پانزدهمین سمینار احتمال
و فرآیندهای تصادفی
۸ و ۹ شهریور ۱۴۰۴
دانشگاه کردستان

15th Seminar On Probability and Stochastic Processes
August 30-31, 2025
University of Kurdistan

انجمن آمار ایران

برآورد معیار $CoVaR$ بر اساس رویکرد $Copula - GARCH$ و توزیع GED

فاطمه علیزاده [۱] ، **غلامرضا محتشمی برزادران** [۲] ، **محمد امینی** [۳]

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: ریسک یکی از مفاهیم پایه ای در بازارهای مالی می‌باشد و اندازه گیری و تحلیل آن بسیار اهمیت دارد. در این مقاله یکی از مهم ترین روش های اندازه گیری ریسک یعنی ارزش در معرض خطر شرطی را در حالت دو متغیره با استفاده از دو سری زمانی بازدهی مطالعه می‌کنیم در ادامه ساختار وابستگی این بازدهی‌ها را بر اساس تابع مفصل مورد بررسی قرار داده و در سری زمانی برای پیش بینی واریانس از مدل‌های گارچ با توزیع حاشیه‌ای GED استفاده می‌کنیم و در پایان روش مورد نظر در داده واقعی به کار گرفته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ریسک سیستمی، ارزش در معرض خطرشرطی، مدل گارچ، تابع مفصل، توزیع GED .

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62P05، 62M10، 62H05، 91B84.

---

۱ مقدمه

با گذشت زمان به دلیل گسترش حوادث نامطلوب مختلف در جهان که بخشی از آن از افزایش فعالیت‌های اقتصادی، اجتماعی، سیاسی و ... نشئت می‌گیرد، نااطمینانی درباره آینده بیشتر شده است. ریسک یکی از مفاهیم پایه‌ای در بازار های مالی است که تعریف واحدی از آن وجود ندارد. اقتصاددانان، دانشمندان علوم رفتاری، نظریه پردازان ریسک و آمارشناسان هر یک تصور خاصی از ریسک دارند، البته به طور سنتی ریسک به عنوان عدم اطمینان تعریف شده است و بر اساس این مفهوم، در این‌جا ریسک به عنوان عدم اطمینان مرتبط با وقوع یک خسارت و یا زیان تعریف می‌شود.

در سال‌های اخیر با بررسی علل نوسانات مالی مشخص می‌شود که عوامل مختلفی در ایجاد نوسانات در بازارهای مالی (بیمه‌ها، بانک‌ها و ...) مؤثر بوده‌اند از جمله بحران نفتی سال ۱۹۷۳، بحران‌های مالی سال‌های ۱۹۹۷-۱۹۹۸ در جنوب شرق آسیا و رویدادهای طبیعی نظیر زلزله و سونامی. بروز چنین حوادثی و به تبع آن نوسانات بازارهای مالی موجب ایجاد اختلال در فعالیت‌های سازمان‌های مالی، تجاری و حتی تولیدی می‌شود. از این رو اندازه گیری و ارزیابی ریسک اهمیت پیدا می‌کند و از جمله مهم ترین کاربردهای آن

[۱] فاطمه علیزاده، fateme.alizade301073@gmail.com

می‌توان به قیمت‌گذاری سهام‌ها، تعیین حق بیمه متناسب با ریسک و تعیین سرمایه اقتصادی [۱] شرکت که پشتوانه‌ی فعالیت‌های مالی است و خسارت‌های ناگهانی بالاتر از حد انتظار را پوشش می‌دهد، اشاره کرد.

تاکنون روش‌های متعددی برای اندازه‌گیری ریسک معرفی شده است که هر یک از این روش‌ها مزایا و معایب خاص خود را دارد. یکی از مهم ترین معیارهای اندازه گیری ریسک ارزش در معرض خطر [۲] است. این شیوه اندازه گیری را ابتدا تیل گلدیمن [۳] در سال ۱۹۸۰ ارائه کرد و در اواخر دهه ۱۹۸۰ توسط موسسه جی-پی مورگان [۴] گسترش یافت. این شاخص حداکثر زیان ممکن را در یک افق زمانی مشخص با توجه به یک سطح احتمال معین α بیان می‌کند و با نماد VaR_α نشان داده می‌شود، به عنوان مثال ارزش در معرض خطر با سطح احتمال ۵٪ برای یک بازه زمانی یک روزه گویای اینست که حداکثر زیان تحمیلی طی روز بعدی با احتمال ۵ درصد از مقدار ارزش در معرض خطر بالاتر می‌رود. این معیار را می‌توان با استفاده از سری بازدهی محاسبه کرد. فرض کنید $\{p_t\}$ سری زمانی بهای نوعی دارایی مالی باشد، بازدهی در زمان t ام به صورت $X_t = log(p_t) - log(p_{t-1})$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱. *اگر $\{X_t\}$ یک سری بازدهی با تابع توزیع F_{X_t} باشد، آنگاه*

$$VaR_\alpha(X_t) = F^{-1}_{X_t}(\alpha) = inf\{x; F_{X_t}(x) \geq \alpha\} \ ; \ \alpha \in (0, 1).$$

برای برآورد ارزش در معرض خطر رویکردهای مختلف پارامتری، ناپارامتری و نیمه پارامتری مختلفی ارائه شده است. در روش پارامتری بر اساس توزیع بازدهی ارزش در معرض خطر براورد می‌شود، برای مثال وقتی که توزیع بازدهی نرمال و یا استودنت باشد داریم: اگر $\{X_t\}$ سری بازدهی باشد به طوری‌که $X_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ ، به راحتی نتیجه می‌شود که

$$VaR_\alpha(X_t) = \mu_t + z_\alpha \sigma_t, \tag{۱.۱}$$

و اگر $\frac{X_t - \mu_t}{\sigma_t}$ دارای توزیع استودنت با درجه آزادی ν باشد، آنگاه:

$$VaR_\alpha(X_t) = \mu_t + t_{(\alpha),\nu} \sigma_t, \tag{۲.۱}$$

که در آن z_α چندک α ام توزیع نرمال استاندارد و $\phi(.)$ تابع چگالی نرمال استاندارد، $x_{(\alpha),\nu}$ چندک α ام و $f_\nu(.)$ تابع چگالی توزیع تی-استودنت با درجه آزادی ν می‌باشد.

در صورتی که واریانس شرطی (σ_t) در طی زمان ثابت نباشد، برای براورد آن می‌توان از مدل های میانگین متحرک وزنی نمایی $(EWMA)$ و خانواده $GARCH$ استفاده کرد که در زیربخش بعدی به معرفی آن ها می‌پردازیم.

۱.۱ مدل بندی تغییر پذیری

مدل بندی تغییرپذیری که اغلب به صورت واریانس تعریف میشود برای پیش بینی نوسانات آینده یکی از مباحث مهم در مطالعات مالی می‌باشد. اغلب مشاهده می‌شود که بازدهی روزانه سهام بعد از یک دوره تغییرات شدید بها، واریانس شرطی بزرگتری نسبت به یک دوره نسبتا پایدار دارند. مدل‌های $ARCH$ و $GARCH$ [۵] برای فرایند واریانس شرطی که با آن بتوانیم تغییر پذیری مقادیر آینده را بر

[1] Economic Capital
[2] Value at Risk
[3] Till Guldimann
[4] J.P. Morgan
[5] Generalized Auto regressive Conditional Heteroscedasticity

اساس داده های جاری و گذشته پیشگویی کنیم، در مدل ARCH(q) فرض می‌شود که سری بازدهی $\{X_t\}$ به صورت

$$X_t = \mu + a_t \ , \ \ a_t = \sigma^{۲}_{t|t-۱}\varepsilon_t, \tag{۳.۱}$$

$$\sigma^{۲}_{t|t-۱} = \omega + \alpha_۱ a^{۲}_{t-۱} + \alpha_۲ a^{۲}_{t-۲} ... + \alpha_q a^{۲}_{t-q}. \tag{۴.۱}$$

تولید می‌شود که در آن پارامترهای α_i و ω مجهولند، $\{\varepsilon_t\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس واحد است و ε_t برای $j = ۱, ۲, ...$ مستقل از a_{t-j} است.

رویکردی دیگر که توسط (۳) و (۷) پیشنهاد شده، علاوه بر q تاخیر از توان دوم بازدهی، p تاخیر از واریانس شرطی را هم وارد مدل می‌کند. یعنی،

$$\sigma^{۲}_{t|t-۱} = \omega + \alpha_۱ a^{۲}_{t-۱} + ... + \alpha_q a^{۲}_{t-q} + \beta_۱ \sigma^{۲}_{t-۱|t-۲} + ... + \beta_p \sigma^{۲}_{t-p|t-p-۱}. \tag{۵.۱}$$

رویدادهایی که در نهادهای مالی رخ می‌دهد ممکن است برسیستم مالی سایر نهادها و یا حتی بر کل سیستم اقتصاد اثر بگذارد در این صورت نمی‌توان تاثیر متقابل بین ریسک‌ها را نادیده گرفت به همین دلیل از زمان شروع بحران‌های مالی و اقتصادی در سال ۲۰۰۷ ریسک سیستمی [۶] یعنی ریسکی که بحران در یک نهاد، بر سایر نهادها یا کل سیستم مالی تاثیر می‌گذارد مطرح شد. یکی از روش‌های اندازه گیری ریسک سیستمی، ارزش در معرض خطر شرطی [۷] است که اولین بار توسط آدرین و برونرمیر (۲۰۱۱) [۸] معرفی شد و پس از آن جیراردی و ارگان (۲۰۱۳) [۹] تعریف دیگری از آن ارایه دادند. این معیار ارزش در معرض خطر یک سازمان با بازدهی Y را در صورتی که سازمانی دیگر با بازدهی X در بحران قرار داشته باشد بدین معنی که بازدهی آن حداکثر برابر ارزش در معرض خطرش در سطح احتمال α باشد، در سطح احتمال β را محاسبه می‌کند، یعنی

$$CoVaR_{۱-\alpha,۱-\beta}(Y|X) = VaR_{۱-\beta}(Y \mid X \leq VaR_{۱-\alpha}(X)); \ \alpha, \beta \in (۰, ۱), \tag{۶.۱}$$

که به آن ارزش در معرض خطر شرطی $(CoVaR)$ گویند.

۲.۱ تابع مفصل

در سال های اخیراستفاده از توابع مفصل [۱۰] به عنوان ابزاری مفید برای مدل سازی ساختار وابستگی بین دو یا چند متغیر گسترش یافته است و کاربرد بسیاری در علوم بیمه و اقتصاد دارد. مفصل ها توابعی هستند که بین توابع توزیع چند متغیره و توزیع حاشیه ای آن ها ارتباط برقرار می‌کنند. از طرفی مفصل خود تابع توزیعی است که توزیع حاشیه ای آن از توزیع یکنواخت استاندارد پیروی می‌کند.

قضیه ۲.۱ که با نام قضیه اسکلار ((۶)) معروف است رابطه بین توزیع‌های حاشیه ای، تابع مفصل و توزیع توام دو متغیر تصادفی وابسته را بیان می‌کند.

[6] Systemic Risk
[7] Conditional Value-at-risk
[8] Adrin and Brunnermeier
[9] Girardi and Ergun
[10] Copula Function

قضیه ۲.۱. *اگر (X,Y) یک بردار تصادفی با تابع توزیع توام $F(.,.)$ وتوابع توزیع حاشیه ای F_X و F_Y باشند آنگاه مفصل $C : I^۲ \longrightarrow I$ وجود دارد به طوریکه:*

$$F(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \ ; \ \forall x,y \in R.$$

اگر F_X و F_Y پیوسته باشد آنگاه C یکتاست در غیر این صورت به صورت یکتا روی $Range\, F_X \times Range\, F_Y$ تعیین می شود و با داشتن توزیع های حاشیه‌ای و توام برای یافتن مفصل متناظر قرار می‌دهیم: $u = F_X(x)$ ، $v = F_Y(y)$ و داریم :

$$C(u,v) = F(F_X^{-۱}(u), F_Y^{-۱}(v)) \ ; \ \forall u,v \in [۰,۱].$$

خانواده‌ای از مفصل‌ها به نام مفصل‌های ارشمیدسی، وجود دارند که با استفاده از یک تابع به نام تابع مولد $\phi : [۰,۱] \to [۰,\infty)$ که در آن $\phi(۱) = ۰$ و $\phi(۰) = \infty$ می‌باشد به شکل زیر ساخته می‌شوند:

$$C(u,v) = \phi^{-۱}(\phi(u) + \phi(v)) \qquad (۷.۱)$$

۲ ارزش در معرض خطر شرطی

ماینیک و اسکنیگ (۲۰۱۴) برای دو متغیر بازدهی X و Y با توابع توزیع حاشیه‌ای $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ ساختار وابستگی تابع مفصل $C(u,v)$ و توزیع توأم $F(x,y)$ ارزش در معرض خطر شرطی به ازای هر $\alpha,\beta \in [۰,۱]$ به شرح زیر به دست آوردند:

$$CoVaR_{۱-\alpha,۱-\beta}(Y_t \mid X_t) = {F_{Y_t}}^{-۱}(F^{-۱}_{V|U\leq\alpha}(\beta)) = VaR_{F^{-۱}_{V|U\leq\alpha}(\beta)}(Y_t) \qquad (۱.۲)$$

که در آن (U,V) دارای توزیع توأم $C(u,v)$ با توابع توزیع حاشیه‌ای یکنواخت استاندارد می‌باشند و

$$F_{V|U\leq\alpha}(v) = \frac{C(\alpha,v)}{\alpha}. \qquad (۲.۲)$$

علاوه بر این برناردی (۲۰۱۷) نشان داد با در نظر گرفتن $w^* = F^{-۱}_{V|U\leq\alpha}(\beta)$ ، و استفاده از (۲.۲) ، w^* از طریق حل معادله زیر به دست می‌آید:

$$C(\alpha,w^*) = \alpha\beta. \qquad (۳.۲)$$

سپس w^* را در مفصل‌های کران‌های فرچت، مارشال اولکین، FGM و مفصل های ارشمیدسی فرانک، کلیتون و گامبل محاسبه کرده است.

حال در حالت خاص اگر $C(u,v)$ یک مفصل ارشمیدسی با تابع مولد $\varphi(t)$ باشد با محاسبات جبری ساده داریم:

$$w^* = \varphi^{-۱}(\varphi(\alpha\beta) - \varphi(\alpha)), \qquad (۴.۲)$$

در نتیجه

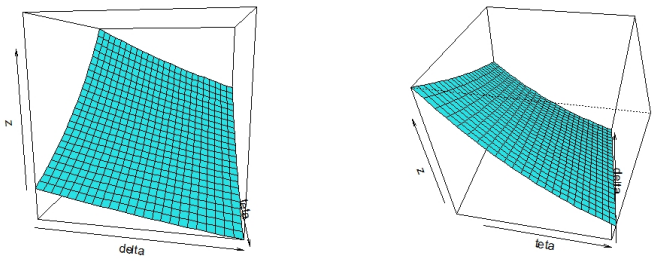
$$CoVaR_{۱-\alpha,۱-\beta}(Y_t \mid X_t) = VaR_{w^*}(Y_t). \qquad (۵.۲)$$

:

حال اگر X و Y دارای ساختار وابستگی مفصل $BB۱$ با تابع مولد $\varphi(t)=(t^{-\theta}-۱)^{\delta}$ باشد، آنگاه معکوس تابع مولد به صورت $\varphi^{-۱}(s)=(s^{\frac{۱}{\delta}}+۱)^{-\frac{۱}{\theta}}$ و با استفاده از رابطه (۴.۲) داریم:

$$w^{*}=[((\alpha\beta)^{-\theta}-۱)^{\delta}-(\alpha^{-\theta}-۱)^{\delta})^{\frac{۱}{\delta}}+۱]^{-\frac{۱}{\theta}} \tag{۶.۲}$$

در شکل ۱ تغییرات w^{*} براساس تغییرات θ و δ برای $\alpha=\beta=۰/۵$ رسم شده است که در آن مشاهده می‌شود w^{*} با ثابت نگاه داشتن یکی از پارامترهای θ و δ نسبت به پارامتر دیگر نزولی می‌باشد و از آنجایی که معکوس تابع توزیع تابعی صعودی نسبت به سطح احتمال (w^{*}) است از این رو با افزایش هر یک از مقادیر θ و δ مقدار $CoVaR$ کاهش پیدا می‌کند. اکنون فرض کنید سری زمانی



شکل ۱: نمودار w^{*} براساس تغییرات θ و δ مفصل$BB۱$

بازدهی به صورت $Y_t=\mu_t+\sigma_{t|t-۱}\varepsilon_t$ باشد. ابتدا مناسب‌ترین مدل سری زمانی بازدهی Y_t را به دست آورده، پارامترهای مدل سری زمانی، پارامتر توزیع خطای تعمیم یافته و میانگین (μ_t) و انحراف معیار ($\sigma_{t|t-۱}$) زمان آتی را برآورد کرده و برای براورد ارزش در معرض خطر شرطی در سطح احتمال w^{*} که به روش زیر بدست می‌آید عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&P(Y_t<CoVaR)=P(\mu+\sigma_{t|t-۱}\varepsilon_t<CoVaR))=w^{*}\Rightarrow\\
&P(\varepsilon_t<\frac{CoVaR-\mu}{\sigma_{t|t-۱}})=w^{*}\Rightarrow\\
&CoVaR=\mu+\sigma_{t|t-۱}F^{-۱}_{\varepsilon_t}(w^{*}).
\end{aligned}$$

که در آن وقتی خطاها از توزیع GED تبعیت کنند تابع چگالی آن به صورت $f_{\varepsilon t}(x)=\frac{\beta}{۲\Gamma(\frac{۱}{\beta})}e^{-|x|^{\beta}}$ است. برای $w^{*}<\frac{۱}{۲}$ با تغییر متغیرهای $y=(-x)^{\beta}$ و $z=x^{\beta}$ داریم:

$$F_{\varepsilon_t}(\eta)=\frac{\beta}{۲\Gamma(\frac{۱}{\beta})}(\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{\beta}y^{\frac{۱}{\beta}-۱}e^{-y}dy+\int_{۰}^{\eta^{\beta}}\frac{۱}{\beta}z^{\frac{۱}{\beta}-۱}e^{-z}dz),$$

و با تعاریف تابع گاما و گامای ناقص پایینی می‌توان نوشت:

$$F_{\varepsilon_t}(\eta)=\frac{۱}{۲\Gamma(\frac{۱}{\beta})}(۲\Gamma(\frac{۱}{\beta})-\Gamma(\frac{۱}{\beta},\eta^{\beta})). \tag{۷.۲}$$

و $CoVaR$ از طریق حل معادله زیر بدست می‌آید.

$$۱ - \frac{\Gamma(\frac{۱}{\beta}, CoVaR^{\beta})}{۲\Gamma(\frac{۱}{\beta})} = w^*. \quad (۸.۲)$$

و برای $w^* > \frac{۱}{۲}$ با استفاده از رابطه

$$F_{\varepsilon_t}(\eta) = \frac{\Gamma(\frac{۱}{\beta}, (-\eta)^{\beta}))}{۲\Gamma(\frac{۱}{\beta})}. \quad (۹.۲)$$

از طریق حل معادله

$$\frac{\Gamma(\frac{۱}{\beta}, (-CoVaR)^{\beta})}{۲\Gamma(\frac{۱}{\beta})} = w^*, \quad (۱۰.۲)$$

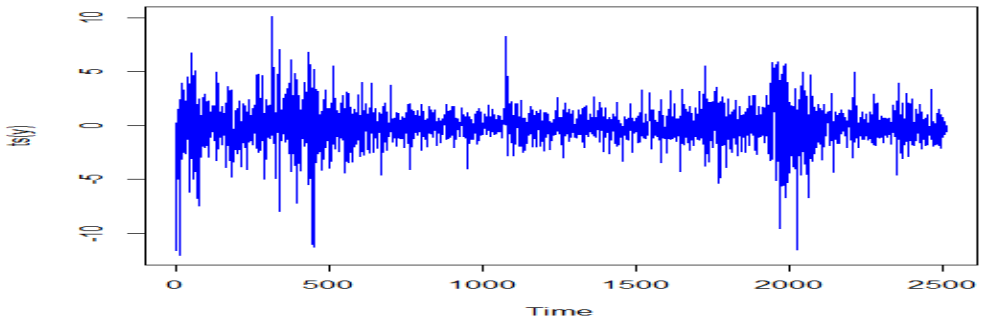
برای حل این معادلات نیازمند روش‌های عددی می‌باشیم.

۳ کاربرد در داده واقعی

در این بخش داده‌های بازدهی ماهانه شرکت‌های IBM و SP از سال ۲۰۲۱ تا ۲۰۲۴ مورد بررسی قرار گرفته است.

ابتدا برای محاسبه مقدار ساختار وابستگی بین بازدهی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با مقایسه تاو کندال، وابستگی دمی بالا، پایین و معیارهای AIC و BIC توابع مفصل مختلف برازش داده شده مفصل $BB۱$ مفصل مناسبی برای بیان ساختار وابستگی می‌باشد، پی-مقدار آزمون نیکویی برازش کرامر ون مایسز و کولموگروف اسمیرنوف بیشتر از پنج صدم بنابراین فرض مناسب بودن مفصل $BB۱$ را رد نمی‌کنیم.

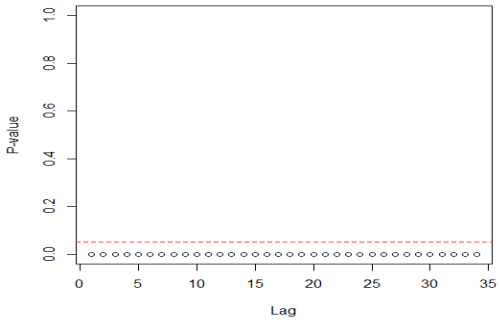
برآورد پارامترهای این مفصل به روش ماکزیمم درستنمایی $\theta = ۵/۷۶$ و $\delta = ۰/۳۲$ بدست آمد بنابراین مقدار w^* برای $\alpha = \beta =$ ۰/۹۵ بر اساس رابطه ۶.۲ تقریبا ۰/۹۲۸ محاسبه شد .



شکل ۲: زیان روزانه سهام IBM

شکل ۲ از سری بازدهی IBM نشان می‌دهد که در برخی از دوره ها بسیار ناپایدار شدند به عبارت دیگر واریانس شرطی سری زمانی در طی زمان تغییر می‌کند، به همین منظور در ادامه به بررسی مدل‌های آرچ و گارچ می‌پردازیم.

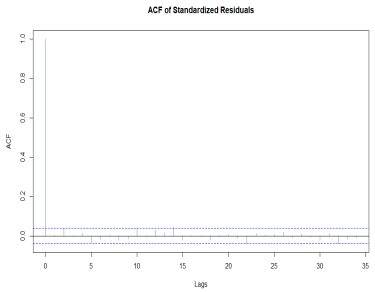
در مورد داده های بازدهی سهام IBM برای بررسی وجود اثرهای ARCH با رسم پی-مقدارهای آزمون مک‌لیود-لی در شکل ۳ مشاهده می‌شود که همگی در سطح ۵ درصد معنادارند و به طور رسمی شواهدی قوی به نفع ARCH در داده ها را نشان می‌دهد.



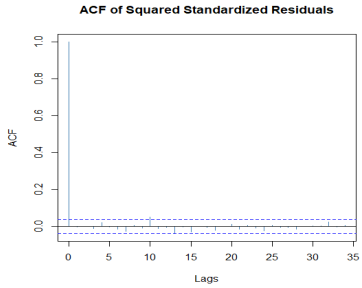
شکل ۳: پی-مقدارهای آزمون مک‌لیود-لی برای زیان روزانه سهام IBM

با بررسی سری توان دوم و قدرمطلق داده های زیان سهام IBM ، نمودارهای خودهمبستگی (acf)، خودهمبستگی جزیی (pacf)، و خصوصا خودهمبستگی گسترده (eacf) یک مدل)ARMA۱،۱) را گزارش می‌کند، بنابراین می‌توان یک مدل)GARCH۱،۱) را برای داده های اصلی در نظر گرفت.

اگرچه نشانه ای از یک مدل)GARCH۲،۲) نیز وجود دارد، بنابراین با استفاده از روش های مشخص سازی مثل AIC و BIC مدل)GARCH۱،۱) را انتخاب می‌کنیم. پیش از آن که مدل برازانده شده ای را بپذیریم کار اساسی این است که وارسی کنیم آیا مدل به درستی مشخص شده یا نه. اگر مدل به درستی مشخص شده باشد مانده های استاندارد شده یک سری نوفه سفیدند. در این مورد در نمودارهای ACF و PACF مانده های استانداردشده و توان دومشان هیچ کدام از مقادیر خارج از بازه نیستند که این پیشنهاد می‌کند سری باقی مانده ها نوفه سفید است، علاوه بر این نتایج آزمون های کلی نگر هم حاکی از مدل نوفه سفید برای باقیمانده های استاندارد شده است. برای باقی‌مانده ها توزیع های خطای تعمیم یافته، نرمال و استودنت مورد بررسی قرار گرفت که توزیع خطای تعیم یافته با مقایسه معیارهای AIC و MSE عملکرد بهتری داشت.



پس از برآورد ضرایب مدل سری زمانی مقدار $CoVaR$ شرکت IBM در صورت بحران در شرکت SP و محاسبه مقدار w^* برای $\alpha = \beta =$ ۰٫۹۵ که بر اساس رابطه ۶.۲ تقریبا ۰٫۹۲۸ محاسبه شد بر اساس مدل سری زمانی $GARCH(1,1)$ و توزیع حاشیه‌ای GED با پارامتر ۳٫۱۷۴ مقدار $CoVaR$ برابر با ۲٫۶۴۱ بدست آمد.



۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله یکی از روش‌های مهم بررسی ریسک سیستمی یعنی ارزش در معرض خطر شرطی بر اساس تابع مفصل ارشمیدسی $BB۱$ و مدل‌های سری زمانی گارچ در صورتی که ماندههای آن از توزیع GED پیروی کند، مورد مطالعه قرار گرفت و در پایان این معیار برای شرکت IMB در صورتی که شرکت SP در شرایط بحرانی قرار گیرد محاسبه شد که در آن توابع مفصل مختلف برای بررسی ساختار وابستگی بازدهی مدل‌های سری زمانی گارچ برای پیش بینی نوسان روز آینده شرکت IMBبررسی شد، نتایج حاکی از آن بود که مفصل $BB۱$ و سری زمانی $-GARCH(۱,۱)$ بهترین مدل‌بندی را ارایه می‌دهند.

مراجع

[1] Adrian, T., Brunnermeier, M.K., (2016). CoVaR, *Amer. Econ. Rev.*, **106**, 1705–1741.

[2] Bernardi, M., Durante, F., Jaworski, P., (2017). CoVaR of families of copulas. *Statist.Probab. Lett.* **120**, 8–17.

[3] Bolersllev, T. (1986). Generalized Autoregressiv conditional heteroscedasticity, *Econometrics*, **31**, 307-327.

[4] Girardi, G., Ergün, A.T., (2013). Systemic risk measurement: multivariate GARCH estimation of Co-VaR. *J. Bank. Finance*•, **37**, 3169–3180.

[5] Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*, vol. 139. Springer Science & Business Media.

[6] Sklar A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ Inst Statist Univ Paris*. **8**, 229-231.

[7] Taylor, S.J. (1986). *Modeling Financial Time Series*. Chichester: John wiley Sons.

Estimating CoVaR Based on Copula-GARCG method and GED Distribution

Fatemeh Alizadeh[1], **Gholam Reza Mohtashami Borzadaran**[2], **Mohammad Amini** [3]

Department of Statistics, Ferdowsi Univercity of Mashhad

Abstract: Risk is one of the basic concepts in financial markets and its measurement and analysis is very important. In this article, we study one of the most important methods of measuring risk, namely conditional value at risk, in the bivariate case using two time series of returns. Next, we examine the dependence structure of these returns based on the detailed function and use GARCH models with marginal distributions (GED) in the time series to predict the variance. Finally, the method is applied to real data.

Keywords: Sistemic Risk,Conditional Value at Risk, GARCH Model, Copula Function.GED Distribution

Mathematics Subject Classification (2020): 62P05, 62M10, 62H05, 91B84.
