پانزدهمین سمینار احتمال و فرآیندهای تصادفی
۸ و ۹ شهریور ۱۴۰۴
دانشگاه کردستان

15th Seminar On Probability and Stochastic Processes
August 30-31, 2025
University of Kurdistan

انجمن آمار ایران

مقایسه روش‌های کلاسیک و بیزی در برآورد پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت برای توزیع گمپرتز تعمیم‌یافته یکه

اعظم کاراندیش مروستی [۱]، احسان ارمز[۲]، مریم بصیرت[۳]

[۱]گروه ریاضی و آمار، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

[۲]گروه ریاضی و آمار، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

[۳]گروه ریاضی و آمار، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

چکیده: در این مقاله، برآورد پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت $R = P(Y < X)$ مورد بررسی قرار گرفته است؛ حالتی که در آن X (مقاومت) و Y (تنش) متغییرهای تصادفی مستقلی هستند که از توزیع گمپرتز تعمیم‌یافته یکه (UGG) پیروی می‌کنند. به‌منظور برآورد پارامتر R، از سه رویکرد اصلی شامل روش ماکسیمم درستنمایی (MLE)، روش خودگردان (Bootstrap)، و روش بیزی (Bayesian) با بهره‌گیری از الگوریتم‌های گیبز و متروپلیس-هستینگس استفاده شد. مطالعه حاضر علاوه‌بر شبیه‌سازی داده‌ها، از داده‌های واقعی بارندگی دو منطقه اقلیمی ایران (یاسوج و ساری) طی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۲ بهره برد تا اعتبار برآوردها در شرایط واقعی سنجیده شود. نتایج نشان داد که روش بیزی، به‌ویژه با در نظر گرفتن وزن‌دهی متفاوت داده‌ها (نسبت‌های $m = ۰/۳$ و $n = ۰/۷$)، عملکرد پایدارتر و فاصله‌های اعتباری دقیق‌تری نسبت به سایر روش‌ها ارائه می‌دهد. همچنین روش خودگردان توانست در داده‌های محدود، پوشش مناسبی برای برآورد R فراهم کند، اگرچه میانگین برآورد آن نسبت به MLE پایین‌تر بود. در مجموع، برآوردگرهای بیزی در شرایط داده‌های نامتقارن یا کوچک، دقت بالاتری نشان دادند، که این امر در مقایسه با مطالعات پیشین نیز تأیید می‌شود. یافته‌های تحقیق نشان می‌دهند که ترکیب توزیع‌های انعطاف‌پذیر مانند گمپرتز تعمیم‌یافته یکه با رویکردهای بیزی می‌تواند چارچوب قابل اعتمادتری برای تحلیل قابلیت اطمینان سامانه‌ها در حوزه‌های مهندسی و اقلیم‌شناسی فراهم آورد.

واژه‌های کلیدی: توزیع گمپرتز تعمیم‌یافته یکه، تنش-مقاومت، ماکسیمم درستنمایی ، روش بیزی.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62Mxx

---

[۱] سخنران، azam.karandish@iau.ac.ir

۱ مقدمه

توزیع های آماری مهم ترین ابزار در مدل بندی داده های واقعی هستند. با توجه به رشد روز افزون آمار در تمامی زمینه‌های علمی، معرفی توزیع های جدید با انعطاف بیشتر به منظور تبیین و تفسیر بهتر پدیده ها، یک ضرورت انکار ناپذیر است. در دهه های اخیر تلاش های زیادی برای تحقق این موضوع انجام شده است. بیشتر روش هایی که قبل ازسال ۱۹۸۰ میلادی برای ساخت توزیع ها استفاده شده است مبتنی بر معادلات دیفرانسیل بود که به پیدایش دستگاه پیرسنی و معادلات بور انجامید. بسیاری از توزیع های کلاسیک در این قالب می گنجد. بعد از سال ۱۹۸۰ میلادی تا ۲۰۱۴ میلادی بیشتر روش ها مبتنی بر افزودن پارامترها به توزیع های کلاسیک به منظور افزایش انعطاف پذیری، انجام شده است. امروزه استفاده از تجهیزات اندازه گیری مدرن مانند حسگرها در چندین شاخه از علوم کاربردی ازجمله قابلیت اطمینان، مهندسی کیفیت و علوم زیست پزشکی و اجتماعی به سرعت در حال رشد است. این موضوع منجر به ایجاد مجموعه داده‌های جدید با رفتارهای مختلف در چولگی و کشیدگی می شود که نمی توانند به خوبی توسط توزیع های آماری کلاسیک مانند توزیع های نرمال و وایبول توصیف شوند. بر این اساس، خواسته های جدیدی برای توسعه توزیع های انعطاف پذیرتر برای پوشش این پدیده ها به وجود آمده است. در بیشتر موقعیت ها، توزیع های جدید با گسترش توزیع های شناخته شده موجود ساخته می شوند. یکی از توزیع های معروف در قابلیت اطمینان، زیست شناسی و کهولت شناسی توزیع گمپرتز است که گمپرتز (۱۸۲۵) آن را معرفی کرد. ویلکنز (۲۰۰۱) نشان داد که توزیع گمپرتز روابط دقیق یا حدی با توزیع هایی مانند وایبول، لوژستیک تعمیم یافته، نمایی، نمایی دوگانه و گامبل دارد. قابلیت اعتماد تنش-مقاومت که به‌صورت $R = P(Y < X)$ تعریف می‌شود، یکی از معیارهای مهم در تحلیل قابلیت سامانه‌هاست. در این مقاله، دو متغیر تصادفی X و Y به‌ترتیب معرف مقاومت و تنش هستند و فرض می‌شود که هر دو از توزیع گمپرتز تعمیم‌یافته یکه (UGG) تبعیت می‌کنند. تابع چگالی احتمال این توزیع در رابطه (۱.۱) ارائه شده است:

$$f(x) = \theta\lambda x^{-(c+1)} e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}[1 - e^{-\frac{\lambda}{c}(x^{-c}-1)}]^{\theta-1}; \qquad 0 < x < 1,\ \theta > 0,\ \lambda > 0, c > 0 \qquad (۱.۱)$$

لذا مقدار تحلیلی R به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$R = P(Y < X) = \int_0^1 P(Y < X | X = x) f_X(x) dx = \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}. \qquad (۲.۱)$$

بنابراین قابلیت اعتماد تنش-مقاومت فقط تابعی از θ_1 و θ_2 است، که صرفاً به پارامترهای شکل توزیع وابسته است.

۲ روش‌های برآورد

۱.۲ روش ماکسیمم درستنمایی (MLE)

تابع لگاریتم درستنمایی داده‌ها از معادله (۱.۲) استخراج شده است:

$$
\begin{aligned}
l(\theta_1,\theta_2,\lambda,c) &= \log L(\theta_1,\theta_2,\lambda,c)\\
&= m\log(\theta_1)+n\log(\theta_2)+(m+n)\log\lambda-(c+1)\left[\sum_{i=1}^{m}\log x_i+\sum_{i=1}^{n}\log y_i\right]\\
&\quad-\frac{\lambda}{c}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i^{-c}-1)+\sum_{i=1}^{n}(y_i^{-c}-1)\right]+(\theta_1-1)\sum_{i=1}^{m}\log\left(1-e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-1)}\right)\\
&\quad+(\theta_2-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-e^{-\frac{\lambda}{c}(y_i^{-c}-1)}\right). \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

با محاسبه مشتق‌های جزئی نسبت به پارامترها، معادلات به‌دست‌آمده برای θ_1، θ_2، λ و c حل می‌شوند و سپس مقدار $\hat{R}$ از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$
\frac{\partial}{\partial\theta_1}l(\theta_1,\theta_2,\lambda,c)=\frac{m}{\theta_1}+\sum_{i=1}^{m}\ln\big(C(x_i)\big), \qquad (2.2)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\theta_2}l(\theta_1,\theta_2,\lambda,c)=\frac{n}{\theta_2}+\sum_{i=1}^{n}\ln\big(C(y_i)\big), \qquad (3.2)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}l(\theta_1,\theta_2,\lambda,c) &= \frac{m+n}{\lambda}-\Big(\sum_{i=1}^{m}A(x_i)+\sum_{i=1}^{n}A(y_i)\Big)\\
&\quad+(\theta_1-1)\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{A(x_i)e^{-\lambda A(x_i)}}{C(x_i)}\Big)+(\theta_2-1)\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{A(y_i)e^{-\lambda A(y_i)}}{C(y_i)}\Big), \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial c}l(\theta_1,\theta_2,\lambda,c) &= -\Big(\sum_{i=1}^{m}\ln(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\ln(y_i)\Big)\\
&\quad+\frac{\lambda}{c}\Big(\sum_{i=1}^{m}\big(A(x_i)-B(x_i)\big)+\sum_{i=1}^{n}\big(A(y_i)-B(y_i)\big)\Big)\\
&\quad-(\theta_1-1)\frac{\lambda}{c}\sum_{i=1}^{m}\frac{A(x_i)+B(x_i)}{C(x_i)}e^{-\lambda A(x_i)}\\
&\quad-(\theta_2-1)\frac{\lambda}{c}\sum_{i=1}^{n}\frac{A(y_i)+B(y_i)}{C(y_i)}e^{-\lambda A(y_i)}, \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

که در آن $A(x_i)=(x_i^{-(c)}-1)/c$، $B(x_i)=x_i^{-c}\ln(x_i)$ و $C(x_i)=1-e^{-\lambda A(x_i)}$ تعریف شده‌اند. بنابراین برآوردهای ماکسیمم درستنمایی $\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$، $\hat{\lambda}$ و $\hat{c}$ را با قرار دادن مشتق جزئی برابر با صفر و حل همزمان این معادلات می‌توان محاسبه کرد. از این معادلات بلافاصله نتیجه می‌شود که برآوردگر ماکسیمم درستنمایی θ_1 و θ_2 به صورت زیر است:

$$
\hat{\theta}_1=-\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\ln\left(1-e^{-\frac{\hat{\lambda}}{\hat{c}}(x_i^{-\hat{c}}-1)}\right)},
$$

$$
\hat{\theta}_2=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-e^{-\frac{\hat{\lambda}}{\hat{c}}(y_i^{-\hat{c}}-1)}\right)}.
$$

شایان ذکر است که برآوردهای λ و c را می‌توان به صورت عددی بدست آورد. با استفاده از ویژگی پایایی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، داریم:

$$\hat{R} = \frac{\hat{\theta}_۲}{\hat{\theta}_۱ + \hat{\theta}_۲}.$$

۲.۲ روش خودگردان (Bootstrap)

دو نوع فاصله اطمینان به روش خودگردان بررسی شد: فاصله اطمینان خودگردان پایه و فاصله اطمینان خودگردان صدکی

فاصله‌های اطمینان خودگردان پایه

یک فاصله‌ی اطمینان خودگردان پایه $۱۰۰(۱-\gamma)٪$ برای R به‌صورت زیر می باشد.

$$\left(۲\hat{R} - \hat{R}^*_{((B+۱)(۱-\frac{\gamma}{۲}))}, ۲\hat{R} - \hat{R}^*_{((B+۱)(\frac{\gamma}{۲}))}\right) \tag{۶.۲}$$

که در آن $\hat{R}$، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی برای R است و $\hat{R}^*_{((B+۱)\eta)}$، $(B+۱)\eta$-امین مقدار مرتب شده از برآوردهای خودگردان $\{\hat{R}^*_s, s = ۱, ۲, \ldots, B\}$ است.

فاصله‌های اطمینان خودگردان صدکی

یک فاصله‌ی اطمینان خودگردان صدکی $۱۰۰(۱-\gamma)٪$ برای R به‌صورت زیر است.

$$\left(\hat{R}^*_{((B+۱)(\frac{\gamma}{۲}))}, \hat{R}^*_{((B+۱)(۱-\frac{\gamma}{۲}))}\right). \tag{۷.۲}$$

۳.۲ روش بیزی

با فرض توزیع‌های پیشین گاما برای پارامترها، توزیع پسین پارامترها طبق روابط زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned}
\pi(\theta_۱, \theta_۲, \lambda, c|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) =& \frac{L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\theta_۱, \theta_۲, \lambda, c)\pi(\theta_۱, \theta_۲, \lambda, c)}{\int_{\theta_۱}\int_{\theta_۲}\int_{\lambda}\int_{c} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\theta_۱, \theta_۲, \lambda, c)\pi(\theta_۱)\pi(\theta_۲)\pi(\lambda)\pi(c)dcd\lambda d\theta_۲ d\theta_۱} \\
&\propto L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\theta_۱, \theta_۲, \lambda, c)\pi(\theta_۱)\pi(\theta_۲)\pi(\lambda)\pi(c) \\
&\propto \left(\prod_{i=۱}^{m} x_i\right)^{-(c+۱)} e^{-\frac{\lambda}{c}\sum_{i=۱}^{m}(x_i^{-c}-۱)} \times \prod_{i=۱}^{m}\left(۱ - e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-۱)}\right)^{\theta_۱-۱} \\
&\times \left(\prod_{i=۱}^{n} y_i\right)^{-(c+۱)} e^{-\frac{\lambda}{c}\sum_{i=۱}^{n}(y_i^{-c}-۱)} \times \prod_{i=۱}^{n}\left(۱ - e^{-\frac{\lambda}{c}(y_i^{-c}-۱)}\right)^{\theta_۲-۱} \\
&\times \theta_۱^{m+a_۱-۱} e^{-\theta_۱ b_۱} \times \theta_۲^{n+a_۲-۱} e^{-\theta_۲ b_۲} \times \lambda^{m+n+d-۱} e^{-\lambda e} \times c^{f-۱} e^{-cg}
\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

توابع چگالی پسین θ_1، θ_2، λ و c عبارتند از:

$$\pi(\theta_1|\lambda,c,\boldsymbol{x}) \propto \theta_1^{m+a_1-1}e^{-\theta_1 b_1}\prod_{i=1}^{m}\left[1-e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-1)}\right]^{\theta_1-1}, \tag{۹.۲}$$

$$\pi(\theta_2|\lambda,c,\boldsymbol{y}) \propto \theta_2^{n+a_2-1}e^{-\theta_2 b_2}\prod_{i=1}^{n}\left[1-e^{-\frac{\lambda}{c}(y_i^{-c}-1)}\right]^{\theta_2-1}, \tag{۱۰.۲}$$

$$\begin{aligned}\pi(\lambda|\theta_1,\theta_2,c,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \propto & e^{-\frac{\lambda}{c}[\sum_{i=1}^{m}(x_i^{-c}-1)+\sum_{i=1}^{n}(y_i^{-c}-1)]}\lambda^{m+n+d-1}e^{-\lambda e}\\ & \times\prod_{i=1}^{m}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-1)}\right)^{\theta_1-1}\prod_{i=1}^{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{c}(y_i^{-c}-1)}\right)^{\theta_2-1},\end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

$$\begin{aligned}\pi(c|\lambda,\theta_1,\theta_2,c,\underline{x},\underline{y}) \propto & \left(\prod_{i=1}^{m}x_i\prod_{i=1}^{n}y_i\right)^{-(c+1)} e^{-\frac{\lambda}{c}[\sum_{i=1}^{m}(x_i^{-c}-1)+\sum_{i=1}^{n}(y_i^{-c}-1)]}\\ & e^{-cg}c^{f-1}\prod_{i=1}^{m}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{c}(x_i^{-c}-1)}\right)^{\theta_1-1}\prod_{i=1}^{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{c}(y_i^{-c}-1)}\right)^{\theta_2-1}.\end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

از الگوریتم گیبز و متروپلیس-هستینگس برای نمونه‌گیری از توزیع‌های پسین استفاده شد و برآورد بیزی R بر اساس تابع زیان مربعات میانگین و برای تابع زیان لینکس به صورت زیر محاسبه گردید.

تابع زیان مربع خطا باشد، برآورد R عبارت است از:

$$\hat{R}_{BS} = \frac{1}{B-M}\sum_{i=M+1}^{N}R^{(i)}. \tag{۱۳.۲}$$

تابع زیان لینکس باشد برابر است با

$$\hat{R}_{BL} = -\frac{1}{\phi}\log\left(\frac{1}{B-M}\sum_{i=1+M}^{N}e^{-\phi R^{(i)}}\right) \tag{۱۴.۲}$$

که در آن M دوره سوخت (یعنی تعداد تکرارها قبل از رسیدن به توزیع مانا) است.

۳ تحلیل شبیه‌سازی

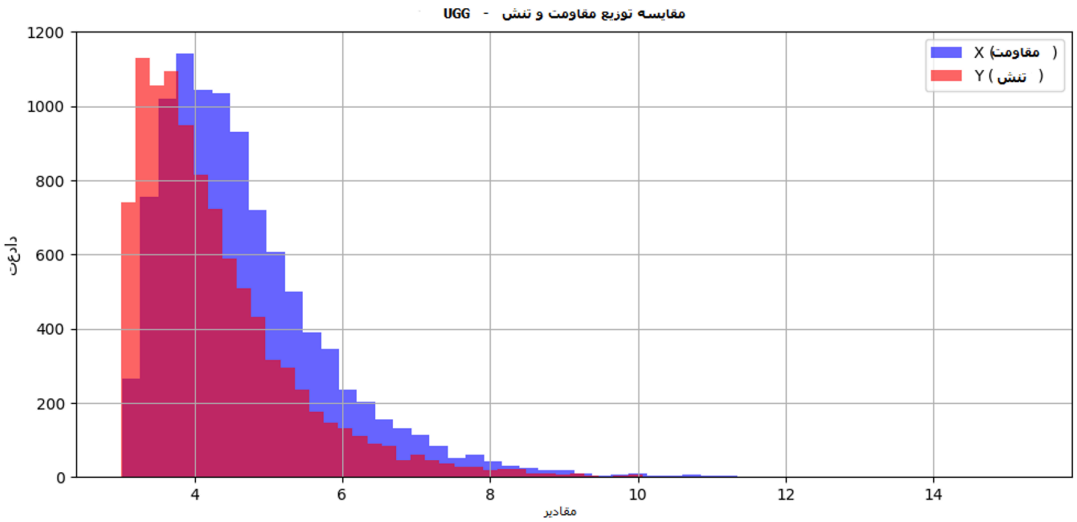
با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده برای مقادیر مختلف θ_1 و θ_2، مقادیر مختلفی از R تولید و با روش‌های بیان شده در بخش دوم برآورد شدند. با استفاده از برنامه پایتون تعداد ۱۰ هزار عدد تصادفی با توزیع گمپرتز تعمیم‌یافته یکه تولید و متناسب با داده های مذکور مقدار قابلیت اعتماد برآورد شده است. نمودار مقایسه‌ای توزیع مشاهدات در مقاومت و تنش در نمودار زیر برای داده های شبیه سازی شده ارائه شده است.

[3.30319089 7.22465874 4.22629466 ⋯ 5.07209453 4.12413327 5.08443974]

****

[3.09437717 6.70403606 4.73184832 ⋯ 3.53950902 3.54016689 5.01289552]

برآورد $R = P(Y < X)$: ۰/۶۲۳۸



شکل ۱: مقایسه توزیع تنش–مقاومت در داده های شبیه سازی شده

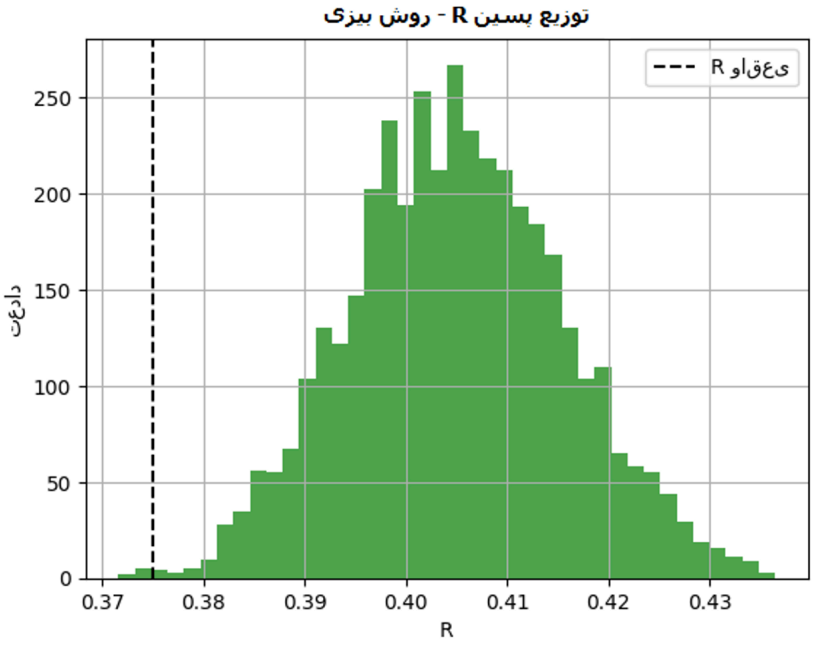
[MLE] براورد $\theta_1 : 8/696,\ \theta_2 : 5/914 \rightarrow \mathrm{R} : 0/4048$

[Bootstrap] $\mathrm{R} : 0/6348\ (95\,\%\ \mathrm{CI} : 0/6060 - 0/6650)$

[Bayesian] R (posterior mean): $0/4050$

R (linex): $0/7011$

%۹۵ credible interval: $(0/3850, 0/4263)$



شکل ۲: برآورد پارامتر تنش–مقاومت به روش ماکسیمم درستمایی، خودگردان و بیزی در داده های شبیه سازی شده

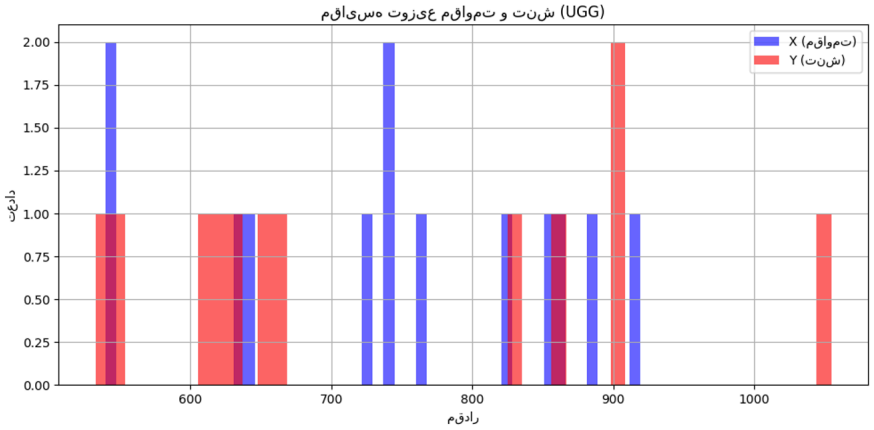
البته متناسب با پژوهش کاراندیش مروستی و همکاران (۲۰۲۴) می‌توان نتایج بارندگی دو استان کهگیلویه و بویراحمد (یاسوج) و

مازندران (ساری) را از سال ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۲ با یکدیگر مقایسه و به ترتیب به عنوان تنش–مقاومت در نظر گرفت.

جدول ۱: بارندگی استان‌های کهگیلویه و بویراحمد (یاسوج) و مازندران (ساری) در سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۴۰۲

	سال ۱۳۹۰	سال ۱۳۹۱	سال ۱۳۹۲	سال ۱۳۹۳	سال ۱۳۹۴	سال ۱۳۹۵	سال ۱۳۹۶	سال ۱۳۹۷	سال ۱۳۹۸	سال ۱۳۹۹	سال ۱۴۰۰	سال ۱۴۰۱	سال ۱۴۰۲
ساری	۹۱۹	۸۵۵	۷۴۱	۶۴۱	۷۲۵	۴٫۸۲۴	۹٫۵۳۹	۹٫۸۸۷	۷٫۸۶۱	۶۳۱	۴٫۷۴۴	۲٫۵۴۵	۴٫۷۶۶
یاسوج	۶۶۱	۸۲۶	۶۴۸	۶۲۴	۶۱۱	۵٫۵۳۲	۲٫۳۵۶	۷٫۱۰۵۴	۲٫۸۶۵	۲٫۹۰۷	۹٫۶۳۱	۹٫۹۰۱	۹٫۵۴۴

هر چند هر یک از استان ها در برخی از سال ها نسبت به دیگری برتری داشته است؛ برای داده‌های فوق مقدار R به عنوان تنش–مقاومت یک می‌شود.



شکل ۳: مقایسه توزیع تنش–مقاومت در داده‌های واقعی شهرهای یاسوج و ساری

مهم‌ترین نتایج در جداول فوق عبارتنداز:

- افزایش حجم نمونه موجب کاهش خطای میانگین مربعات (MSE) می‌شود.
- روش بیزی با تابع زیان لینکس کمترین اریبی و خطا را ارائه داد.
- روش صدکی خودگردان و روش گیبز، فاصله‌های اطمینان پوشاننده دقیق‌تری نسبت به MLE فراهم کردند.

تفاوت برآوردهای R در روش کلاسیک و بیزی نمایانگر حساسیت روش‌ها به انتخاب پیشین‌ها و نوع داده‌هاست. نتایج حاصل از روش‌های مختلف در ادامه به صورت خلاصه شده است.

بحث و نتیجه‌گیری

نتایج این مطالعه نشان داد که در برآورد پارامتر قابلیت اعتماد تنش–مقاومت $R = p(Y < X)$، عملکرد روش‌های مختلف به‌طور معناداری به ساختار داده‌ها و روش مورد استفاده بستگی دارد. در داده‌های واقعی مورد بررسی، روش ماکسیمم درستنمایی (MLE) مقدار بالاتری از R (حدود ۰٫۶۳۶) را نسبت به روش‌های خودگردان و بیزی ارائه داد، که می‌تواند ناشی از تأکید این روش بر ساختار

جدول ۲: نتایج برآورد برای داده های واقعی

روش	برآورد θ_1 (یاسوج)	برآورد θ_2 (ساری)	مقدار تحلیلی R
روش MLE	۱/۶۴	۱/۳۱	۰/۶۳۶
روش خودگردان	میانگین R	۰/۴۸۷	
	برآورد فاصله اطمینان ۹۵%	(۰/۳۴۶, ۰/۶۱۵)	
روش بیزی	میانگین پسین R (MSE)	۰/۷۰۰۸	
	تابع زیان لینکس ($a = ۲$)	۰/۷۰۰۸	
	برآورد فاصله اطمینان ۹۵%	(۰/۶۹۴, ۰/۷۰۶)	

مدل و نادیده‌گیری پراکندگی‌های جزئی در داده‌های محدود باشد. در مقابل، روش خودگردان (Bootstrap) مقدار میانگین پایین‌تری برای R (حدود ۰/۴۸۷) با فاصله اطمینان گسترده‌تری ارائه کرد، که نشان‌دهنده‌ی حساسیت این روش به پراکندگی‌های نمونه‌ای و قدرت پوشش خوب آن برای داده‌های کوچک است. روش بیزی (Bayesian) با استفاده از توزیع‌های پیشین نمایی ساده و الگوریتم متروپلیس، برآوردی میانی (۰/۷۰۰۸) با فاصله اعتباری متوازن ارائه داد که با نتایج مطالعات مشابه مانند تاراج و کوتز (۲۰۰۷) [1] و ویو و همکاران (۲۰۱۴)[2] در شرایط داده‌های کوچک و ناهمگن هم‌راستاست. این یافته‌ها بر اهمیت انعطاف‌پذیری روش‌های بیزی به‌ویژه در شرایطی با حجم داده محدود یا توزیع‌های نامتقارن تأکید می‌کند. به‌کارگیری توزیع‌های پیشین مناسب، به‌ویژه پیشین‌های آگاهانه یا بر اساس دانش زمینه‌ای، موجب کاهش اریبی و افزایش دقت برآورد می‌شود. همچنین، تطابق نتایج این تحقیق با مطالعاتی نظیر احمدی و زارعی (۲۰۲۰) و کاراندیش مروستی و همکاران (۲۰۲۴) که عملکرد روش‌های بیزی را در تحلیل قابلیت اعتماد برای توزیع‌های تعمیم‌یافته تأیید می‌کنند، بر اعتبار یافته‌های حاضر می‌افزاید.

مراجع

Ahmadi, J., and Zarei, H. (2020), Bayesian inference for the stress-strength reliability parameter based on generalized distributions. *Journal of Statistical Research of Iran (JSRI)*, **17(1)**, 45–62.

Chen, M. H., and Shao, Q. M. (1999), Monte Carlo estimation of bayesian credible and HPD intervals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8(1)**, 69–92.

Davison, A. C.,and D. V. Hinkley. (1997), Bootstrap methodsandtheirapplication. *California: Cambridge University Press*.

Downton F. (1973), The estimation of $Pr(Y < X)$ in the normal case. *Technometrics*, **15 (3)**, 551–8. doi: 10.1080/00401706.1973.10489081.

[1] Nadarajah & Kotz

[2] Wu et al.

Harris. (1970), The estimation of reliability from stress-strength relationships. *Technometrics*, **12 (1)**, 49–54. doi: 10.1080/00401706.1970.10488633.

Gompertz, B. (1825), On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Esq. FRS & c. Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **115**, 513–583. In a letter to Francis Baily, 1825.

Jha, M. K., S. Dey, and Y. M.Tripathi. (2020), Reliability estimation in a multicomponent stress-strength basedonunit-Gompertzdistribution. *International Journal of Quality & Reliability Management*, **37 (3)**, 428–50. doi: 10.1108/IJQRM-04-2019-0136.

Karandish Marvasti, A., E. Ormoz, and M. Basirat. (2022), Unit generalized Gompertz distribution and its application. *Andishe Ye Amari*, **53 (1)**, 81-92. (In Persian).

Karandish Marvasti, A., E. Ormoz, and M. Basirat. (2024), Estimation of stress-strength reliability based on unit generalized Gompertz distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. Doi: 10.1080/03610926.2024.2428988.

Nadarajah, S., and Kotz, S. (2007), Reliability modeling using the generalized Gompertz distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **56(4)**, 570–575.

Willekens, F. (2001), Gompertz in context: the Gompertz and related distributions. *In Forecasting Mortality in Developed Countries, European studies of population*, ed.E.Tabeau,A.vandenBerg Jeths, C. Heathcote, vol. 9, 105–26. Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/0-306-47562-6-5.

Wu, J., Zhang, Z., and Zheng, G. (2014), Bayesian estimation of stress-strength reliability using progressive type-II censored data from the generalized distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, **71**, 128–139.

Comparison of Classical and Bayesian Methods in Estimation of Stress-Strength Reliability Parameter for the Unit Generalized Gompertz Distribution

Azam Karandishmarvasti[1], **Ehsan Ormoz**[2], **Maryam Basirat**[3]

[1]Department of Mathematics and statiistics, Ma.C., Islamic Azad University, Mashhad, Iran

[2]Department of Mathematics and statiistics, Ma.C., Islamic Azad University, Mashhad, Iran

[3]Department of Mathematics and statiistics, Ma.C., Islamic Azad University, Mashhad, Iran

---

Abstract: In this paper, the estimation of the stress-resistance reliability parameter $R = P(Y < X)$ is investigated; A case where (X resistance) and (Y tension) are independent random variables that follow the unit generalized Gompertz (UGG) distribution. In order to estimate the parameter R, three main approaches were used, including the maximum likelihood method (MLE), the bootstrap method, and the Bayesian method using the Gibbs and Metropolis-Hastings algorithms. In addition to data simulation, the present study used real rainfall data from two climatic regions of Iran (Yasuj and Sari) during the years 2011 to 2023 to measure the validity of the estimates in real conditions. The results showed that the Bayesian method, especially considering different data weighting (ratio $m = 0.3$ and $n = 0.7$), provides more stable performance and more accurate confidence intervals than other methods. The bootstrap method was also able to provide adequate coverage for estimating R in limited data. Although its average estimate was lower than that of MLE. Overall, Bayesian estimators showed higher accuracy in conditions of asymmetric or small data, which is also confirmed by comparison with previous studies. The research findings indicate that combining flexible distributions such as the generalized Gompertz unit with Bayesian approaches can provide a more reliable framework for analyzing the reliability of systems in the fields of engineering and climatology.

Keywords: Unit generalized Gompertz distribution; stress-strength; maximum likelihood estimation; bayesestimation.

Mathematics Subject Classification (2020): 62Mxx.
