آنتروپی گذشته عمر در سیستم‌های $n-i+1$ از n مبتنی بر تابع چندک

زهره زمانی *

دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. آنتروپی نقش مهمی در مباحث قابلیت اعتماد و مطالعات طول عمر سیستم‌ها ایفا می‌کند. داده‌های ترتیبی نیز دارای کاربرد فراوان در مدل‌سازی و استنباط آماری هستند که از مهم‌ترین این داده‌ها می‌توان آماره‌های ترتیبی را نام برد. آماره‌های ترتیبی در بسیاری از شاخه‌های آمار از جمله نظریه قابلیت اعتماد کاربرد دارند. در سیستم‌های $n-i+1$ از n، آماره ترتیبی iام بیانگر طول عمر سیستم است. در مطالعات اخیر، به استفاده از تابع چندک به عنوان رویکردی جایگزین در تشخیص مدل‌های آماری و تحلیل داده‌ها توجه زیادی معطوف شده است. در مقاله حاضر آنتروپی گذشته عمر سیستم‌های $n-i+1$ از n مبتنی بر تابع چندک معرفی و به بررسی ویژگی‌های آن پرداخته می‌شود. دو کلاس ناپارامتری بر اساس این اندازه تعریف شده و بسته بودن این کلاس‌ها تحت تبدیلات نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) و تبدیلات وزنی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی شانون، آنتروپی باقیمانده عمر، آنتروپی گذشته عمر، تابع چندک.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 62N05 62E10 94A17.

۱. مقدمه

شانون [1] [۵]، اندازه‌ای از عدم حتمیت تحت عنوان آنتروپی معرفی کرد که کاربردهای زیادی در رشته‌های مختلف دارد. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی است که طول عمر یک مؤلفه یا سیستم با تابع چگالی $f(x)$ را نشان می‌دهد، در این صورت آنتروپی شانون متغیر تصادفی X به صورت

$$\eta(X) = -E(\log f(X)) = -\int_0^\infty (\log f(x))f(x)dx, \tag{۱}$$

تعریف می‌شود. در زمینه‌های زیادی از جمله قابلیت اعتماد، تحلیل بقا و اقتصاد که مدت زمان یک دوره مطالعاتی به عنوان متغیر اصلی مورد علاقه در نظر گرفته می‌شود، اندازه‌های اطلاع تابعی از زمان بوده و پویا می‌باشند. بر پایه این ایده، ابراهیمی [2] [۲] آنتروپی باقیمانده عمر را به صورت

$$\eta(X;t) = -\int_t^\infty \left(\log \frac{f(x)}{\bar{F}(t)}\right)\frac{f(x)}{\bar{F}(t)}dx = \log \bar{F}(t) - \frac{1}{\bar{F}(t)}\int_t^\infty (\log f(x))f(x)dx, \tag{۲}$$

* آدرس ایمیل: z.zamani@uk.ac.ir

[1]Shannon
[2]Ebrahimi

تعریف کرد. در صورتی که در زمان t سیستم غیرفعال مشاهده شود، عدم حتمیت سیستم به گذشته عمر مرتبط است. بر این اساس دیکرسنزو و لانگ بردی [۳] [۱]، آنتروپی گذشته عمر را به صورت

$$\bar{\eta}(X;t) = -\int_{\circ}^{t}\left(\log\frac{f(x)}{F(t)}\right)\frac{f(x)}{F(t)}dx = \log F(t) - \frac{۱}{F(t)}\int_{\circ}^{t}(\log f(x))f(x)dx, \qquad (۳)$$

تعریف کردند که در آن $\bar{\eta}(X;t) = \eta(X^{(t)})$ و $X^{(t)} = (t-X|X\leq t)$ متغیر تصادفی گذشته عمر نامیده می‌شود. یکی از مباحث جدیدی که اخیرا در مطالعات آماری مورد توجه محققین قرار گرفته است، استفاده از تابع چندک به جای تابع توزیع در تحلیل و مدل‌بندی داده‌ها است. در مبحث قابلیت اعتماد نیز بسیاری از مفاهیم بر اساس تابع چندک بازنویسی شده‌اند. بیان این مفاهیم بر اساس تابع چندک دارای خواص ویژه‌ای است. از جمله در مواقعی که وجود یک داده دور افتاده و یا یک مشاهده حدی بر روی اندازه‌های قابلیت اعتماد تأثیر قابل توجهی دارد، کار کردن با اندازه‌های چندکی مناسب‌تر می‌باشد، زیرا کمتر تحت تأثیر مشاهدات حدی و یا دور افتاده قرار می‌گیرند. به عنوان کاربردی دیگر فرض کنید نخواهیم آزمایشات طول عمر یک سیستم را تا زمانی که همه اجزای آن شکست بخورند، ادامه پیدا کند. قصد داریم فقط در صورتی که درصدی از اجزای آن شکست خوردند، آزمایش خاتمه پیدا کند. در این حالت زمان توقف بر حسب چندک بیان می‌شود. در مبحث اندازه‌های اطلاع بسیاری از مطالعات انجام گرفته بر اساس تابع توزیع می‌باشد. اما در مدل‌هایی که توابع توزیع فرم بسته‌ای ندارد، محاسبه این اندازه‌ها امکان‌پذیر نخواهد بود که در این شرایط نیز استفاده از تابع چندک توصیه شده است. در راستای بیان اندازه‌های آنتروپی بر اساس تابع چندک، سونوج و سانکاران [۴] [۶] فرم چندکی آنتروپی شانون و آنتروپی باقیمانده عمر را به صورت

$$\eta = \int_{\circ}^{۱}\log q(p)dp,$$

و

$$\eta(u) = \log(۱-u) + (۱-u)^{-۱}\int_{u}^{۱}\log q(p)dp,$$

تعریف کردند. سونوج و همکاران [۷] نیز آنتروپی گذشته عمر چندکی را به صورت

$$\bar{\eta}(u) = \log u + u^{-۱}\int_{\circ}^{u}\log q(p)dp.$$

ارائه کردند و ویژگی‌هایی از آن را مورد بررسی قرار دادند. سونوج و همکاران [۸] آنتروپی شانون و آنتروپی باقیمانده عمر آماره‌های مرتب بر اساس تابع چندک را معرفی و به بررسی خواص آن‌ها پرداختند. در این مقاله آنتروپی گذشته عمر آماره‌های ترتیبی بر اساس تابع چندک معرفی و خواص آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۲، آنتروپی گذشته عمر چندکی آماره‌های مرتب ارائه شده و نشان داده می‌شود اندازه تعریف شده، توزیع متغیر تصادفی را به طور یکتا مشخص می‌کند. در بخش ۳، دو کلاس ناپارامتری بر اساس این اندازه تعریف شده و حفظ این کلاس‌ها تحت تبدیلات نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) و همچنین توزیع‌های وزنی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲. آنتروپی گذشته عمر آماره‌های مرتب بر مبنای تابع چندک

فرض کنید X یک متغیر تصادفی مطلقا پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ باشد، تابع چندک X به صورت

$$Q(u) = F^{-۱}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}, \quad \circ \leq u \leq ۱. \qquad (۴)$$

تعریف می‌شود. از رابطه بالا، برابری $F(Q(u)) = u$ نتیجه می‌شود و رابطه $q(u)f(Q(u)) = ۱$ با مشتق‌گیری نسبت به u حاصل می‌شود که در آن $f(Q(u))$ تابع چندک چگالی [۵] و $q(u) = Q'(u)$ تابع چگالی چندک [۶] نامیده می‌شود.

[3] Dicresenzo and Longberdi
[4] Sunoj and Sankaran
[5] density quantile function
[6] quantile density function

برای مطالعه بیشتر در خصوص تابع چندک و مزایای استفاده از آن می‌توان به نیر [7] و همکاران [۴] مراجعه نمود.
فرض کنید X_1، ... و X_n، یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی با تابع توزیع مطلقا پیوسته $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند. آماره‌های ترتیبی متناظر با این نمونه توسط $X_{1:n}$، ... و $X_{n:n}$ نمایش داده می‌شود. تابع چگالی آماره ترتیبی iام، $X_{i:n}$ به صورت

$$f_{i:n}(x)=\frac{1}{B(i,n-i+1)}(F(x))^{i-1}(\bar{F}(x))^{n-i}f(x),$$

تعریف می‌شود که در آن $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx;\ a,b>0$ تابع بتا است. فرم چندکی تابع چگالی آماره ترتیبی i ام با جایگذاری $x=Q(u)$ در رابطه (۲) به صورت

$$f_{i:n}(u)=\frac{1}{B(i,n-i+1)}u^{i-1}(1-u)^{n-i}\frac{1}{q(u)}=\frac{g_i(u)}{q(u)}, \tag{5}$$

حاصل می‌شود که $g_i(u)=\frac{1}{B(i,n-i+1)}u^{i-1}(1-u)^{n-i}$ تابع چگالی توزیع بتا با پارامترهای i و $n-i+1$ است.

قضیه ۱.۲. آنتروپی گذشته عمر بر مبنای تابع چندک برای آماره ترتیبی iام به صورت

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u)=&-\frac{\beta(i,n-i+1)}{\beta_u(i,n-i+1)}\int_0^u(\log g_i(p))g_i(p)dp+\frac{\beta(i,n-i+1)}{\beta_u(i,n-i+1)}\int_0^u(\log q(p))g_i(p)dp\\&+\log\frac{\beta_u(i,n-i+1)}{\beta(i,n-i+1)},\end{aligned} \tag{6}$$

محاسبه می‌شود که در آن $\frac{\beta_u(i,n-i+1)}{\beta(i,n-i+1)}$ فرم چندکی $F_{i:n}(u)$ و $\beta_u(i,n-i+1)=\int_0^u p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp$ تابع بتای ناقص است.

اثبات. آنتروپی گذشته عمر آماره ترتیبی iام عبارت است از

$$\bar{\eta}(X_{i:n},t)=-\int_0^t\left(\log\frac{f_{i:n}(x)}{F_{i:n}(t)}\right)\frac{f_{i:n}(x)}{F_{i:n}(t)}dx. \tag{7}$$

می‌توان نشان داد که $F_{i:n}(t)=\frac{\beta_{F(t)}(i,n-i+1)}{\beta(i,n-i+1)}$. حال با جایگذاری $x=Q(p)$ و $t=Q(u)$ در رابطه (۷) و استفاده از روابط (۴) و (۵) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. $\square$

آماره‌های مرتب در مشخصه سازی توزیع‌های احتمال، آزمون‌های نیکویی برازش و همچنین قابلیت اعتماد کاربردهای زیادی دارند. در نظریه قابلیت اعتماد، آماره‌های مرتب برای مدل‌بندی آماری مورد استفاده قرار می‌گیرند. آماره ترتیبی iام در نمونه‌ای به حجم n، طول عمر یک سیستم $(n-i+1)$ از n را نشان می‌دهد.

نتیجه ۲.۲. آنتروپی گذشته عمر چندکی متناظر با آماره ترتیبی اول و آماره ترتیبی nام به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u)&=-\log n+\frac{n-1}{n}+\log(1-(1-u)^n)+(n-1)\frac{(1-u)^n}{1-(1-u)^n}\log(1-u)\\&+\frac{n}{1-(1-u)^n}\int_0^u(\log q(p))(1-p)^{n-1}dp,\end{aligned}$$

و

$$\bar{\eta}_{X_{n:n}}(u)=-\log n+\frac{n-1}{n}+\log u+\frac{n}{u^n}\int_0^u(\log q(p))p^{n-1}dp,$$

که $\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u)$ و $\bar{\eta}_{X_{n:n}}(u)$ آنتروپی گذشته عمر مبتنی بر تابع چندک برای سیستم‌های سری و موازی با مؤلفه‌های مستقل و هم‌توزیع را نشان می‌دهد.

[7] Nair

مثال ۳.۲. فرض کنید X دارای تابع چگالی چندک

$$q(u) = Ku^{\alpha}(1-u)^{-(A+\alpha)}, \tag{8}$$

باشد که K، α و A مقادیر ثابت حقیقی مقدار هستند. آنتروپی گذشته عمر چندکی آماره ترتیبی اول برابر است با

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) &= -\log n + \log K + (n-1+A+\alpha)\frac{(1-u)^n}{1-(1-u)^n}\log(1-u) + \log(1-(1-u)^n) \\ &+ \frac{A+\alpha+n-1}{n} + \frac{n\alpha}{1-(1-u)^n}\int_0^u (\log p)(1-p)^{n-1}dp.\end{aligned}$$

ملاحظه ۴.۲. لازم به ذکر است که خانواده توزیع‌های (۸) چندین توزیع مهم مانند نمایی $(\alpha = 0, A = 1)$، پارتو $(\alpha = 0, A < 1)$، توزیع ری اسکیل بتا $(\alpha = 0, A > 1)$ و لگ لجستیک $(\alpha = \lambda - 1, A = 2)$ را شامل می‌شود.

توزیع‌هایی وجود دارد که تابع توزیع (و یا تابع چگالی) آن‌ها فرم بسته‌ای ندارد و در نتیجه محاسبه آنتروپی برای آن‌ها امکان‌پذیر نیست. اما تابع چندک صورت بسته‌ای دارد و در نتیجه می‌توان آنتروپی چندکی را در این توزیع‌ها محاسبه کرد. مثال بعد مصداق این موضوع می‌باشد.

مثال ۵.۲. فرض کنید X دارای تابع چندک $Q(u) = 2u - u^2$ باشد که تابع توزیع فرم بسته‌ای ندارد. در این صورت

$$\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) = -\log n + \log 2 + 1 - \frac{2}{n} + \log(1-(1-u)^n) + (n-2)\frac{(1-u)^n}{1-(1-u)^n}\log(1-u).$$

نتیجه ۶.۲. فرم چندکی آنتروپی گذشته عمر آماره‌های مرتب، تابع چگالی چندک را به طور منحصر بفرد توسط رابطه

$$q(u) = \frac{u^{i-1}(1-u)^{n-i}}{\beta_u(i, n-i+1)}\exp\left\{\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) - 1 - \frac{\bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u)\beta_u(i,n-i+1)}{u^{i-1}(1-u)^{n-i}}\right\}. \tag{9}$$

تعیین می کند.

مثال ۷.۲. فرض کنید X دارای توزیع پارتو II با تابع چندک $Q(u) = \alpha\left[(1-u)^{-\frac{1}{c}} - 1\right],\ \alpha, c > 0$ باشد، در این صورت

$$\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) = -\log n + \log(\frac{\alpha}{c}) + (1 + \frac{1}{nc}) + \log(1-(1-u)^n) + (n+\frac{1}{c})\frac{(1-u)^n}{1-(1-u)^n}\log(1-u). \tag{10}$$

فرض کنید رابطه (۱۰) برقرار است. طبق رابطه (۹) نتیجه می‌شود

$$q(u) = \exp\left\{\bar{\eta}_{X_{1:n}}(u) - 1 + \log\frac{(1-u)^{n-1}}{\beta(1,n)} - \frac{\bar{\eta}'_{X_{1:n}}(u)\beta_u(1,n)}{(1-u)^{n-1}} - \log\frac{\beta_u(1,n)}{\beta(1,n)}\right\},$$

حال با جایگذاری و ساده کردن داریم $q(u) = \frac{\alpha}{c}(1-u)^{-\frac{c+1}{c}}$ که تابع چگالی چندک پارتو II می باشد.

قضیه زیر نشان می دهد آنتروپی باقیمانده عمر چندکی آماره‌های مرتب، توزیع متغیر تصادفی را به طور یکتا مشخص می‌کند.

قضیه ۸.۲. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب با توابع توزیع مطلقا پیوسته F و G، توابع چندک Q_X و Q_Y و تکیه‌گاه مشترک χ باشند. در این صورت $F(x) = G(x),\ \forall x \in \chi$، اگر و تنها اگر

$$\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) = \bar{\eta}_{Y_{i:n}}(u),\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, n,\ \forall\ 0 < u < 1. \tag{11}$$

اثبات. فرض کنید $F(x)=G(x),\ \forall x\in\chi$، بنابراین $Q_X(u)=Q_Y(u)$ و $q_X(u)=q_Y(u)$ برای هر $u\in(0,1)$. در نتیجه $\int_0^u \log q_X(p)g_i(p)dp=\int_0^u \log q_Y(p)g_i(p)dp$ و طبق رابطه (6) نتیجه مطلوب ثابت می‌شود. برعکس فرض کنید $\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u)=\bar{\eta}_{Y_{i:n}}(u)$ به ازای هر $i=1,2,\cdots,n$ و هر $0<u<1$. با جایگذاری (7) در رابطه بالا و ساده کردن جملات نتیجه می‌شود که

$$\int_0^u \log q_X(p)g_i(p)dp=\int_0^u \log q_Y(p)g_i(p)dp.$$

حال با مشتقگیری نسبت به u از رابطه بالا برابری $\log q_X(u)g_i(u)=\log q_Y(u)g_i(u)$ ثابت می‌شود. بنابراین $q_X(u)=q_Y(u)$ و در نتیجه $F(x)=G(x)$ برای هر $x\in\chi$ و اثبات کامل می‌شود. □

ملاحظه ۹.۲. فرم چندکی آنتروپی گذشته عمر آماره‌های مرتب می‌تواند بر اساس آنتروپی شانون چندکی آماره‌های مرتب به صورت زیر بیان شود

$$\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u)=\frac{\beta(i,n-i+1)}{\beta_u(i,n-i+1)}\eta_{X_{i:n}}+\int_u^1[\log(\frac{g_i(p)}{q(p)})]\frac{p^{i-1}(1-p)^{n-i}}{\beta_u(i,n-i+1)}dp+\log\frac{\beta_u(i,n-i+1)}{\beta(i,n-i+1)},$$

که در آن $\eta_{X_{i:n}}=\eta_{g_i}+E_{g_i}(\log q(U))$ آنتروپی شانون چندکی آماره ترتیبی iام می‌باشد و مقدار η_{g_i} در ابراهیمی [3] به صورت

$$\eta_{g_i}=\log B(i,n-i+1)-(i-1)[\Psi(i)-\Psi(n+1)]-(n-i)[\Psi(n-i+1)-\Psi(n+1)],$$

تعریف شده که تابع $\Psi(z)=\frac{d}{dz}(\log\Gamma(z))$، همان تابع دایگاما است.

توزیع‌های وزنی به طور گسترده‌ای در بسیاری از رشته‌ها مانند پزشکی، قابلیت اعتماد و تحلیل داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. اگر $w(x)$ تابعی نامنفی باشد به طوری‌که $0<E[w(X)]<\infty$، آنگاه X^w متغیر وزنی متناظر با متغیر تصادفی X است که تابع چگالی آن توسط رابطه $f_w(x)=\frac{w(x)f(x)}{E[w(X)]}$ محاسبه می‌شود. تابع چندک چگالی متناظر با f_w به صورت

$$f_w(Q(u))=w(Q(u))f(Q(u))/\mu,$$

حاصل می‌شود که در آن $\mu=\int_0^1 w(Q(p))f(Q(p))d(Q(p))=\int_0^1 w(p)dp$. بنابراین تابع چگالی چندک توسط رابطه $\frac{1}{q_w(u)}=\frac{w(Q(u))}{\mu q(u)}$ محاسبه می‌شود.

قضیه ۱۰.۲. آنتروپی گذشته عمر چندکی iامین آماره ترتیبی X^w عبارت است از

$$\bar{\eta}_{X^w_{i:n}}(u)=\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u)+\log\mu-\frac{\int_0^u(\log w(Q(p)))p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp}{\int_0^u p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp}. \qquad (13)$$

۳. رده‌های طول عمر

تعیین کلاس‌های مختلف از مدل‌های احتمال بر اساس اندازه‌های عدم حتمیت در بسیاری مواقع مفید می‌باشد. رده‌بندی توزیع‌های طول عمر امکان شناسایی سیستم و محاسبه کران برای تابع قابلیت اعتماد را فراهم می‌کند. در ادامه دو کلاس ناپارامتری بر اساس $\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳. متغیر تصادفی X دارای آنتروپی گذشته عمر چندکی صعودی (نزولی) ($IPQEO$ ($DPQEO$)) از آماره‌های مرتب است اگر $\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u)$ تابعی صعودی (نزولی) نسبت به $u\geq 0$ باشد.

مثال ۲.۳. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع تابع توانی با تابع چندک $Q(u)=\alpha u^{\frac{1}{\beta}}$ باشد، در این صورت $\bar{\eta}_{X_{n:n}}(u)=-\log n+\log(\frac{\alpha}{\beta})+1+\frac{1}{\beta}\log u-\frac{1}{n\beta}$ و در نتیجه $\bar{\eta}'_{X_{n:n}}(u)=\frac{1}{\beta u}>0$. بنابراین، X، $IPQEO$ است.

در ادامه یک کران بالا (پایین) برای آنتروپی گذشته عمر آماره‌های مرتب بر اساس تابع چندک در خانواده‌های متعلق به رده $IPQEO$ ($DPQEO$) ارائه می‌شود.

ملاحظه ۳.۳. اگر متغیر تصادفی X متعلق به رده $IPQEO$ $(DPQEO)$ باشد، در این صورت

$$\bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) \leq (\geq) 1 + log\frac{q(u)\beta_u(i,n-i+1)}{u^{i-1}(1-u)^{n-i}}.$$

قضیه ۴.۳. اگر X متعلق به کلاس $IPQEO$ $(DPQEO)$ باشد و $\phi(.)$ یک تابع نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) باشد، آن گاه $Y=\phi(X)$ نیز به کلاس $IPQEO$ $(DPQEO)$ متعلق است.

اثبات. فرض کنید $Y=\phi(X)$ یک تابع نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) باشد. اگر تابع چگالی Y را با $g(y)$ نشان دهیم، در این صورت

$$g(y) = \frac{f(\phi^{-1}(y))}{\phi'(\phi^{-1}(y))} = \frac{1}{\phi'(Q_X(u))q_X(u)},$$

و در نتیجه $q_Y(u) = q_X(u)\phi'(Q_X(u))$. حال با جایگذاری تابع چگالی چندک $q_Y(y)$ در رابطه (۶) داریم

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_{Y_{i:n}}(u) &= -\frac{\beta(i,n-i+1)}{\beta_u(i,n-i+1)}\int_0^u(\log g_i(p))g_i(p)dp + \frac{\beta(i,n-i+1)}{\beta_u(i,n-i+1)}\int_0^u(\log q_X(p))g_i(p)dp\\
&+ \frac{\beta(i,n-i+1)}{\beta_u(i,n-i+1)}\int_0^u(\log\phi'(Q_X(p)))g_i(p)dp + \log\frac{\beta_u(i,n-i+1)}{\beta(i,n-i+1)}\\
&= \bar{\eta}_{X_{i:n}}(u) + \frac{\int_0^u(\log\phi'(Q_X(p)))p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp}{\beta_u(i,n-i+1)}.
\end{aligned}$$

حال با مشتقگیری از رابطه بالا نتیجه می‌شود که

$$\bar{\eta}'_{Y_{i:n}}(u) = \bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u) + \frac{u^{i-1}(1-u)^{n-i}\int_0^u[\log\phi'(Q_X(u)) - \log\phi'(Q_X(p))]p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp}{(\int_0^u p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp)^2}.$$

می دانیم که $\bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u) > (<) 0$، زیرا X متعلق به رده طول عمر $IPQEO$ $(DPQEO)$ است. از طرفی با در نظر داشتن تحدب (تقعر) تابع $\phi(.)$ نتیجه می‌شود که ϕ' تابعی صعودی (نزولی) است و در نتیجه به ازای هر $p\in(0,u)$ داریم

$$[\log\phi'(Q_X(u)) - \log\phi'(Q_X(p))] \geq (\leq) 0.$$

بنابراین $\bar{\eta}'_{Y_{i:n}}(u) > 0$ و لذا Y نیز به رده $IPQEO$ $(DPQEO)$ تعلق دارد. □

مثال ۵.۳. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با تابع چندک $Q_X(u) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-u)$ باشد و به ازای $\alpha>0$ قرار دهید $Y = X^{\frac{1}{\alpha}}$. در این صورت Y دارای توزیع وایبل با تابع چندک $Q_Y(u) = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}(-\log(1-u))^{\frac{1}{\alpha}}$ است. می توان نشان داد که X متعلق به کلاس $IPQEO$ است. از طرفی $\phi(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ به ازای $x>0$ و $\alpha>0$ تابعی نامنفی، صعودی و محدب به ازای $0<\alpha<1$ است. بنابراین شرایط قضیه ۴.۳ برقرار است و در نتیجه توزیع وایبل نیز به ازای $0<\alpha<1$ به کلاس $IPQEO$ متعلق است.

در ادامه به بیان شرایط لازم برای حفظ کلاس $IPQEO$ تحت توزیع‌های وزنی پرداخته می شود.

قضیه ۶.۳. الف. فرض کنید X به کلاس $IPQEO$ تعلق دارد و $w(x)$ تابعی نامنفی و نزولی از x باشد. در این صورت X^w نیز $IPQEO$ است.
ب. فرض کنید X به کلاس $DPQEO$ تعلق دارد و $w(x)$ تابعی نامنفی و صعودی از x باشد. در این صورت X^w نیز $DPQEO$ است.

اثبات. الف. با مشتقگیری از رابطه (۱۳) نسبت به u داریم

$$\bar{\eta}'_{X^w_{i:n}}(u) = \bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u) + \frac{u^{i-1}(1-u)^{n-i}\int_0^u[\log w(Q(p)) - \log w(Q(u))]p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp}{[\int_0^u p^{i-1}(1-p)^{n-i}dp]^2}. \quad (14)$$

با درنظر داشتن غیر نزولی بودن تابع چندک و نزولی بودن تابع $w(x)$، می‌توان نشان داد که

$$\log w(Q(p)) > \log w(Q(u)),\ \forall\ 0 < p < u,$$

و در نتیجه جمله دوم در رابطه (۱۴) مثبت است. از طرفی $\bar{\eta}'_{X_{i:n}}(u) > 0$ زیرا X، $IPQEO$ است. بنابراین $\bar{\eta}'_{X^w_{i:n}}(u)$ مثبت و X^w به رده $IPQEO$ متعلق می‌شود.

ب. به طور مشابه ثابت می‌شود. $\square$

مثال ۷.۳. فرض کنید X به رده $IPQEO$ متعلق باشد و $w(x) = (\bar{F}(x))^{j-1},\ j > 0$. متغیر تصادفی وزنی متناظر با X، مدل نرخ خطر معکوس متناسب است. به ازای $0 < j < 1$، تابع $w(x)$ نسبت به x نزولی است. بنابراین طبق قضیه ۶.۳ قسمت الف، متغیر X^w نیز به رده $IPQEO$ تعلق دارد.

۴. نتیجه‌گیری

تابع چندک به عنوان یکی از شاخص‌های توزیع‌های آماری مورد استفاده قرار می‌گیرد. اخیرا نیز به بیان مفاهیم قابلیت اعتماد و اندازه‌های اطلاع بر پایه تابع چندک توجه زیادی معطوف شده است. در این مقاله به معرفی آنتروپی گذشته عمر آماره‌های مرتب مبتنی بر تابع چندک پرداخته شد و ویژگی‌هایی از آن مورد بررسی قرار گرفت. همچنین دو رده طول عمر بر اساس این اندازه معرفی و بسته بودن آن‌ها تحت تبدیلات نامنفی، صعودی و محدب (مقعر) و تبدیلات وزنی مورد بررسی قرار گرفت.

مراجع

1. Di Crescenzo, A. and Longobardi, M. Entropy-based measure of uncertainty in past lifetime distributions. *Journal of Applied Probability*, 39 (2002), 434–440.
2. Ebrahimi, N. How to measure uncertainty in the residual life time distribution. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, Series A, (1996), 48–56.
3. Ebrahimi, N., Soofi, E. S. and Zahedi, H. Information properties of order statistics and spacings. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50 (2004), 177–183.
4. Nair, N. U., Sankaran, P. G. and Balakrishnan, N. *Quantile-based reliability analysis.* Springer, New York, (2013).
5. Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27 (1948), 379–423.
6. Sunoj, S. M. and Sankaran, P. G. Quantile based entropy function. *Statistics and Probability Letters*, 82 (2012), 1049–1053.
7. Sunoj, S. M., Sankaran, P. G. and Nanda, A. K. Quantile based entropy function in past lifetime. *Statistics and Probability Letters*, 83 (2013), 366–372.
8. Sunoj, S. M., Krishnan, A. S. and Sankaran, P. G. Quantile-based entropy of order statistics. *Journal of the Indian Society for Probability and Statistics*, 18 (2017), 1–17.