اندازه مطلقاً پیوسته برای نگاشت‌های نعل اسبی تعمیم‌یافته

مریم خلج[۱*]

[۱]دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله، ابتدا وجود اندازه SRB برای نگاشت‌های نعل اسبی تعمیم‌یافته بررسی می‌شود. سپس، ثابت می‌شود که تحت دو شرط تقاطع و فربهی، این اندازه نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته است.

واژه‌های کلیدی: نگاشت نعل اسبی تعمیم‌یافته، تقاطع، فربهی، اندازه مطلقاً پیوسته.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 37CX, 37DX.

۱. مقدمه

در دهه ۹۰، شرط تقاطع برای محاسبه بعد هاوسدورف مجموعه‌های خودمتشابه و وجود اندازه‌های مطلقاً پیوسته معرفی شد. تحت شرط تقاطع، پولیکات و سیمون بعد هاوسدورف مجموعه‌های

$$\Lambda(\lambda) = \{\sum_{k=1}^{\infty} i_k \lambda^k : i_k = 0, 1, 3\}$$

را برای تقریباً هر $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ محاسبه کردند [۳]. سولومیاک نیز نشان داد که تحت شرط تقاطع، اندازه لبگ مجموعه $\Lambda(\lambda)$ برای تقریباً هر $\lambda > 1/3$، مثبت است [۵].

اولین مثال کلاسیک در بعد بالاتر، تابع $B_\lambda : [-1, 1]^2 \to [-1, 1]^2$ با ضابطه

$$B_\lambda(x, y) = \begin{cases} (2x - 1, \lambda y + 1 - \lambda) & x \geq 0 \\ (2x + 1, \lambda y - 1 + \lambda) & x < 0 \end{cases}$$

است. تحت شرط تقاطع، نگاشت B_λ برای تقریباً هر $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ دارای یک اندازه ارگویک مطلقاً پیوسته است [۵]. با تعمیم این نگاشت، سوجی نشان داد که اندازه SRB برای هر جاذب سیملوله‌ای متقاطع نگاشت $T : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ با ضابطه

$$T(x, y) = (\ell x, \lambda y + f(x))$$

برای $f \in C^2(S^1, \mathbb{R})$، $\ell \in \mathbb{N}$، $0 < \lambda < 1$ و $\ell\lambda > 1$ مطلقاً پیوسته است [۶]. رمز با الهام از سوجی، طی یک روش هندسی ثابت کرد که اندازه SRB برای نگاشت تعمیم‌یافته $T : S^1 \times \mathbb{R}^d \to S^1 \times \mathbb{R}^d$ با ضابطه

$$T(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

* سخنران. آدرس ایمیل: maryamkhalaj1991@gmail.com

مطلقاً پیوسته است، جایی که f نگاشت گسترشی k به ۱ و g یک انقباض است [۴]. در این مقاله، کلاسی از سیستم‌های دینامیکی تحت عنوان نگاشت‌های نعل اسبی تعمیم‌یافته مورد مطالعه قرار گرفته است. این نگاشت‌ها اولین بار توسط جیکوبسن و نیوهاوس برای شناسایی اندازه SRB در کلی‌ترین حالت، معرفی شد [۲]. نگاشت نعل اسبی تعمیم‌یافته، نگاشتی قطعه‌ای هذلولی است که روی خانواده‌ای شمارا از نوارهای عمودی تعریف می‌شود. در ادامه، تعریف دقیق‌تری از این نگاشت آورده شده است.

گردایه $\{S_1, S_2, \cdots\}$ از زیرمجموعه‌های بسته $S = [0,1]^2$ را در نظر بگیرید به طوری که S را تا حد یک مجموعه از اندازه صفر پوشش دهد و برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $\text{int}(S_i) \cap \text{int}(S_j) = \emptyset$. مرزهای بالا و پایین هر S_i، دو زیربازه از پاره‌خط‌های $\{(x,y) : y = 0, 0 \le x \le 1\}$ و $\{(x,y) : y = 1, 0 \le x \le 1\}$ و مرزهای چپ و راست آن نمودار توابع هموار $x^{(i)}(y)$ است که برای عدد حقیقی $0 < \alpha < 1$ داریم $|dx^{(i)}/dy| \le \alpha$. فرض کنید $F_i = (F_{i1}, F_{i2})$ یک وابریختی C^2 و U_i تصویر S_i تحت F_i باشد به طوری که مرزهای چپ و راست آن دو زیربازه از پاره‌خط‌های $\{(x,y) : x = 0, 0 \le x \le 1\}$ و $\{(x,y) : x = 1, 0 \le x \le 1\}$ و مرزهای بالا و پایین آن نمودار توابع هموار $Y^{(i)}(X)$ است که $|dY^{(i)}/dX| \le \alpha$.

برای α در تعریف فوق، قرار دهید $\mathcal{C}^s_\alpha = \{(v_1, v_2) : |v_1| \le \alpha |v_2|\}$ و $\mathcal{C}^u_\alpha = \{(v_1, v_2) : |v_2| \le \alpha |v_1|\}$ که در آن $|v| = |(v_1, v_2)| = \max\{|v_1|, |v_2|\}$. فرض کنید $K_0 > 1$ وجود دارد به طوری که نگاشت F با ضابطه $F|_{\text{int}(S_i)} = F_i$ در شرایط هذلولی زیر صدق می‌کند:

- $DF(\mathcal{C}^u_\alpha) \subseteq \mathcal{C}^u_\alpha$ و $DF^{-1}(\mathcal{C}^s_\alpha) \subseteq \mathcal{C}^s_\alpha$
- $|DF(v)| \ge K_0 |v|$ برای $v \in \mathcal{C}^u_\alpha$ و $|DF^{-1}(v)| \ge K_0 |v|$ برای $v \in \mathcal{C}^s_\alpha$.

به نگاشت F نگاشت نعل اسبی تعمیم‌یافته گفته می‌شود.

۲. نتایج اصلی

نتیجه اصلی این مقاله در قضیه زیر آورده شده است که برای اثبات دقیق آن می‌توانید به [۱] رجوع کنید. توجه کنید که برخلاف حالت‌های کلاسیک، پیوستگی در نگاشت نعل اسبی تعمیم‌یافته حذف شده، خمیدگی مرز نوارها در تعریف این نگاشت ناصفر بوده و تعداد آن‌ها نامتناهی است.

قضیه ۲.۱. تحت دو شرط تقاطع و فربهی، اندازه SRB برای هر نگاشت نعل اسبی تعمیم‌یافته نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته است.

مراجع

1. A. Fakhari and M. Khalaj, Absolutely Continuous Invariant Measure for Generalized Horseshoe Maps, preprint, (arXiv:2102.03737v2 [math.DS]).
2. M. Jakobson and S. Newhouse, A Two Dimensional Version of the Folklore Theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 171, 89-105, 1996.
3. M. Pollicott and K. Simon, The Hausdorff Dimension of λ-Expansions with Deleted Digits, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347, 3, 967-983, 1995.
4. M. Rams, Absolute continuity of the SBR measure for non-linear fat baker maps, *Nonlinearity*, 16, 1649-1655, 2003.
5. B. Solomyak, On the Random Series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös Problem), *Annals of Mathematics, Second Series*, 142, 3, 611-625, 1995.
6. M. Tsujii, Fat solenoidal attractors, *Nonlinearity*, 14, 1011-1027, 2001.