پانزدهمین سمینار احتمال و فرآیندهای تصادفی
۸ و ۹ شهریور ۱۴۰۴
دانشگاه کردستان

15th Seminar On Probability and Stochastic Processes
August 30-31, 2025
University of Kurdistan

انجمن آمار ایران

برآوردی انقباضی بر اساس برآورد E-بیز

حسن اسفندیاری‌فر[۱]، شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی [۲]

[۱]گروه ریاضی، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران

[۲]گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده: وقتی درباره پارامتر نامعلوم یک توزیع، اطلاعاتی به صورت یک مقدار حدسی در دسترس باشد، آنگاه برآورد انقباضی پارامتر نامعلوم را می‌توان تعریف کرد. در این مقاله برآورد E-بیز انقباضی پارامتر توزیع رایلی معکوس تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به دست آورده می‌شود و با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی، با بهترین برآورد نااریب با کمترین واریانس پارامتر توزریع رایلی معکوس به کمک معیار کارایی نسبی، مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع رایلی معکوس، برآورد E-بیز انقباضی، بهترین برآورد نااریب با کمترین واریانس، تابع زیان آنتروپی عمومی.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62E15، 62G05، 62F15.

---

۱ مقدمه

در بسیاری از موقعیت‌های کاربردی، محقق اطلاعات پیشینی درباره پارامتر مجهول به صورت یک مقدار حدسی دارد. با توجه به این مقدار حدسی، برآوردگرهایی موسوم به برآوردگرهای انقباضی تولید می‌شود که توسط تامپسون (۱۹۶۸) به صورت

$$T = k\hat{\theta} + (1-k)\theta_0, \quad 0 < k < 1, \tag{1.1}$$

معرفی شد که در آن θ_0 مقدار حدسی θ و $\hat{\theta}$ هر برآوردگر معمول θ است و k نیز ضریب انقباضی نام دارد و محقق با توجه به عقیده‌اش نسبت به مقدار حدسی θ_0 تعیین می‌کند. در این مقاله k طوری تعیین می‌شود تا مخاطره برآوردگر داده شده در (۱.۱) مینیمم گردد. مقادیر k نزدیک به یک، نشان‌دهنده گرایش برآوردگر به نمونه و مقادیر k نزدیک به صفر، نشان‌دهنده گرایش برآوردگر به مقدار حدسی است. برآوردهای انقباضی در زمینه‌های مختلف علم مانند برآورد میانگین زمان بقا در مطالعات اپیمولوژیک، برآورد در مطالعات نقشه‌برداری،

[۲] سخنران، Yagoubzade@pnu.ac.ir

پیش‌بینی سرمایه و برآورد نرخ‌های مرگ و میر کاربرد دارد. چندین نویسنده از برآوردهای انقباضی در نظریه برآوردها استفاده کردند. برآورد بیزی و برآورد بیزی انقباضی پارامتر شکل توزیع پارتو تحت تابع زیان آنتروپی توسط پراکاش (۲۰۰۹) به دست آورده شد. ال-همیاری و ال-دباگ (۲۰۱۲) خانواده ای از برآوردگرهای انقباضی را برای پارامتر شکل توزیع وایبول به دست آوردند. سلمان و شریف (۲۰۱۴) آزمون اولیه برآورد بیزی انقباضی پارامتر مقیاس توزیع نمایی را تحت تابع زیان درجه دوم به دست آوردند.

یکی از روش‌های برآورد بیز مبتنی بر توزیع‌های پیشین و اعمال شریطی خاص روی ابر پارامترهای آن، روش E-بیز است که توسط هان (۱۹۷۷) معرفی شد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطای برآوردگر پسین بیزی می‌شود، که روش برآورد E-بیز نقش مهمی در کاهش این خطا دارد.

در این مقاله برآورد E-بیز پارامتر توزیع رایلی معکوس به دست آورده شده و سپس بر اساس آن و به کمک رابطه (۱.۱) برآورد انقباضی تعیین می‌شود که در این مقاله برآورد E-بیز انقباضی نامیده می‌شود. توزیع رایلی معکوس یکی از مهم‌ترین توزیع‌هایی است که در نظریه قابلیت اعتماد و آزمون‌های مربوط به طول عمر کاربرد دارد. در این مقاله، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع رایلی معکوس با پارامتر θ به ترتیب به صورت‌های

$$f(x;\theta)=\frac{۲\theta}{x^{۳}}e^{-\frac{\theta}{x^{۲}}},\quad x>۰,\theta>۰, \tag{۲.۱}$$

$$F(x;\theta)=e^{-\frac{\theta}{x^{۲}}},\quad x>۰,\theta>۰. \tag{۳.۱}$$

در نظر گرفته می‌شود.

تابع زیانی به نام تابع زیان آنتروپی عمومی به صورت

$$L(\hat{\theta},\theta)\propto(\frac{\hat{\theta}}{\theta})^{p}-p\ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta})-۱,\quad p\neq۰. \tag{۴.۱}$$

توسط کالابریا و پولسینی (۱۹۹۶) معرفی شد و برآورد بیز پارامتر θ به شرط داده‌ها را تحت این تابع زیان به صورت

$$\hat{\theta}_{GB}=[E(\theta^{-p}|data)]^{-\frac{۱}{p}} \tag{۵.۱}$$

به دست آوردند.

۲ برآورد انقباضی

در این بخش ابتدا برآورد E-بیز (هان (۱۹۷۷)) تعریف و سپس برآورد E-بیز پارامتر توزیع رایلی معکوس به دست آورده می‌شود.

تعریف ۱.۲. *فرض کنید b ابر پارامتر در توزیع پیشین θ و $\pi(b)$ توزیع پیشین b و برآورد بیز θ، $\hat{\theta}_B(b)$ باشند، آنگاه برآورد E-بیز θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می‌شود و در حقیقت امید ریاضی برآورد بیز θ است به صورت*

$$\hat{\theta}_{EB}=E_{\pi(b)}(\hat{\theta}_B(b))=\int_{\Lambda}\hat{\theta}_B(b)\pi(b)db,\quad b\in\Lambda,$$

به دست می‌آید.

فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۱.۱) و θ دارای توزیع پیشین به صورت

$$\pi(\theta|a,b)=\frac{b^{a}}{\Gamma(a)}\theta^{a-۱}e^{-b\theta},\quad \theta>۰,a>۰,b>۰ \tag{۱.۲}$$

هست. برای محاسبه برآورد E-بیز، a و b طوری در نظر گرفته می‌شوند که $\pi(\theta|a,b)$ نسبت به θ کاهشی باشد. پس با توجه به رابطه

$$\frac{d\pi(\theta|a,b)}{d\theta} = \frac{b^a\theta^{a-۲}e^{b\theta}}{\Gamma(a)}((a-۱)-b\theta)$$

باید $b>۰$ و $۰<a\leq ۱$ باشد. برگر (۱۹۸۵) نشان داد که بزرگ بودن b باعث کاهش کارایی برآورد بیز θ می‌شود. بنابر این ابر پارامتر b باید از بالا کراندار شده و به صورت $۰<b<c$ که c عددی ثابت است، در نظر گرفته شود. هان (۲۰۱۱) نشان داد که مناسب‌ترین توزیع پیشین b، توزیع یکنواخت است. بنابر این در این مقاله توزیع پیشین b یعنی $\pi(b)$، توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(۰,c)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به شرط $۰<a\leq ۱$ و با در نظر گرفتن $a=۱$، رابطه (۱.۲) به صورت

$$\pi(\theta|b) = be^{-b\theta}, \quad b>۰, \theta>۰. \tag{۲.۲}$$

تبدیل می‌شود. به کمک رابطه (۲.۲) و تابع درستنمایی

$$L(\theta) = (۲\theta)^n(\prod_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i^۳})e^{-\theta\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i^۲}} \tag{۳.۲}$$

توزیع پسین θ به صورت توزیع گاما با پارامترهای $\alpha=n+۱$ و $\beta=b+y$ به دست می‌آید، در نتیجه به کمک رابطه (۱.۲) برآورد بیز θ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به صورت

$$\hat{\theta}_{GB}(b) = (\frac{\Gamma(n+۱-p)}{\Gamma(n+۱)})^{-\frac{۱}{p}}(b+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{X_i^۲})^{-۱} \tag{۴.۲}$$

به دست آورده می‌شود، که تابع ریسک آن به صورت

$$R_{\hat{\theta}_{GB}(b)}(\theta) = \begin{cases} \frac{n}{\Gamma(n+۱-p)(b\theta)^p}\sum_{j=۰}^{\infty}(p)_j\frac{\Gamma(n+j)}{(b\theta)^j}+pI-۱, & b>\sum_{j=۱}^{n}\frac{۱}{X_i^۲}, \\ \frac{n}{\Gamma(n+۱-p)(\theta)^{۲p}}\sum_{j=۰}^{\infty}(p)_j\Gamma(n+p-j)(b\theta)^j+pI-۱, & b<\sum_{j=۱}^{n}\frac{۱}{X_j^۲} \end{cases}$$

محاسبه می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned} I &= (\frac{\Gamma(n+۱-p)}{\Gamma(n+۱)})^{-\frac{۱}{p}}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\int_{۰}^{\infty}(\frac{b+y}{\theta})y^{n-۱}e^{-\theta y}dy \\ (p)_j &= \frac{(-۱)^j p(p+۱)\cdots(p+j-۱)}{j!} \end{aligned}$$

هستند. با استفاده از تعریف ۱.۲ و رابطه (۴.۲) و با فرض $Y=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{X_i^۲}$، برآورد E-بیز پارامتر θ به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{EB} &= \frac{۱}{c}(\frac{\Gamma(n+۱)}{\Gamma(n+۱-p)})^{\frac{۱}{p}}\int_{۰}^{c}\frac{db}{b+y} \\ &= \frac{۱}{c}(\frac{\Gamma(n+۱)}{\Gamma(n+۱-p)})^{\frac{۱}{p}}\ln(\frac{c+y}{y}), \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

به دست آورده می‌شود. با توجه به روابط (۱.۱) و (۵.۲)، برآورد E-بیز انقباضی پارامتر θ به صورت

$$\begin{aligned} T &= k\hat{\theta}_{GB}+(۱-k)\theta_{۰} \\ &= \frac{k}{c}(\frac{\Gamma(n+۱)}{\Gamma(n+۱-p)})^{\frac{۱}{p}}\ln(\frac{c+y}{y})+(۱-k)\theta_{۰}, \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

به دست آورده می‌شود. از طرفی با توجه به توزیع Y که توزیع $\Gamma(n,\theta)$ است، تابع چگالی احتمال $V=\ln(\frac{c+Y}{Y})$ به صورت

$$g_V(v)=\frac{(c\theta)^n}{\Gamma(n)}\frac{e^v}{(e^v-1)^{n+1}}e^{-\frac{c\theta}{e^v-1}},\quad v>0,$$

به دست می‌آید، در نتیجه تابع ریسک برآوردگر E-بیز انقباضی θ یعنی T برابر است با

$$\begin{aligned}R_T(\theta) &= \frac{1}{\theta^p}\int_0^\infty [mk\ln(1+v)+(1-k)\theta_0]^p g(v)dv\\ &- p\int_0^\infty \ln[mk\ln(1+v)+(1-k)\theta_0]g(v)dv+p\ln\theta-1,\end{aligned}$$

که در آن $m=\frac{1}{c}(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-p)})^{\frac{1}{p}}$. اکنون k طوری تعیین می‌شود، که $R_T(\theta)$ مینیمم شود و با نماد k_{min} نشان داده می‌شود. بنابر این از $\frac{dR_T(\theta)}{dk}=0$ داریم:

$$\int_0^\infty (m\ln(1+v)-\theta_0)[U(k)^{p-1}-\frac{\theta^p}{U(k)}]g(v)dv=0, \tag{۷.۲}$$

که در آن $U(k)=mk\ln(1+v)+(1-k)\theta_0$ است. با فرض $\delta=\theta-\theta_0$، از رابطه (۷.۲) داریم:

$$k_{min}=\frac{\delta}{m\ln(1+v)-\theta_0},\quad \ln(1+v)>\frac{\theta_0}{m},\quad \ln(1+v)>\frac{\delta+\theta_0}{m}$$

با جایگذاری k_{min} در رابطه (۶.۲) برآورد E-بیز انقباضی پارامتر θ به دست می‌آید.

همچنین برآورد $UMVU$ پارمتر θ، $T^*=\frac{n-1}{Y}$ به دست آورده می‌شود. با توجه به توزیع Y یعنی توزیع $\Gamma(n,\theta)$، تابع ریسک T^* به صورت

$$\begin{aligned}R_{T^*}(\theta) &= \frac{(n-1)^p\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)}+p\Psi(n)\\ &+ p\ln(\frac{\theta}{n-1})-1\end{aligned}$$

به دست آورده می‌شود، که $\Psi(.)$ تابع دی‌گاما است

۳ تحلیل داده‌ها

در این بخش برآوردهای E-بیز انقباضی و T^* با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی، به کمک کارایی نسبی برآورد E-بیز پارامتر θ یعنی T نسبت به برآورد T^* که به صورت

$$RE(T,T^*)=\frac{R_{T^*}(\theta)}{R_T(\theta)} \tag{۱.۳}$$

تعریف می‌شود، با هم مقایسه می‌شوند.

در این بخش از یک مجموعه داده‌های واقعی که در پروسچان (۱۹۶۳) گزارش شده و مربوط به زمان‌های خرابی سیستم تهویه هوای هواپیمای بوئینگ ۷۲۰ است، برای تحلیل روش‌های برآورد اشاره شده در بخش ۲ استفاده می‌شود. این مجموعه داده‌ها به صورت ۵۰۲، ۳۸۶، ۳۲۶، ۱۵۳، ۱۷۴، ۷۰، ۵۹، ۵۷، ۴۸، ۲۹، ۲۹، ۲۷، ۲۶، ۲۱ و ۱۲ هستند. به کمک این مجموعه داده‌ها مقادیر T^*، T و $RE(T,T^*)$ به ازای $\delta=1,2,3$، $c=2,3$ و $p=-1/5,2$ به دست آورده شده که در جدول ۱ آمده است. از جدول ۱

نتیجه گرفته می‌شود، که در حالت $p < ۰$ برآورد نااریب با کمترین واریانس از برآورد E-بیز انقباضی و در حالت $p > ۰$ برآورد E-بیز انقباضی از برآورد نااریب با کمترین واریانس بهتر است. همچنین در هر دو حالت $p > ۰$ و $p < ۰$ به ازای c ثابت با افزایش δ، و به ازای δ ثابت با افزایش c، کارایی برآورد E-بیز انقباضی پارامتر θ افزایش می‌یابد.

جدول ۱: مقادیر برآورد T^*، T و RE برای داده‌های مربوط به خرابی سیستم تهویه هوای هواپیما

				برآوردها		
p	c	δ	T^*	T	RE
$-۱/۵$	۲	۱	۸۸۷/۷۵	۹۴۹/۲۱۶	۰/۹۰۴۲۴۱
		۲	۸۸۷/۷۵	۹۴۷/۲۷۱	۰/۹۰۴۴۸۸
		۳	۸۸۷/۷۵	۹۴۵/۳۲۵	۰/۹۰۴۷۳۵
	۳	۱	۸۸۷/۷۵	۹۴۹/۲۲۲	۰/۹۰۴۲۴۰
		۲	۸۸۷/۷۵	۹۴۷/۲۸۳	۰/۹۰۴۴۸۶
		۳	۸۸۷/۷۵	۹۴۵/۳۴۳	۰/۹۰۴۷۳۳
۲	۲	۱	۸۸۷/۷۵	۹۴۹/۲۱۰	۱/۰۹۰۵۹۸
		۲	۸۸۷/۷۵	۹۴۷/۲۵۹	۱/۰۹۰۹۵۱
		۳	۸۸۷/۷۵	۹۴۵/۳۰۷	۱/۰۹۱۳۰۵
	۳	۱	۸۸۷/۷۵	۹۴۹/۲۱۵	۱/۰۹۰۵۹۷
		۲	۸۸۷/۷۵	۹۴۷/۲۶۹	۱/۰۹۰۹۴۹
		۳	۸۸۷/۷۵	۹۴۵/۳۲۳	۱/۰۹۱۳۰۲

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآورد E-بیز انقباضی پارامتر توزیع رایلی معکوس تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به صورت

$$L(\theta, \hat{\theta}) \propto (\frac{\hat{\theta}}{\theta})^p - p\ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) - ۱, \quad p \neq ۰,$$

به دست آمده و با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی با بهترین برآورد نااریب با کمترین واریانس پارامتر توزیع رایلی معکوس مقایسه شد. نتایج تحلیل داده‌ها بیان‌کننده آن است، که به ازای $p < ۰$ برآورد نااریب با کمترین واریانس و به ازای $p > ۰$ برآورد E-بیز انقباضی پارامتر توزیع رایلی معکوس بهتر است.

قدردانی و تشکر

نویسندگان مقاله از مسئولان و داوران محترم سمینار در ارزیابی مقاله قدردانی و تشکر می‌کنند.

مراجع

Al-Hemyari, Z.A. and Al-Dabag, H.A. (2012), A Class of Shrinkage Testimators for the Shape Parameter of the Weibull Lifetime Model, *Pakistan Journal of Statistics and Operational Research*, **8** (2), 167-184.

Berger, J.O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.

Calabria, R. and Pulcini, G. (1996), Point Estimation under Asymmetric Loss Functions for LeftTruncated Exponential Samples, *Communications in Statistics-Theory Methods*, **25** (3), 585-600.

Gharraph, M.K. (1993), Comparison of Estimators of Location Measures of an Inverse Rayleigh Distribution, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **37**, 295-309.

Han, M. (1997), The structure of hierarchical prior distribution and its applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**(3), 31-40.

Han, M. (2011), E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

Prakash, G. (2009), Some Estimators for the Pareto Distribution, *Journal of Scientific Research*, **1** (2), 236,247.

Proschan, F. (1963), Theoretical Explanation of observed Decreasing Failure Rate, *Technometrics*, **5**, 375-383.

Salman, A.N. and Shareef, R.A. (2014), Bayesian Shrinkage Estimator for the Scale Parameter of Exponential Distribution under Improper Prior Distribution, *International Journal of Statistics and Applications*, 4 (3), 135-143.

Thompson, J.R. (1968), Some Shrinkage Techniques for Estimating the Mean, *Journal of American Statistical Association*, **63**, 113-122.

Shrinkage Estimation Based on E-Bayes Estimation

Hassan Esfandyarifar[1], **Shahram Yaghoobzadeh Shahrestani**[2]

[1] Department of mathematics, Imam Ali University, Tehran Iran

[2]Deparment of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran

---

Abstract: When information about an unknown parameter of a distribution is available in the form of a guess, then a Shrinkage estimate of the unknown parameter can be defined. In this paper, a Shrinkage E-Bayes estimate of the parameter of the inverse Rayleigh distribution is obtained under the general entropy loss function and is compared with the best unbiased estimate with the least variance of the parameter of the inverse Rayleigh distribution using a real data set using the relative efficiency criterion.

Keywords: Inverse Rayleigh Distribution, Shrinkage E-Bayesian estimation, General entropy loss function.