلیدی مدل‌های MIDAS است.

هرچند محدود کردن فضای پارامتری θ به یک بعد اجباری نیست، اما این کار محاسبات را تسهیل می‌کند. در این راستا، چندجمله‌ای‌های

بتا که ابتدا توسط گیلز و همکاران (۲۰۰۶) پیشنهاد شدند، گزینه مناسبی هستند. این توابع مبتنی بر توزیع بتا بوده و تنها به دو پارامتر نیاز دارند، یعنی:

$$c(j;\theta_1,\theta_2)=\frac{f(\frac{j}{j_{\max}},\theta_1;\theta_2)}{\sum_{j=0}^{j_{\max}-1} f(\frac{j}{j_{\max}},\theta_1;\theta_2)}, \tag{۲.۲}$$

که در آن

$$f(x,a,b)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \tag{۳.۲}$$

و $\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}$ است. با ثابت نگه‌داشتن یکی از پارامترها (مثلاً $\theta_1=1$) ، می‌توان مدل را به یک پارامتر (θ_2) تقلیل داد که برای داده‌های اقتصادی مطلوب است.

۱.۲ مدل اتورگرسیو MIDAS

روش ارائه‌شده در این مقاله به مدل DL-MIDAS در معادله (۱.۲) محدود نمی‌شود. به عنوان مثال، افزودن متغیرهای وابسته با وقفه (یعنی متغیرهای کم تواتر) منجر به دسته‌ای از مدل‌های ADL-MIDAS می‌شود. برای ساده‌سازی نمادگذاری، در ادامه مقاله (بدون از دست دادن کلیت مسئله) فرض می‌کنیم $h=1$. با این فرض یک مدل اتورگرسیو از مرتبه p را به صورت

$$y_{t+1}^L=a+\sum_{j=1}^{p}\rho_j y_{t-j+1}^L+bC(L^{1/m};\theta)x_t^H+\varepsilon_{t+1}^L \tag{۴.۲}$$

بازنویسی می‌کنیم. حال می‌توان روش نیم‌رخی را با ثابت درنظر گرفتن پارامترهای چند جمله‌ای MIDAS برای این مدل نیز بکار گرفت.

۲.۲ مدل MIDAS نامقید

مدل U-MIDAS که توسط فورنی و همکاران (۲۰۱۵) معرفی شد. برای توصیف این مدل فرض کنید m کوچک باشد، (مثلاً برابر ۳ برای ترکیب داده‌های فصلی/ماهانه) برخلاف مدل استاندارد MIDAS ، از هیچ تابع وزن‌دهی از پیش تعیین‌شده‌ای در این مدل استفاده نمی‌شود. برای هر وقفه از متغیر با تواتر بالا، یک ضریب جداگانه در نظر گرفته می‌شود. یعنی به جای برآورد $bC(L^{1/m};\theta)$ در معادله ۴.۲ ضرایب متغیر با تواتر بالا به صورت جداگانه برآورد می‌شود. فرم کلی این مدل به صورت

$$y_{t+1}=a+\sum_{j=1}^{p}\rho_j y_{t-j+1}^L+\sum_{j=0}^{J_{\max}-1}c_j x_{t-j/m}^H+\varepsilon_{t+1}^L \tag{۵.۲}$$

است. این بدان معناست که علاوه بر پارامترهای a و ρ_j، ما $j_{max}-2$ پارامتر اضافی را تخمین می‌زنیم. وقتی $m=3$ و $j_{max}-1$ کوچک باشد (مثلاً حداکثر وقفه سالانه برابر ۴ باشد) و حجم نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد که جمله خطا ϵ_{t+1}^L را ناهمبسته سازد، پارامترهای مدل U-MIDAS را می‌توان با حداقل مربعات معمولی (OLS) تخمین زد.

۳ شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از یک مطالعه شبیه‌سازی به بررسی کارایی هریک از رویکردهای ارائه شده می‌پردازیم. فرض کنید مقدار $m = ۳$ برای ترکیب داده‌های فصلی/ماهانه باشد. مدل رگرسیون MIDAS را به صورت

$$y^L_{t+۱} = \sum_{j=۰}^{j^{\max}-۱} c(j,\theta) x^H_{t-\frac{j}{m}} + \epsilon^L_{t+۱}, \quad t = ۱,\dots,T \tag{۱.۳}$$

در نظر می‌گیریم. توجه کنید در این مدل به دلیل اینکه ضرایب عرض از مبدأ و اتورگرسیو مربوط به متغیر کم تواتر، در تحلیل ضروری نیستند بنابراین کنار گذاشته می‌شوند. مدل U-MIDAS فرض می‌کند که ضرایب بدون هیچ محدودیتی و با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی (OLS) برآورد می‌شوند؛ در حالی که مدل MIDAS با چندجمله‌ای بتا، وزن‌ها را به‌صورت بسیار مقید و پارامتریک به شکل $c(j,\theta) \propto (۱ - \frac{j}{j_{\max}})^{\theta-۱}$ مدل‌سازی می‌کند. روش نیم‌رخی فرض می‌کند پارامتر θ ثابت است و با روش حداقل مربعات معمولی، پارامترهای دیگر (مثل شیب) را برآورد کرده سپس مقدار θ را طوری تنظیم می‌کند که مدل بهترین برازش را داشته باشد.

در شبیه‌سازی مونت‌کارلو، داده‌های ماهانه از یک مدل $AR(۱)$ با خودهمبستگی ۰٫۸ و داده‌های فصلی از مدل MIDAS با چندجمله‌ای بتا تولید شده‌اند. مقادیر خودهمبستگی‌های ۰٫۹, ۰٫۱ را نیز آزمایش شد و نتایج مشابهی حاصل گردید. مقادیر $T = \{۵۰, ۲۰۰, ۲۰۰۰\}$ (اندازه نمونه)، $j^{max} = \{۶, ۹, ۱۲\}$ (حداکثر وقفه) و $\theta = \{۲, ۱۰\}$ (پارامترهای توزیع بتا) را در نظر می‌گیریم که ترکیبات آنها منجر به ۱۸ سناریوی مختلف می‌شود. شبیه‌سازی را به تعداد ۱۰۰۰ مرتبه تکرار کرده و در هر سناریو و تکرار، داده‌های ماهانه/فصلی را شبیه‌سازی می‌کنیم سپس مدل رگرسیون MIDAS را با استفاده از رویکرد نیم‌رخی و مدل U-MIDAS را بر داده‌ها برازش می‌دهیم. مدل‌ها را با استفاده از معیارهای ارزیابی به شرح ذیل ارزیابی می‌کنیم:

$$Bias^۲ = \sum_{j=۰}^{j_{\max}-۱} (\hat{c}(j,\theta) - c(j,\theta))^۲,$$

$$R^۲ = ۱ - \frac{\sum_{t=۱}^{T} (\hat{y}^L_t - y^L_t)^۲}{\sum_{t=۱}^{T} y^۲_t},$$

$$MSE = \frac{۱}{r} \sum_{t=T+۱}^{T+r} (\hat{y}^L_t - y^L_t)^۲,$$

که در آن $\hat{c}(j,\theta)$ وزن‌های برآورد شده و $\hat{y}^L_t$ مقدار برازش شده است.

نتایج شبیه‌سازی در جدول ۱ ارائه شده است که در آن نتایج ۱۸ سناریو شبیه‌سازی را برای سه شاخص عنوان شده، گزاش شده است. با توجه به جدول ۱ مشخص است که برآوردهای نیم‌رخی در تمامی سناریوها مربع اریبی کمتری نسبت به U-MIDAS دارد. به عنوان مثال، در سناریوی $T = ۵۰$، $j^{max} = ۶$ و $\theta = ۲$، مربع اریبی روش نیم‌رخی ۰.۰۸۷ است، در حالی که این مقدار برای U-MIDAS به ۰.۳۹۱ می‌رسد. این نشان می‌دهد که برآورد نیم‌رخی به طور قابل توجهی دقیق‌تر از U-MIDAS است.

در بیشتر سناریوها $R^۲$ درون‌نمونه‌ای روش نیم‌رخی کمتر از U-MIDAS است. با این حال، قدرت پیش‌بینی خارج از نمونه‌ای آن بالاتر است، به طوری که MSE پیش‌بینی آن به طور قابل توجهی کمتر از U-MIDAS است. به عنوان مثال، در سناریوی $T = ۵۰$، $j_{max} = ۱۲$ و $\theta = ۲$، MSE پیش‌بینی روش نیم‌رخی ۰.۹۸۹ است، در حالی که این مقدار برای U-MIDAS برابر ۱.۳۲۲ (حدود ۲۶% بیشتر) است. این نتایج نشان می‌دهد که U-MIDAS از مشکل برازش بیش از حد رنج می‌برد. پارامترهای غیرمقید در U-MIDAS می‌توانند با $R^۲$ درون‌نمونه‌ای بالا تنظیم شوند، اما نمی‌توانند در پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای از یک مدل کم پارامتر پیشی

جدول ۱: مقایسه عملکرد پروفایلی و U-MIDAS در ۱۸ سناریوی شبیه‌سازی‌شده

T	$j_{\max}$	θ	$Bias^2$		R^2		MSE Forecast		FLOPS (10^3)	
			پروفایلی	U-MIDAS	پروفایلی	U-MIDAS	پروفایلی	U-MIDAS	پروفایلی	U-MIDAS
۵۰	۶	۲	۰.۰۸۷	۰.۳۹۱	۰.۶۵۸	۰.۶۹۰	۱.۰۴۱	۱.۱۴۸	۵.۸	۷.۶
۵۰	۶	۱۰	۰.۱۱۹	۰.۴۰۶	۰.۷۴۲	۰.۷۶۵	۱.۰۲۵	۱.۱۲۲	۵.۸	۷.۶
۵۰	۹	۲	۰.۰۶۶	۰.۴۹۷	۰.۶۱۰	۰.۶۸۷	۱.۰۳۴	۱.۱۹۷	۹.۱	۱۲.۱
۵۰	۹	۱۰	۰.۱۲۷	۰.۵۰۵	۰.۷۲۱	۰.۷۶۲	۱.۰۶۴	۱.۲۴۷	۹.۱	۱۲.۱
۵۰	۱۲	۲	۰.۰۵۵	۰.۶۱۹	۰.۵۷۳	۰.۶۶۹	۰.۹۸۹	۱.۳۲۲	۱۲.۳	۱۹.۸
۵۰	۱۲	۱۰	۰.۱۱۴	۰.۶۳۱	۰.۶۹۳	۰.۷۵۵	۱.۰۳۶	۱.۳۲۵	۱۲.۳	۱۹.۸
۲۰۰	۶	۲	۰.۰۴۱	۰.۱۸۱	۰.۶۶۵	۰.۶۷۷	۱.۰۰۳	۱.۰۴۷	۲۹.۴	۲۰.۲
۲۰۰	۶	۱۰	۰.۰۶۵	۰.۱۹۰	۰.۷۳۱	۰.۷۴۰	۱.۰۲۴	۱.۰۶۷	۲۹.۴	۲۰.۲
۲۰۰	۹	۲	۰.۰۲۸	۰.۲۳۴	۰.۶۲۷	۰.۶۶۴	۱.۰۱۷	۱.۰۸۹	۳۷.۱	۴۱.۴
۲۰۰	۹	۱۰	۰.۰۵۹	۰.۲۴۱	۰.۷۰۱	۰.۷۳۲	۱.۰۲۹	۱.۱۱۱	۳۷.۱	۴۱.۴
۲۰۰	۱۲	۲	۰.۰۲۲	۰.۳۱۰	۰.۵۹۸	۰.۶۴۸	۰.۹۷۱	۱.۱۲۸	۴۴.۹	۶۹.۲
۲۰۰	۱۲	۱۰	۰.۰۵۲	۰.۳۱۷	۰.۶۹۲	۰.۷۲۵	۱.۰۱۵	۱.۱۳۰	۴۴.۹	۶۹.۲
۲۰۰۰	۶	۲	۰.۰۱۳	۰.۰۶۲	۰.۶۷۰	۰.۶۷۳	۰.۹۸۰	۰.۹۸۱	۲۹۵.۰	۲۰۴.۹
۲۰۰۰	۶	۱۰	۰.۰۳۲	۰.۰۶۴	۰.۷۳۳	۰.۷۳۵	۱.۰۰۰	۱.۰۰۲	۲۹۵.۰	۲۰۴.۹
۲۰۰۰	۹	۲	۰.۰۱۰	۰.۰۸۲	۰.۶۳۶	۰.۶۴۰	۰.۹۸۷	۰.۹۹۱	۳۶۶.۲	۴۱۶.۷
۲۰۰۰	۹	۱۰	۰.۰۳۷	۰.۰۸۵	۰.۷۱۰	۰.۷۱۴	۱.۰۰۶	۱.۰۱۰	۳۶۶.۲	۴۱۶.۷
۲۰۰۰	۱۲	۲	۰.۰۰۸	۰.۱۰۲	۰.۶۰۷	۰.۶۱۶	۱.۰۱۲	۱.۰۲۰	۴۷۳.۴	۷۰۰.۸
۲۰۰۰	۱۲	۱۰	۰.۰۳۶	۰.۱۰۵	۰.۶۹۲	۰.۶۹۹	۰.۹۹۹	۱.۰۰۴	۴۳۷.۴	۷۰۰.۸

بگیرند.

با افزایش اندازه نمونه (T) و ثابت نگه داشتن j_{max}، هر دو روش OLS و نیم‌رخی سازگار هستند. مربع اریبی هر دو روش با افزایش اندازه نمونه کاهش می‌یابد. برای مثال، مربع اریبی روش نیم‌رخی (U-MIDAS) از ۰.۰۸۷ (۰.۳۹۱) به ۰.۰۴۱ (۰.۱۸۱)، و سپس به ۰.۰۱۳ (۰.۰۶۲) کاهش می‌یابد، همچنان که T از ۵۰ به ۲۰۰ و سپس به ۲۰۰۰ افزایش می‌یابد. نتایج شبیه‌سازی تأیید می‌کند که روش نیم‌رخی کاراتر از برآوردگر OLS است.

تعداد وقفه‌ها نیز عامل کلیدی در عملکرد پیش‌بینی است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که U-MIDAS در سناریوهای با j^{max} بزرگ و T کوچک، عملکرد ضعیف‌تری نسبت به روش نیم‌رخی دارد. در حالت $T = ۵۰$، $j^{max} = ۱۲$ و $\theta = ۲$، MSE روش نیم‌رخی ۰.۹۸۹ است، در حالی که MSE روش U-MIDAS برابر ۱.۳۲۲ است (افزایش ۲۶%).

مقایسه تعداد عملیات محاسباتی مورد نیاز (FLOPS) نشان می‌دهد که روش پروفایلی به طور ملموسی ساده‌تر و سریع‌تر از U-MIDAS است. با رشد اندازه نمونه و تعداد وقفه‌ها، اختلاف بار محاسباتی میان دو روش افزایش می‌یابد. این مزیت محاسباتی، پروفایلی را برای

کاربردهای عملی با حجم داده بزرگ و یا مدل‌های با وقفه زیاد، گزینه‌ای ایده‌آل‌تر می‌سازد.

بحث و نتیجه‌گیری

شبیه‌سازی‌های انجام‌شده نشان داد که روش نیم‌رخی در تمامی سناریوها از نظر اریبی کمتر، قدرت پیش‌بینی بالاتر و کارایی محاسباتی برتری دارد. اگرچه U-MIDAS ممکن است درون نمونه R^2 بالاتری ارائه کند اما مشکل بیش‌برازش و افزایش MSE خارج نمونه را دارد. بنابراین، برای کاربردهای عملی MIDAS، به ویژه در موارد نیازمند پیش‌بینی دقیق و صرفه‌جویی محاسباتی، روش نیم‌رخی توصیه می‌گردد.

مراجع

Andreou, E., Ghysels, E., Kourtellos, A., (2010). Regression models with mixed sampling frequencies. *Journal of Econometrics* 158(2), 246–261.

Armesto, M.T., Engemann, K.M., Owyang, M.T., (2010). Forecasting with mixed frequencies. *Federal Reserve Bank of St. Louis Review* 92(6), 521–536.

Clements, M.P., Galvão, A.B., (2009). Forecasting US output growth using leading indicators: An appraisal using MIDAS models. *Journal of Applied Econometrics* 24(7), 1187–1206.

Foroni, C., Marcellino, M., Schumacher, C., (2015).Unrestricted mixed data sampling (MIDAS): MIDAS regressions with unrestricted lag polynomials. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A* 178(1), 57–82.

Ghysels, E., Santa-Clara, P., Valkanov, R., (2004). The MIDAS touch: Mixed data sampling regression models. *UNC Working Paper*.

Ghysels, E., Santa-Clara, P., Valkanov, R., (2006a). Predicting volatility: Getting the most out of return data sampled at different frequencies. *Journal of Econometrics* 131(1-2), 59–95.

Ghysels, E., Qian, H., Sargent, T.J., (2011). MIDAS regressions with MIDAS shocks. *UNC Working Paper*.

Murphy, S.A., van der Vaart, A.W., (2000). On profile likelihood. *Journal of the American Statistical Association* 95(450), 449–465.

Patefield, W.M., (1977). On the maximized likelihood function. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B* 39(1), 92–96.

The main title of the paper

First Author Name[1], **Second Author Name**[2]

[1]First Author Affiliation

[2]Second Author Affiliation

Abstract: The body of the abstract.

Keywords: Most important keywords of article (3-5 items) should appear here.

Mathematics Subject Classification (2020): xxAxx, xxBxx, xxCxx.
