سومین کنفرانس سیستم های دینامیکی و نظریه های هندسی
The 3rd Conference on Dynamical Systems & Geometric Theories
Hakim Sabzevari University
Faculty of Mathematics and Computer Science
Iran, Sabzevar
27 & 28 January 2022
دانشگاه حکیم سبزواری
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر
۷ و ۸ بهمن ۱۴۰۰

جبرلی تعمیم‌یافته

علی دل‌بازنسب* ، امیر ویسی[۲] و نسرین محمدی[۳]

[۱] دانشکده، فرهنگیان، یاسوج، ایران

[۲] نفت و گاز، دانشگاه یاسوج، گچساران، ایران

[۳] معدن، مجتمع آموزش عالی زرند، زرند، ایران

چکیده. در این نوشتار با کاهش بعضی شرایط حبرهای لی، ساختار جدیدی به‌نام جبر تعمیم‌یافته معرفی شده‌است. با ارائه‌ی گزاره‌ها و مثال‌های مختلف نشان داده‌شده‌است که این ساختار به‌راحتی روی بسیاری فضاهای برداری قابل تعریف است.

واژه‌های کلیدی: جبرلی، اتحادژاکوبی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 17B05.

---

۱. مقدمه

در اواخر قرن ۱۹ میلادی، سوفوس لی از مفاهیم مربوط به گروه‌های لی، برای حل معادلات‌دیفرانسیل استفاده کرد. ابزار اصلی او برای برای بررسی گروه‌های لی، مفهوم جبرهای لی بود.
لی درباره‌ی ارتباط گروه لی و جبر لی ۲ قضیه ارائه کرد:
یکی برقراری تناظری موضعی بین گروه‌های لی و جبرهای لی متناظر آن‌ها ؛
و دیگری نحوه‌ی ساختن مجدد گروه‌های لی از روی جبرهای‌شان.
مفهوم جبرلی ابتدا از فضای برداری تبدیل‌های خطی به همراه عملگری که الزاماً نه جابجایی و نه شرکت‌پذیر است، نشأت گرفته است. در این فضا عملگر موردنظر به‌صورت $[x,y]=xy-yx$ تعریف می‌شود که عمل سمت راست همان ترکیب معمولی توابع است.
همین ساختار به حالت کلی قابل تعمیم است:

تعریف ۱.۱. فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ به همراه عملگر $[.,.]:V\times V\longrightarrow V$ (به‌نام براکت لی) را جبر لی می‌گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) عملگر $[.,.]$ دوخطی باشد.
(۲) برای هر $x\in V$ داشته باشیم $[x,x]=0$.
(۳) برای هر $x,y,z\in V$ رابطه‌ی

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \tag{۱}$$

معروف به اتحاد ژاکوبی برقرار باشد.

---

*علی دل‌بازنسب. آدرس ایمیل: delbaznasab.gmail.com

برای معرفی جبرلی تعمیم‌یافته، شرایط حاکم بر تعریف جبرلی کاهش داده می‌شود.
به این ترتیب تعداد زیادی از فضاهای برداری، به جبرلی تعمیم‌یافته تبدیل می‌شوند.

۲. جبرلی تعمیم‌یافته

تعریف ۱.۲. فضای برداری V روی میدان F و عملگر $V \times V \longrightarrow V$ روی آن را در نظر می‌گیریم. $(V, [.,.])$ را جبر لی تعمیم‌یافته گفته می‌شود هرگاه دو شرط زیر برقرا باشد:

(۱) عملگر $[.,.]$ دوخطی باشد.
(۲) برای هر $x, y, z \in V$ داشته باشیم.

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]-[[y,x],z]-[[z,y],x]-[[x,z],y]=\text{۰} \qquad (۲)$$

به‌راحتی دیده می‌شود که رابطه‌ی (۲) معادل است با

$$[[x,y]-[y,x],z]+[[y,z]-[z,y],x]+[[z,x]-[x,z],y]=\text{۰} \qquad (۳)$$

لم ۲.۲. اگر $(V, [.,.])$ جبر لی تعمیم‌یافته‌ای باشد که برای هر $x, y \in V$ شرط

$$[x,y]=-[y,x] \qquad (۴)$$

برقرار باشد، آن‌گاه $(V, [.,.])$ یک جبر لی است.

اثبات. چون $(V, [.,.])$ جبر تعمیم‌یافته است، عملگر $[.,.]$ دوخطی است.
از رابطه‌ی (۴) بلافاصله شرط $[x,x]=\text{۰}$ ، برای هر $x \in V$ حاصل می‌شود.
با محاسبه‌ای سرراست، تساوی‌های (۳) و (۴) برقراری اتحاد ژاکوبی را نتیجه می‌دهند. □

مثال ۳.۲. V را فضای ضرب داخلی و v را عنصر ناصفری از آن درنظر بگیرید.
عملگر $[.,.] : V \times V \longrightarrow V$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[x,y]=\frac{\langle x,v\rangle}{\|v\|^{\text{۲}}}y. \qquad (۵)$$

بنا به‌رابطه‌ی (۵) داریم:

$$[[x,y],z]=\frac{\langle [x,y],v\rangle}{\|v\|^{\text{۲}}}z=\frac{\langle x,v\rangle\langle y,v\rangle}{\|v\|^{\text{۴}}}z=[x,[y,z]]. \qquad (۶)$$

این نشان می‌دهد عمل تعریف شده با رابطه‌ی (۵) شرکت‌پذیر است.
از طرفی بنا به‌ساختار خود ضرب‌داخلی، دوخطی بودن این عملگر واضح است.
هم‌چنین به راحتی نشان‌داده می‌شود $[[x,y]-[y,x],z]=\text{۰}$.
به این‌ترتیب فضای ضرب داخلی موردنظر همراه با عملگر تعریف شده در رابطه (۵) جبرلی تعمیم‌یافته است.

لم ۴.۲. جبرلی تعمیم‌یافته $(V, [.,.])$ را در نظر بگیرید. اگر $\lambda \neq \text{۱}$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $x, y \in V$ داشته باشیم

$$[x,y]=\lambda[y,x]\ ,\ \lambda \neq \text{۱} \qquad (۷)$$

آن‌گاه $(V, [.,.])$ جبرلی است.

اثبات. با توجه به شرط (۷) از رابطه‌ی $[x,x]=\lambda[x,x]$ نتیجه می‌شود $[x,x]=\text{۰}$ ، برای هر $x \in V$.
از طرفی شرط (۷) نتیجه می‌دهد

$$[[x,y]-[y,x],z]=(\text{۱}-\lambda)[[x,y],z] \qquad (۸)$$

رابطه‌های (۲) و (۸) اتحاد ژاکوبی را نتیجه می‌دهند. □

تعریف ۵.۲. جبرلی تعمیم‌یافته $(V, [.,.])$ را دوطرفه می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in V$ داشته باشیم

$$[z,[x,y]-[y,x]]+[x,[y,z]-[z,y]]+[y,[z,x]-[x,z]]=\text{۰} \qquad (۹)$$

قضیه ۶.۲. فرض کنید $(V,[.,.])$ جبرلی تعمیم‌یافته‌ی دوطرفه‌ای باشد.
اگرعملگر $\overline{[.,.]}: V\times V\longrightarrow V$ به‌صورت

$$\overline{[x,y]}=[x,y]-[y,x]\ x,y\in V \tag{۱۰}$$

روی V تعریف شود، $(V,\overline{[.,.]})$ جبرلی است.

اثبات. برای هر $x,y\in V$، بنا به رابطه (۱۰) واضح است که $\overline{[x,y]}=-\overline{[y,x]}$. و در نتیجه $\overline{[x,x]}=0$ برای هر $x\in V$.
از آن‌جا که $(V,[.,.])$ جبرلی تعمیم‌یافته است، و با استفاده از رابطه (۱۰) داریم

$$\begin{aligned}\overline{[x_1+x_2,y]}&=[x_1+x_2,y]-[y,x_1+x_2]\\&=[x_1,y]+[x_2,y]-[y,x_1]-[y,x_2]\end{aligned} \tag{۱۱}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۱) و به‌دست آوردن رابطه‌های شبیه آن، دوخطی‌بودن عملگر $[.,.]$ اثبات می‌شود.
ازطرفی

$$\begin{aligned}\overline{[\overline{[x,y]},z]}&=\overline{[[x,y]-[y,x],z]}=\overline{[[x,y],z]}-\overline{[[y,x],z]}\\&=[[x,y],z]-[z,[x,y]]-[[y,x],z]+[z,[y,x]]\end{aligned} \tag{۱۲}$$

به همین ترتیب به‌سادگی رابطه‌های مشابه رابطه‌ی (۱۲) برای $\overline{[\overline{[y,z]},x]}$ و $\overline{[\overline{[z,x]},y]}$ به‌دست می‌آید.
با جایگذاری این روابط در (۳) و دوطرفه‌بودن جبرلی تعمیم‌یافته، اتحاد ژاکوبی ثابت می‌شود. □

گزاره ۷.۲. فرض کنید V جبری شرکت‌پذیر روی $\mathbb{R}$ و $f: V\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی خطی باشد. عملگر $[.,.]: V\times V\longrightarrow V$ روی V به‌صورت

$$[x,y]=xy-yx+f(y)x\quad x,y\in V \tag{۱۳}$$

تعریف می‌شود.
آن‌گاه $(V,[.,.])$ جبرخطی تعمیم‌یافته است.

اثبات. با استفاده از رابطه‌ی (۱۳) و محاسبات ساده و سرراست، نتیجه‌ی دل‌خواه حاصل می‌شود. □

گزاره ۸.۲. فرض کنید V فضایی برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $f: V\longrightarrow\mathbb{F}$ و $g: V\longrightarrow\mathbb{F}$ تابعک‌های خطی باشند.
عملگر $[.,.]: V\times V\longrightarrow V$ روی V به‌صورت

$$[x,y]=f(x)y-g(y)x \tag{۱۴}$$

تعریف شده‌است.
آن‌گاه $(V,[.,.])$ جبرلی تعمیم‌یافته است.

اثبات. بررسی برقراری شرایط جبرلی تعمیم‌یافته، با توجه به خطی‌بودن f و g و استفاده از تعریف عملگر $[.,.]$ در رابطه‌ی (۱۴) ، به‌طور سرراست اثبات می‌شوند. □

مثال ۹.۲. فرض کنیم $V=\mathbb{R}^3$ و $Z=(c_1,c_2,c_3)$ ، $Y=(b_1,b_2,b_3)$ ، $X=(a_1,a_2,a_3)$ سه عضو دل‌خواه $\mathbb{R}^3$ باشند.
عملگر $[.,.]:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ را به‌صورت

$$[X,Y]=(a_2b_3,-a_1b_3,a_1b_2) \tag{۱۵}$$

تعریف می‌کنیم.
این عملگر، ساختار جبر لی تعمیم‌یافته روی $\mathbb{R}^3$ می‌دهد.

به‌سادگی و با استفاده‌ی مستقیم از رابطه‌ی (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}[X+Z,Y] &= ((a_۲+c_۲)b_۳, -(a_۱+c_۱)b_۳, (a_۱+c_۲)b_۲) \\ &= (a_۲b_۳, -a_۱b_۳, a_۱b_۲) + (c_۲b_۳, -c_۱b_۳, c_۱b_۲) \\ &= [X,Y]+[Z,Y].\end{aligned} \tag{۱۶}$$

بانیم‌نگاهی به رابطه‌ی (۱۶) ، دوخطی‌بودن عملگر (۱۵) به‌وضوح دیده می‌شود.
حال با قرار دادن $[X,Y]=(x_۱,x_۲,x_۳)$ ، داریم:

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z] &= (x_۲c_۳, -x_۱c_۳, x_۱c_۲) \\ &= (-a_۱b_۳c_۳, -a_۲b_۳c_۳, a_۲b_۳c_۲).\end{aligned}$$

پس با توجه به دو خطی‌بودن عملگر معرفی‌شده، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}[[X,Y]-[Y,X],Z] &= [[X,Y],Z]-[[Y,X],Z] \\ &= (-a_۱b_۳c_۳+a_۳b_۱c_۳, -a_۲b_۳c_۳+a_۳b_۲c_۳, a_۲b_۳c_۲-a_۳b_۲c_۲).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$[[X,Y]-[Y,X],Z]+[[Y,Z]-[Z,Y],X][[Z,X]-[X,Z],Y]=\circ.$$

به این ترتیب رابطه‌ی (۱۵) ساختار جبر لی تعمیم‌یافته‌ای روی $\mathbb{R}$ القاء می‌کند.

۳. پیشنهادات

به‌طور کلی پیشنهاد طبیعی و قابل انتظار، بررسی این مسأله است که حکم‌های ثابت شده درباره‌ی جبرهای لی، تا چه حد به جبرهای لی تعمیم‌یافته قابل گسترش هستند.
یافتن پاسخ سوال‌هایی از این قبیل که

(۱) آیا برای یک جبرلی تعمیم‌یافته V ، منیفلد P با ساختار مشابه گروه‌لی وجود دارد که قضیه‌ای هم‌چون قضیه‌ی کارتان [۲] برایش قابل اثبات باشد؟

(۲) آیا التصاق ∇ روی P وجود دارد به طوری‌که عبارتی مشابه

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

برای هر میدان برداری X و Y روی P برقرار باشد؟

(۳) آیا یافتن نگاشتی مشابه نگاشت نمایی، برای جبرهای لی تعمیم‌یافته امکان‌پذیر است؟

(۴) ...

مراجع

1. Humphreys J.E., Introductions to Lie algebra and representation theory. Springer-Verlag, New York (1972)
2. Vilasi Gaetano, Hamiltonian Dynamics, Word Scientific Publishing, 2001