



کاربرد موجک‌های لژاندر در حل عددی برخی معادلات انتگرالی از نوع اول

محسن ریاحی بنی^{۱*}

^۱مجتمع آموزش عالی سراوان، سراوان، ایران

چکیده. در این مقاله، یک فرمول‌بندی ماتریسی برای حل عددی معادلات انتگرالی غیرخطی نوع اول با استفاده از موجک‌های لژاندر ساخته شده است. با بکارگیری موجک‌های لژاندر، معادله انتگرال به یک سیستم از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود. در نهایت سیستم جبری حاصل را حل کرده و جوابی تحلیلی-تقریبی برای معادله انتگرال بدست خواهیم آورد. برای توضیح اثربخشی و اعتبار روش مورد بحث، مثالی عددی ارائه شده است و نتایج حاصل شده با یک روش معروف دیگر مقایسه شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که این روش بسیار مؤثر و دقیق است.
واژه‌های کلیدی: موجک‌های لژاندر، معادلات انتگرال نوع اول، روش هم‌محلی، روش ماتریسی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 45G10, 65T60, 65N35.

۱. مقدمه

در طول چند دهه گذشته، حل تحلیلی معادلات تابعی با علاقه‌مندی زیادی توسط دانشمندان حوزه ریاضیات و مهندسی مواجه شده است. از اینرو، آثار زیادی در این ارتباط وجود دارد. همانگونه که می‌دانیم بسیاری از مدل‌های واقعی در ریاضیات، زیست‌شناسی و ... منجر به تشکیل یک معادله انتگرال یا یک سیستم از معادلات انتگرال می‌شوند. از آنجایی که یافتن راه حل‌های تحلیلی برای این معادلات دشوار است، بنابراین، برای غلبه بر این مشکل چندین روش عددی توسعه یافته‌اند. بکارگیری ایده روش‌های طیفی برای حل معادلات مختلف در طیف وسیعی از مدل‌های ریاضیات و مهندسی دیده می‌شود. روش‌های هم‌محلی، تاو و گالرکین از انواع خاصی از روش‌های طیفی هستند که به طور چشم‌گیرتری بکار گرفته شده‌اند [۲، ۴، ۶]. همانطور که گفته شد، در روش‌های طیفی از پایه‌های مختلفی در حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال استفاده می‌شود. پایه‌های متعامد به دلیل محاسبات کمتر و سهولت در بکارگیری، بیشتر مورد توجه هستند. اخیراً چندین تابع پایه‌ای از چندجمله‌ای‌های مختلف برای حل معادلات توسط نویسندگان معرفی و مورد استفاده قرار گرفته است. به طور مثال ال‌کوت و همکاران [۳] یک روش جدید طیفی لژاندر را برای حل معادلات انتگرال غیرخطی چند بعدی از نوع ولترا-فردهولم ارائه کردند. امیری و همکاران [۱] یک روش هم‌محلی طیفی بر اساس توابع پایه مثلثاتی تکه‌ای برای معادلات انتگرال غیرخطی ولترا-فردهولم پیشنهاد کردند. از جمله پایه‌ها و روش‌های دیگر می‌توان به چندجمله‌ای‌های چبیشف، چندجمله‌ای‌های برنولی، چندجمله‌ای‌های لژاندر هیبریدی و توابع بلاک پالس (Block-Pulse) و ترکیب آن‌ها اشاره نمود.
بسیاری از مسایل در علوم و مهندسی منجر به حل یک معادله انتگرال از نوع اول به فرم

$$(1) \quad \int_a^x k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b,$$

* سخنران. آدرس ایمیل: m.riahi@saravan.ac.ir

یا

$$(۲) \quad \int_a^b k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b,$$

می‌شوند که در آن $k(x, \xi)$ و $g(x)$ توابعی معلوم، F پیوسته و معکوس‌پذیر و $u(x)$ تابعی نامعلوم است که باید تعیین شود. در این مقاله از روش هم‌محلی به همراه پایه‌های موجک لژاندر برای یافتن پاسخ استفاده می‌نماییم. مدل ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی منجر به تولید یک معادله تابعی مانند معادلات انتگرال ولترا-فردهولم از نوع اول می‌شوند. روش‌های طیفی یکی از رایج‌ترین و قدرتمندترین روش‌ها در آنالیز عددی است. ماتریس‌های عملیاتی در خلال روش‌های طیفی برای حل چنین معادلاتی کاربردی وسیع دارند. به منظور حل معادلات (۱) یا (۲) ابتدا معادلات بر اساس پایه‌های موجک لژاندر تبدیل به یک معادله ماتریسی خواهند شد و سپس معادله جبری حاصل را حل خواهیم نمود.

۲. موجک‌های لژاندر

تعریف ۲,۱. چندجمله‌ای‌های لژاندر $L_m(x)$ از درجه m در بازه $[-۱, ۱]$ نسبت به تابع وزن $w(x) = ۱$ متعامد هستند و از فرمول بازگشتی زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$L_0(x) = ۱, \quad L_1(x) = x, \quad L_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1} x L_m(x) - \frac{m}{m+1} L_{m-1}(x).$$

تعریف ۲,۲. موجک‌های لژاندر $\psi_{n,m}(x)$ دارای چهار پارامتر هستند که بر بازه $I = [0, ۱]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(۳) \quad \psi_{n,m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} L_m(2^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq x < \frac{\hat{n}+1}{2^k}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

جایی که $\hat{n} = 2n - 1$ ، $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ ، $k \in \mathbb{Z}^+$ و m درجه چندجمله‌ای لژاندر است. همچنین $m = 0, 1, \dots, M-1$ ، ضریب $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ به منظور تعامد داده شده، $a = 2^{-k}$ و $b = \hat{n}2^{-k}$.

۳. تقریب تابع

تابع $u(x) \in L^2[0, ۱]$ توسط رابطه

$$(۴) \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \psi_{n,m}(x), \simeq u_{M,k}(x) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} u_{n,m} \psi_{n,m}(x) = \mathbf{U}^T \mathbf{\Psi}(x),$$

داده می‌شود که در آن $u_{n,m} = \langle u(x), \psi_{n,m}(x) \rangle$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی را نمایش می‌دهد. $\mathbf{U}$ و $\mathbf{\Psi}(x)$ ماتریس‌هایی $2^{k-1} M \times ۱$ هستند و با رابطه زیر داده می‌شوند

$$(۵) \quad \begin{aligned} \mathbf{U} &= [u_{1,0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,M-1}, u_{2,0}, \dots, u_{2,M-1}, \dots, u_{2^{k-1},0}, \dots, u_{2^{k-1},M-1}]^T \\ &= [u_1, u_2, \dots, u_{2^{k-1}M}]^T, \end{aligned}$$

و

$$(۶) \quad \begin{aligned} \mathbf{\Psi}(x) &= [\psi_{1,0}(x), \dots, \psi_{1,M-1}(x), \dots, \psi_{2^{k-1},0}(x), \dots, \psi_{2^{k-1},M-1}(x)]^T \\ &= [\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{2^{k-1}M}(x)]^T. \end{aligned}$$

تابع $k(x, \xi)$ در $L^2([0, ۱] \times [0, ۱])$ تعریف شده و توسط موجک‌های لژاندر دو بعدی قابل بسط به شکل $k(x, \xi) \simeq \mathbf{K}^T(x) \mathbf{K} \mathbf{\Psi}(\xi)$ است که در آن ماتریسی $2^{k-1} M \times 2^{k-1} M$ با مولفه‌های $K_{ij} = \langle \psi_i(x), \langle k(x, \xi), \psi_j(\xi) \rangle \rangle$ است. فرض کنیم که $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$ باشد، می‌توان نشان داد که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \psi_{n,m}(x)$ تعریف شده در رابطه (۴) به تابع $u(x)$ همگرا است.

۴. نمایش ماتریسی انتگرال به کمک موجک‌های لژاندر

نمایش ماتریسی انتگرال‌گیری از توابع لژاندر به شکل $\int_0^x \Psi(\xi) d\xi = V \Psi(x)$ داده می‌شود که در آن V ماتریسی عملیاتی $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ بعدی برای انتگرال است. اگر P ماتریسی $M \times M$ با مولفه‌های 2^{1-k} برای $[p]_{i,j} = 1$ و $i = j = 0$ و برای سایر نقاط باشد، آنگاه V و Q توسط روابط زیر قابل محاسبه می‌باشند

$$V = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} Q & P & P & \cdots & P \\ 0 & Q & P & \cdots & P \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} \end{bmatrix}.$$

که در آن Q ماتریسی $M \times M$ است. انتگرال‌گیری از حاصل ضرب دو تابع برداری موجک لژاندر بوسیله رابطه $\int_0^1 \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) d\xi = I$ قابل محاسبه است، جایی که I ماتریس واحد $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ است. بعلاوه

$$(7) \quad \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) U \simeq \tilde{U}^T \Psi(\xi),$$

که در آن U توسط رابطه (۵) داده شده و $\tilde{U}$ ماتریسی $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ است.

۵. روش حل معادلات انتگرال غیرخطی نوع اول

۱.۵. معادلات انتگرال غیرخطی فردهولم از نوع اول. معادله انتگرال غیرخطی فردهولم زیر را در نظر می‌گیریم

$$(8) \quad \int_0^1 k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad 0 \leq x < 1, \quad g(x) \in L^2[0, 1), \quad k \in (L^2[0, 1) \times [0, 1)),$$

جایی که g و F توابعی هموار و همچنین F تابعی غیرخطی معکوس‌پذیر و u تابع مجهول است. در ابتدا با تغییر متغیر $F(u(\xi)) = y(\xi)$ معادله انتگرال غیرخطی فردهولم (۸) را به یک معادله خطی تبدیل می‌نماییم. بنابراین به معادله انتگرال خطی فردهولم نوع اول به شکل $\int_0^1 k(x, \xi) y(\xi) d\xi = g(x)$ خواهیم رسید. توابع y, k, g را می‌توان توسط روابط

$$(9) \quad g(x) \simeq G^T \Psi(x), \quad k(x, \xi) \simeq \Psi^T(x) K \Psi(\xi), \quad y(\xi) \simeq Y^T \Psi(\xi).$$

تقریب زد و با جایگزاری این تقریب‌ها در معادله انتگرال خطی تغییر یافته خواهیم داشت:

$$\Psi^T(x) G = \int_0^1 \Psi^T(x) K \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) Y d\xi = \Psi^T(x) K \int_0^1 \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) Y d\xi = \Psi^T(x) K I Y.$$

آنگاه جواب به صورت $Y = K^{-1} G$ خواهد بود.

۲.۵. معادلات انتگرال غیرخطی ولترا از نوع اول. معادله انتگرال غیرخطی ولترا از نوع اول زیر را در نظر می‌گیریم

$$(10) \quad \int_0^x k(x, \xi) F(u(\xi)) d\xi = g(x), \quad 0 \leq x < 1.$$

با روشی مشابه با بخش ۲.۵، و با قرار دادن همان تغییر متغیر $F(u(\xi)) = y(\xi)$ در معادله (۱۰) به معادله انتگرال ولترای خطی به شکل $\int_0^x k(x, \xi) y(\xi) d\xi = g(x)$ دست خواهیم یافت. بکارگیری معادلات (۹) و (۷) نتیجه می‌دهند که

$$\begin{aligned} \Psi^T(x) G &= \int_0^x \Psi^T(x) K \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) Y d\xi = \Psi^T(x) K \left(\int_0^x \Psi(\xi) \Psi^T(\xi) Y d\xi \right) \\ &= \Psi^T(x) K \left(\int_0^x \tilde{Y}^T \Psi(\xi) d\xi \right) = \Psi^T(x) K \tilde{Y}^T V \Psi(x), \end{aligned}$$

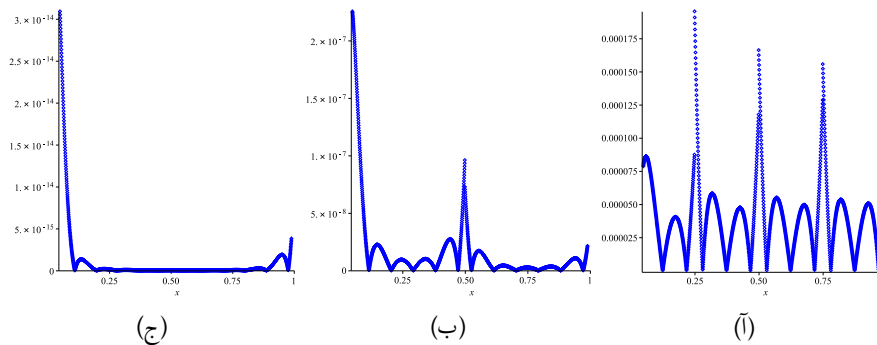
و جواب نهایی به شکل $G = K \tilde{Y}^T V \Psi(x)$ بدست خواهد آمد.

۶. بررسی عددی

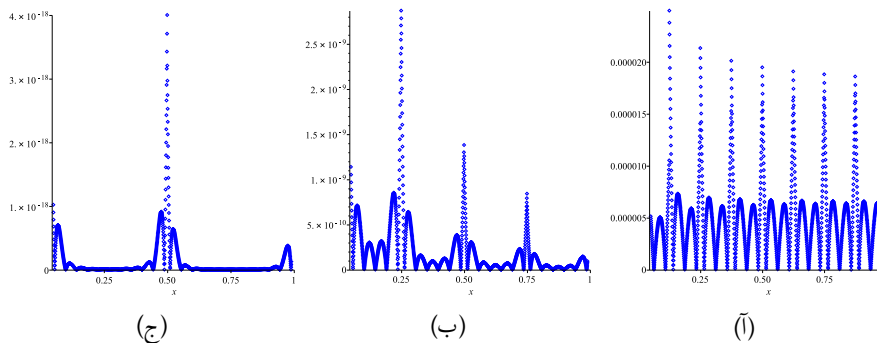
مثال ۶,۱. معادله انتگرال غیرخطی ولترا از نوع اول را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$(۱۱) \quad \int_0^x \sin((x - \xi) + 1) \cos(u(\xi)) d\xi = \left(\frac{1}{4}x + 1\right) \sin x,$$

برای حل این معادله انتگرال فرض می‌کنیم که $y(\xi) = \cos(u(\xi))$. بنابراین، با این تغییر جواب معادله به شکل $u(x) = \arccos(y(x))$ خواهد بود. شکل‌های ۱، ۲ و ۳ نتایج عددی حاصل شده توسط این روش را به ترتیب با $M^{2k-1} = 12$ ، $M^{2k-1} = 24$ و $M^{2k-1} = 48$ نمایش می‌دهند. همچنین این شکل‌ها نشان می‌دهند که افزایش مقدار M تاثیر بیشتری در سرعت و دقت روش نسبت به افزایش مقدار k دارد. در جدول ۱ بیشینه قدرمطلق خطاها که از روش موجک هار [۵] بدست آمده، نمایش داده شده است. جدول ۲ بیشینه قدر مطلق خطای $u(x)$ را برای مقادیر مختلف از M و k نشان می‌دهد. با مقایسه این دو جدول، می‌توان نتیجه گرفت که تقریب‌های حاصل شده از روش فعلی در مقایسه با روش موجک هار [۵] بهتر بوده و دارای دقت بیشتر و خطای کمتری است.



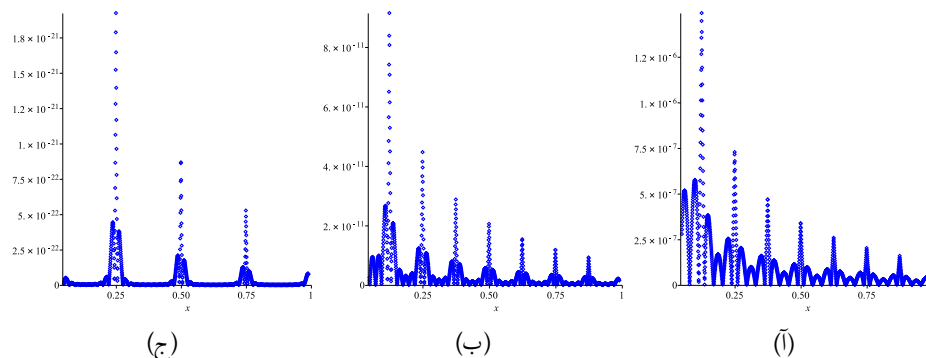
شکل ۱. مقایسه جواب‌های عددی با جواب دقیق زمانی که $M^{2k-1} = 12$ ، $M = 3$ (ا)، $k = 3$ ، $M = 6$ (ب)، $k = 2$ ، $M = 12$ (ج)، $k = 1$.



شکل ۲. مقایسه جواب‌های عددی با جواب دقیق زمانی که $M^{2k-1} = 24$ ، $M = 3$ (ا)، $k = 4$ ، $M = 6$ (ب)، $k = 3$ ، $M = 12$ (ج)، $k = 2$.

۷. نتایج

ایده اساسی در این مقاله ساختن روشی برای حل عددی معادلات انتگرال نوع اول بر اساس موجک‌های لژاندر بود. ماتریس‌های عملیاتی برای قسمت‌های مختلف از مساله بیان گردید و ترکیب این ماتریس‌ها با روش گالرکین، معادله انتگرال



شکل ۳. مقایسه جواب‌های عددی با جواب دقیق زمانی که $k=5$, $M=3$ (آ), $M=2^{k-1}=48$, $k=4$, $M=6$ (ب), $k=3$, $M=12$ (ج).

جدول ۱. بیشینه قدر مطلق خطای بدست آمده از روش موجک هار [۵].

J	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$2M$	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴
مرجع [۵]	$1.2e-003$	$3.1e-004$	$8.0e-005$	$2.0e-005$	$5.0e-006$	$1.2e-006$	$3.1e-007$	$7.9e-008$

جدول ۲. مقایسه بیشینه قدر مطلق خطای بدست آمده برای $u(x)$.

M	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
k	۱	$3.1e-001$	$5.7e-002$	$3.8e-003$	$4.6e-005$	$6.8e-006$	$1.8e-007$	$1.9e-008$	$4.1e-010$
	۲	$1.2e-001$	$1.5e-003$	$1.7e-004$	$2.2e-006$	$2.3e-007$	$1.6e-009$	$9.9e-011$	$6.8e-013$
	۳	$2.2e-002$	$1.8e-004$	$1.8e-005$	$7.2e-008$	$2.8e-009$	$1.3e-011$	$3.8e-013$	$1.4e-015$
	۴	$1.1e-002$	$2.4e-005$	$1.5e-006$	$2.3e-009$	$9.1e-011$	$1.0e-013$	$3.6e-015$	$2.7e-018$

را تبدیل به یک سیستم از معادلات جبری نمود. به منظور نشان دادن صحت و درستی روش، مثالی عددی بیان شد و پاسخ‌های حاصل شده با روش موجک هار مقایسه شدند. نتایج حاصل شده کارایی و دقت روش ساخته شده را نشان دادند.

مراجع

1. S. Amiri, M. Hajipour, and D. Baleanu, A spectral collocation method with piecewise trigonometric basis functions for nonlin-ear volterra-fredholm integral equations, Applied Mathematics and Computation 370 (2020), 124-915.
2. S. Bazm, Bernoulli polynomials for the numerical solution of some classes of linear and nonlinear integral equations, Journal of Com-putational and Applied Mathematics, 275 (2015), 44-60.
3. N.A. Elkot, M.A. Zaky, E.H. Doha and I.G. Ameen, On the rate of convergence of the legendre spectral collocation method for multi-dimensional nonlinear volterra-fredholm integral equations, Com-munications in Theoretical Physics, 73 (2021), 025002.
4. E. Hesameddini and M. Riahi, Bernoulli galerkin matrix method and its convergence analysis for solving system of volterra-fredholm integro-differential equations, Iranian Journal of Science and Tech-nology, Transactions A: Science, 43 (2019), 1203-1214.
5. I. Singh and S. Kumar, Haar wavelet method for some nonlinear Volterra integral equations of the first kind, Journal of Computa-tional and Applied Mathematics, 292 (2016), 541-552.
6. P. Sahu and S. Saha Ray, A New Bernoulli Wavelet Method for Numerical Solutions of Nonlinear Weakly Singular Volterra Integro-Differential Equations, International Journal of Computa-tional Methods, 14 (2017), 1750022.