

# تشکیل سیاه‌چاله‌های اولیه در مدل تورمی با جمله جنبشی وابسته به میدان برای پتانسیل‌های طبیعی

میلاد ثلبی<sup>1</sup>، کیومرث کرمی<sup>1</sup>  
<sup>1</sup> گروه فیزیک، دانشگاه کردستان، سنندج

## چکیده

قیدهای مشاهداتی اخیر نشان می‌دهد که سیاه‌چاله‌های اولیه‌ای با جرمی از مرتبه  $10^{-13} M_{\odot}$  می‌توانند تمام ماده تاریک موجود در عالم را توجیه کنند. برای تشکیل این نوع از سیاه‌چاله‌های اولیه، ما نیاز داریم که طیف توان اختلالات اولیه تا مرتبه  $O(10^{-2})$  در مقیاس  $k \sim 10^{12} \text{ Mpc}^{-1}$  افزایش پیدا کند. ما در این مقاله، تشکیل سیاه‌چاله‌های اولیه و فراوانی آنها را در چارچوب مدل تورمی با جمله جنبشی وابسته به میدان مطالعه می‌کنیم.

## Primordial black holes formation in the inflationary model with field-dependent kinetic term for natural potentials

M. Solbi<sup>1</sup>, K. Karami<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, University of Kurdistan, Sanandaj

### Abstract

Recent observational constraints indicate that primordial black holes (PBHs) with the mass scale  $\sim 10^{-12} M_{\odot}$  can explain most of dark matter in the Universe. To produce this kind of PBHs, we need an enhance in the primordial scalar curvature perturbations to the order of  $O(10^{-2})$  at the scale  $k \sim 10^{12} \text{ Mpc}^{-1}$ . In this paper, we investigate the production of the primordial black holes (PBHs), and the abundance of the PBHs.

### مقدمه

در کیهان اولیه، اختلالات خمشی اولیه می‌توانند نواحی فراچگال ایجاد کنند. رمبش گرانشی این نواحی در زمان ورود مجدد ساختارها به افق ممکن است باعث تولید سیاه‌چاله‌های اولیه شود [1]. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که دامنه اختلالات خمشی در کوچک مقیاس تا مرتبه  $O(10^{-2})$  افزایش یابد [2]. سیاه‌چاله‌های اولیه به عنوان یکی از گزینه‌های مهم در توجیه ماده تاریک موجود در عالم به شمار می‌آیند [3]. لازم به ذکر است که اگر جرم یک سیاه‌چاله اولیه در بازه  $O(10^{-17}) M_{\odot}$  تا  $O(10^{-12}) M_{\odot}$  باشد، می‌تواند تمام ماده تاریک موجود در کیهان را توجیه کند [4]. در سال‌های اخیر مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده و مکانیزم‌های متفاوتی برای تشکیل این سیاه‌چاله‌ها ارائه شده است [5-7]. ما در این پژوهش، احتمال تشکیل سیاه‌چاله‌های اولیه در مدل تورمی با جمله جنبشی وابسته به میدان را برای پتانسیل طبیعی بررسی کرده ایم. همچنین فراوانی آن‌ها و امواج گرانشی ثانویه تولید شده در زمان شکل‌گیری سیاه‌چاله‌های اولیه را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

### تورم با جمله جنبشی وابسته به میدان

کنش مربوط به این مدل به صورت زیر داده می‌شود [7]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{pl}^2}{2} R + (1 - 2G(\phi))X - V(\phi) \right], \quad (1)$$

که در آن  $X \equiv -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}$  جمله مربوط به انرژی جنبشی می‌باشد. با وردش گرفتن از کنش معادلات فریدمان و معادله حاکم بر تحول میدان اسکالر به صورت زیر بدست می‌آیند [7,8]:

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) - \dot{\phi}^2 G(\phi), \quad (2)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - \dot{\phi}^2 G(\phi) = 0, \quad (3)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{V_{,\phi} - \dot{\phi}^2 G(\phi)}{1 - 2G(\phi)} = 0. \quad (4)$$

در روابط بالا ما جرم کاهش یافته پلانک را برابر با یک ( $M_{pl} = 1/\sqrt{8\pi G} = 1$ ) در نظر گرفته شده است. در فضای فوریه، معادله موخانوف-ساساکی به صورت

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) u_k = 0, \quad (5)$$

داده می‌شود که در آن  $z = \frac{a\dot{\phi}}{H} \sqrt{1 - 2G}$  و  $u_k = z R_{\phi,k}$  می‌باشد [8]. در نتیجه طیف توان اختلالات اسکالر به

صورت  $P_R(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|^2$  بدست می‌آید. علاوه بر این، پارامترهای غلتش آهسته به صورت زیر تعریف می‌شوند [7]

$$\varepsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \varepsilon_2 \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \varepsilon_3 \equiv \frac{G_{,\phi}\dot{\phi}^2}{V_{,\phi}}, \quad (6)$$

و داریم  $| \varepsilon_i | \ll 1$  برای  $i=1, 2, 3$ . تحت شرایط غلتش آهسته، شاخص طیفی اسکالر  $n_s$  و پارامتر نسبت تانسور به اسکالر  $r$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$n_s - 1 = \frac{1}{1 - 2G} \left( 2\eta_v - 6\varepsilon_v + \frac{2G_{,\phi}}{1 - 2G} \sqrt{2\varepsilon_v} \right), r = \frac{16X(1 - 2G)}{H^2} \quad (7)$$

که در آن  $\varepsilon_v \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2$  و  $\eta_v \equiv \frac{V_{,\phi\phi}}{V}$  می‌باشند [7]. مشاهدات اخیر ماهواره پلانک

( $68\% CL, Planck 2018 TT + lowE$ )، مقدار شاخص طیفی اسکالر را برابر با  $n_s = 0.9627 \pm 0.0060$  نشان داده و یک حد بالا برای پارامتر  $r$  به صورت  $r < 0.0654$  محاسبه کرده است [9]. در ادامه این مطالعه، ما معادلات (3) و (4) را به صورت عددی حل کرده تا تحول پارامتر هابل و میدان اسکالر را بدست بیاوریم. سپس با حل عددی معادله موخانوف-ساساکی، مقدار دقیق طیف توان اسکالر را محاسبه می‌کنیم.

### مکانیزم تشکیل سیاهچاله‌های اولیه

یک جمله جنبشی مناسب می‌تواند باعث افزایش اختلالات خمش در کوچک مقیاس شود. همچنین تابع در نظر گرفته شده باید موجب شود که مدل در مقیاس خروج از افق نیز با مشاهدات پلانک همخوانی داشته باشد. برای دستیابی به این اهداف، ما جمله جنبشی  $G(\phi)$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$G(\phi) = g_I(\phi)(1 + g_{II}(\phi)) \quad (8)$$

که در آن  $g_I(\phi) = -\left(\frac{\phi}{M}\right)^\alpha$  و  $g_{II}(\phi) = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{\phi - \phi_c}{c}\right)^2 + 1}}$  می‌باشد [8]. تابع  $g_I(\phi)$  موجب می‌شود تا مدل بتواند با

قیدهای مشاهداتی موجود بر پارامترهای  $n_s$  و  $r$  را همخوانی داشته باشد. لازم به ذکر است که  $M$  یک پارامتر ثابت با بعد جرم است و زمانی که  $M \rightarrow \infty$ ، این مدل به تورم استاندارد بر می‌گردد. عبارت  $g_{II}(\phi)$  مسئول افزایش طیف توان اسکالر در  $\phi = \phi_c$  می‌باشد. پارامترهای  $\alpha$  و  $d$  بدون بعد هستند ولی  $\phi_c$  و  $c$  دارای بعد جرم می‌باشند. همچنین  $d$  و  $c$  به ترتیب بر ارتفاع و عرض طیف توان اسکالر در محل تشکیل قله تاثیر می‌گذارند.

در این پژوهش، ما تشکیل سیاهچاله‌های اولیه را در چارچوب مدل تورمی با جمله جنبشی وابسته به میدان برای پتانسیل طبیعی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. پتانسیل طبیعی با رابطه  $V(\phi) = \lambda^4 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right]$  مشخص

می‌شود. و  $\lambda$  و  $f$  در آن ثابت هستند. مقدار پارامتر  $\lambda$  با استفاده از  $P_R(k_i) = 2.1 \times 10^{-9}$  که در آن  $k_i = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$  مقیاس خروج از افق می‌باشد، مشخص می‌شود [9]. با استفاده از تقریب غلنش آهسته، مقدار میدان اسکالر در مقیاس خروج از افق برابر با  $\phi_i \approx 0.23$  بدست آمد. همچنین تعداد ای-تایی در لحظه خروج از افق برابر با صفر در نظر گرفته شده است ( $N_i = 0$ ). پتانسیل طبیعی در مدل استاندارد تورم، در ناحیه اطمینان 95% مشاهدات پلانک قرار می‌گیرد، اما در مدل مورد مطالعه، با تنظیم پارامترهای تابع  $g_I$  همخوانی آن با مشاهدات بیشتر شده است. مقدار پارامترهای  $ns$  و  $r$  مدل با انتخاب  $M=1$ ،  $\alpha=-1$  و  $f=1$  در ناحیه اطمینان 68% مشاهدات پلانک قرار گرفت که نتیجه‌ای قابل توجه است (جدول 1).

همانطور که در شکل 1 (آ) مشخص است، در همسایگی  $\phi = \phi_c$ ، شرایط غلنش آهسته نقض می‌شود ( $|\varepsilon_2| > 1$ )، بنابراین نمی‌توان از تقریب غلنش آهسته برای محاسبه اندازه دقیق  $P_R$  استفاده کرد. به همین دلیل باید معادلات زمینه به صورت دقیق شود تا با استفاده از نتایج آن و همچنین حل معادله موخانووف-ساساکی، مقدار دقیق  $P_R$  بدست بیاید. در این مقاله ما با تنظیم پارامترهای تابع  $g_{II}$  و حل معادلات توانستیم دو مجموعه پارامتر بیابیم که در جدول 1 لیست شده‌اند. نتایج این محاسبات منجر به شکل 1 (ب) شده است که نشان می‌دهد طیف توان اختلالات اسکالر مدل در محل تشکیل قله تا مرتبه  $10^{-2}$  رشد کرده که مقداری مناسب جهت تولید سیاه‌چاله‌های اولیه می‌باشد [8].

### فراوانی سیاه‌چاله‌های اولیه

در دوره تابش غالب، زمانی که اختلالات خمش اولیه به داخل افق باز می‌گردند، رمبش گرانشی ممکن است منجر به تولید سیاه‌چاله‌های اولیه شود. جرم سیاه‌چاله‌های اولیه در زمان تشکیل با رابطه  $M = \gamma M_H$  داده می‌شود که  $M_H$  جرم افق و  $\gamma = 0.2$  ضریب موثر رمبش می‌باشند [10]. نسبت جرم سیاه‌چاله اولیه به کل ماده تاریک با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$f_{PBH}(M_{PBH}) = 1.68 \times 10^8 \left( \frac{\gamma}{0.2} \right)^2 \left( \frac{g_i}{106.75} \right)^{-1} \times \left( \frac{M_{PBH}}{M_\odot} \right)^{-1} \beta(M_{PBH}), \quad (9)$$

که در آن  $g_i \approx 106.75$  تعداد درجات آزادی موثر در زمان تشکیل سیاه‌چاله اولیه می‌باشد [8,10].

در رابطه بالا  $\beta = \gamma \frac{\sigma_{M_{PBH}}}{\sqrt{2\pi} \delta_{th}} \exp\left(\frac{-\delta_{th}^2}{2\sigma_{M_{PBH}}^2}\right)$  کسر جرمی سیاه‌چاله اولیه می‌باشد و  $\delta_{th} = 0.4$  تباین چگالی آستانه را نشان می‌دهد [10 و 11]. لازم به ذکر است که  $\sigma_{M_{PBH}}$  واریانس تباین چگالی در مقیاس همراه است که به صورت  $\sigma_k^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \int \frac{dq}{q} W^2\left(\frac{q}{k}\right) \left(\frac{q}{k}\right)^4 P_R(q)$  تعریف می‌شود و  $W(x)$  در آن تابع پنجره گاوسی می‌باشد [11]. همچنین جرم سیاه‌چاله‌های اولیه بر اساس عدد موج به صورت زیر داده می‌شود [10]:

$$M_{PBH} = 1.13 \times 10^{15} \left( \frac{\gamma}{0.2} \right) \left( \frac{g_i}{106.75} \right) \left( \frac{k_{PBH}}{k_i} \right) M_\odot. \quad (10)$$

با استفاده از روابط (13) و (14) می‌توان فراوانی و جرم سیاه‌چاله‌های اولیه را محاسبه نمود. نتایج محاسبات در جدول 1 آمده است. همانطور که در جدول 1 نشان داده شده، برای حالت A با جرم  $6.05 \times 10^{-13} M_\odot$  مقدار  $f_{PBH} = 0.92$  شده است و به این معنی است که می‌تواند اکثر ماده تاریک موجود در عالم را توجیه کند (شکل 1 (ج)).

### امواج گرانشی ثانویه

در کنار تشکیل سیاه‌چاله‌های اولیه، اختلالات خمش می‌توانند در کوچک مقیاس باعث انتشار امواج گرانشی ثانویه نیز شوند. این امواج از طریق آشکارسازهایی مانند  $SKA$ ،  $PTA$  و... قابل آشکارسازی هستند. به همین دلیل می‌توانند به عنوان یک ابزار برای سنجش اعتبار یک مدل مورد استفاده قرار بگیرند. محاسبات نشان می‌دهد که رابطه بین چگالی انرژی امواج گرانشی ثانویه و  $P_R$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{12} \int_0^\infty \int_{|1-v|}^{|1+v|} du \left[ \frac{4v^2 - (1-u^2+v^2)^2}{4uv} \right]^2 P_R(ku) P_R(kv) \left( \frac{3}{4u^3 v^3} \right)^2 (u^2 + v^2 - 3)^2 \times i$$

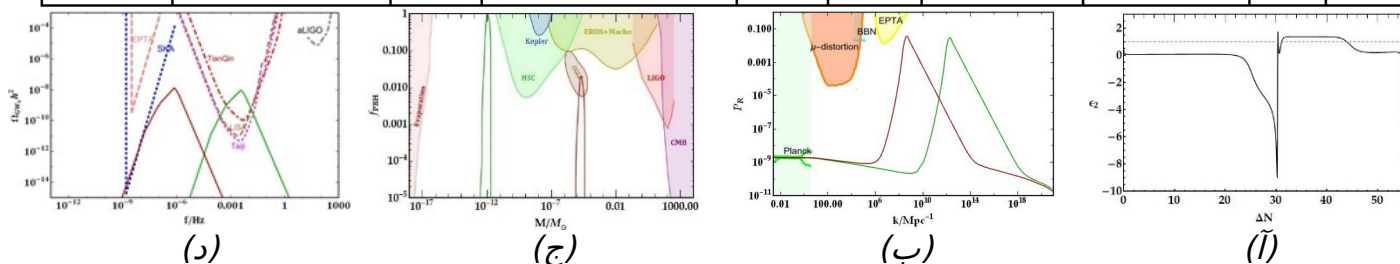
که در آن  $\Theta$  تابع هویساید است [8,12]. همچنین چگالی امواج گرانشی در زمان حال حاضر به صورت زیر بیان می‌شود

$$\Omega_{GW,0} h^2 = 0.83 \left( \frac{g_c}{10.75} \right)^{-1} \Omega_{r,0} h^2 \Omega_{GW}(\eta_c, k), \quad (12)$$

که  $\Omega_{r,0} h^2$  پارامتر چگالی انرژی تابشی حال حاضر و  $g_c$  تعداد درجات آزادی چگالی انرژی در زمان  $\eta_c$  می‌باشد. شکل 1 (د) نتایج محاسبات عددی برای  $\Omega_{GW,0}$  نشان می‌دهد. همانطور که در شکل 1 (د) واضح است، امواج گرانشی ایجاد شده در حالت A می‌تواند توسط آشکارسازهای *Taji*، *LISA* و *TianQin* رصد شوند. همچنین آشکارساز *SKA* می‌تواند امواج گرانشی تولید شده در حالت B را مورد آزمایش قرار دهد [8].

جدول 1 مجموعه پارامترها برای تشکیل سیاه‌چاله‌های اولیه به همراه مقدار پارامترهای  $k_{peak}$ ،  $r$ ،  $ns$ ،  $c$ ،  $d$ ،  $\phi_c$  و  $M_{PBH}^{peak}$  و  $f_{PBH}^{peak}$  مربوط به هر حالت

$f_{PBH}^{peak}$	$M_{PBH}^{peak} / M_\odot$	$P_R^{peak}$	$K_{peak} / \text{Mpc}^{-1}$	$r$	$ns$	$c$	$d$	$\phi_c$	دسته‌ها
۰/۹۲	$۶/۰۵ \times ۱۰^{-۱۳}$	۰/۰۳۶	$۲/۰۳ \times ۱۰^{۱۲}$	۰/۰۰۷	۰/۹۶۴	$۱/۹ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۵/۳۴ \times ۱۰^۹$	۰/۷۴	A
۰/۰۳۵	$۱/۶۰ \times ۱۰^{-۵}$	۰/۰۴۴	$۴/۸ \times ۱۰^۸$	۰/۰۰۶	۰/۹۶۵	$۱/۳ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۲/۷۲ \times ۱۰^۹$	۰/۴۱	B



شکل 1: (آ) تحول پارامتر دوم غلش آهسته ( $\epsilon_2$ ) برای حالت A در جدول 1 و نقض شدن غلش آهسته (ب) طیف توان اختلالات اسکالر ( $P_R$ ) بر حسب عدد موج ( $k$ ). (ج) فراوانی سیاه‌چاله‌های اولیه  $f_{PBH}$  بر حسب جرم. (د) چگالی امواج گرانشی ثانویه در حسب فرکانس. در تمام نمودارها، حالت‌های A و B به ترتیب با رنگ سبز و قرمز نشان داده شده‌اند [8].

### نتیجه‌گیری

در این پژوهش، احتمال تشکیل سیاه‌چاله‌های اولیه در مدل تورمی با جمله جنبشی وابسته به میدان برای پتانسیل طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت. انتخاب یک جمله جنبشی مناسب می‌تواند باعث افزایش اختلالات اسکالر در کوچک مقیاس تا مرتبه  $10^{-2}$  رشد کنند، که مقداری کافی برای تشکیل سیاه‌چاله‌های اولیه است. در این مطالعه جمله جنبشی به صورت  $G(\phi) = g_I(\phi)(1 + g_{II}(\phi))$  در نظر گرفته شد. قسمت  $g_I(\phi)$  تضمین می‌کند که مدل با مشاهدات پلانک در مقیاس CMB مطابقت داشته باشد. جمله  $g_{II}(\phi)$  نیز موجب افزایش  $P_R$  در کوچک مقیاس می‌شود که برای تشکیل سیاه‌چاله اولیه ضروری است. ما در این پژوهش، دو دسته پارامتر مناسب یافتیم که در جدول 1 لیست شده‌اند. هر دو دسته به خوبی مشاهدات پلانک در مقیاس CMB را توجیه می‌کنند. همچنین محاسبات ما نشان می‌دهد که سیاه‌چاله تشکیل شده در حالت A می‌تواند تقریباً تمام ماده تاریک موجود در عالم را توجیه کند. علاوه بر این فراوانی سیاه‌چاله در حالت B با جرمی از مرتبه  $10^{-5} M_\odot$  در ناحیه مجاز داده‌های OGEL قرار گرفته است.

### مرجع‌ها

- [1] S. Hawking, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 152, 75 (1971)
- [2] G. Sato-Polito, E.D. Kovetz, M. Kalinowski, *Phys. Rev. D* 100, 063521 (2019)
- [3] K. Inomata, M. Kawasaki, K. Mukaida, Y. Tada, T.T. Yanagida, *Phys. Rev. D* 96, 043504 (2017)
- [4] G. Sato-Polito, E. D. Kovetz, and M. Kamionkowski, *Phys. Rev. D* 100, 063521 (2019)
- [5] S.S. Mishra, V. Sahni, *JCAP* 04, 007 (2020)
- [6] I. Dalalian, S. Karydas, E. Papantonopoulos, *JCAP* 06, 040 (2020)
- [7] J. Lin, Q. Gao, Y. Gong, Y. Lu, C. Zhang, F. Zhang, *Phys. Rev. D* 101, 103515 (2020)
- [8] M. Solbi, K. Karami, *Eur. Phys. J. C* 81.10 (2021)

*.Y. Akrami et al. (Planck Collaboration), A&A 641, A10 (2020) [9]*

*.M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka, S. Yokoyama, Class. Quantum Gravity 35, 063001 (2018) [10]*

*.S. Young, C.T. Byrnes, M. Sasaki, JCAP 07, 045 (2014) [11]*

*.K. Kohri and T. Terada, Phys. Rev. D 97, 123532 (2018) [12]*