تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکوردها

زهره زمانی[۱,*] ، امید خوارزمی[۲]

[۱]دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۲]دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، رفسنجان، ایران

چکیده. در این مقاله، تابع مولد اطلاع برای باقیمانده عمر یک مولفه یا سیستم بر اساس رکوردها محاسبه شده است. ثابت می‌شود که تابع نرخ خطر رکورد به طور یکتا مقدار تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر را تعیین می‌کند. دو کلاس ناپارامتری بر اساس تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکوردها تعریف شده و کران‌هایی برای این تابع مولد ارائه می‌شود. در انتها به محاسبه تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکوردهای متناظر با متغیرهای تصادفی تولید شده تحت تبدیلات خطی و تبدیلات اکیداً صعودی پرداخته می‌شود.
واژه‌های کلیدی: آنتروپی شانون، تابع مولد اطلاع، رکورد، باقیمانده عمر.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 62B10; 94A15; 94A17.

---

۱. مقدمه

در نظریه اطلاع، توابع مولد برای چگالی‌های احتمال تعریف می‌شوند تا کمیت‌هایی مانند اطلاع شانون و واگرایی کولبک لیبر را توسعه دهند. تابع مولد اطلاع برای تابع چگالی f، توسط گلمب [1] [۳] پیشنهاد شد. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی f باشد. تابع مولد اطلاع (IG) از چگالی f برای هر $\alpha > ۰$ به صورت

$$G_\alpha(X) = G_\alpha(f) = -\int f^\alpha(x)dx, \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود، مشروط بر اینکه انتگرال وجود داشته باشد. گلمب [۳] نشان داد که $G_\alpha(X)$ دارای ویژگی‌های زیر است الف. $G_۱(X) = ۱$. ب. $\frac{\partial}{\partial\alpha}G_\alpha(X)\Big|_{\alpha=۱} = -H(f)$ که در آن $H(f) = -\int f(x)\log f(x)dx$ آنتروپی شانون متغیر تصادفی است. خوارزمی و بالاکریشنان [2] [۶] تابع مولد اطلاع را برای آماره‌های مرتب و سیستم‌های مختلط محاسبه کرده و ویژگی‌هایی از آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند.

فرض کنید $\{X_i,\ i \geq ۱\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی پیوسته، مستقل و همتوزیع با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. X_i را یک رکورد بالا گوییم اگر مقدار آن از همه مشاهدات قبلی بزرگتر باشد. بنابراین X_j یک مقدار رکورد بالا است اگر $X_j > X_i$ برای همه مقادیر $i < j$. طبق قرارداد $X_۱$ را اولین رکورد بالا تعریف می‌کنیم. برای رکوردهای پایین نیز تعریف به صورت مشابه ارائه می‌شود. یک مشاهده در صورتی به عنوان یک رکورد پایین شناخته می‌شود که مقدار آن از مقادیر قبلی

---

[*]سخنران. آدرس ایمیل: z.zamani@uk.ac.ir

[1]Golomb
[2]Balakrishnan

کوچکتر باشد. زمانی که در آن رکورد رخ می دهد، خود یک متغیر تصادفی است که زمان رکورد نامیده می شود. زمان‌های رکورد، توسط T_j نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$T_۱ = ۱,\ T_n = \min\{n : X_n > X_{T_{n-۱}}\}.$$

فرض کنید $U_۱$، ... و U_n مقادیر n رکورد بالا از یک توزیع با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند. در این صورت چگالی توأم n رکورد اول بالا و همچنین چگالی حاشیه‌ای U_n (رکورد nام بالا برای $n \geq ۱$) به ترتیب توسط روابط

$$q(u) = \prod_{i=۱}^{n} r(u_i) f(u_n),\ u_۱ < \cdots < u_n,$$

و

$$f_{U_n}(u_n) = \frac{R^{n-۱}(u_n)}{(n-۱)!} f(u_n),\ -\infty < u_n < \infty, \tag{۲}$$

محاسبه می‌شود که در آن $R(t) = -\log(۱ - F(t))$ و $r(t) = R'(t) = f(t)/۱ - F(t)$ تابع نرخ خطر است.
فرض کنید $L_۱$، ... و L_n، مقادیر n رکورد پایین از تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشند. چگالی حاشیه‌ای L_n (رکورد nام پایین برای $n \geq ۱$) عبارت است از

$$f_{L_n}(l_n) = \frac{\tilde{R}^{n-۱}(l_n)}{(n-۱)!} f(l_n),\ -\infty < l_n < \infty, \tag{۳}$$

که در آن $\tilde{R}(t) = -\log(F(t))$. رکوردها در طیف وسیعی از مسائل از جمله رشته‌های ورزشی، هواشناسی، بیماری‌های همه‌گیر، زلزله‌شناسی و اقتصاد کاربرد دارند.
مطالعه مدت زمان یکی از موضوعات مورد علاقه در بسیاری از شاخه‌ها مانند قابلیت اعتماد، تحلیل بقا، بیمه و اقتصاد می‌باشد. بر پایه این ایده ابراهیمی [۳] [۲] آنتروپی شانون باقیمانده عمر را تعریف کرد. به دنبال آن، بسیاری از اندازه‌های اطلاع برای متغیرهای تصادفی باقیمانده عمر تعریف شده و مورد بررسی قرار گرفتند. اخیراً جوزه و ستار [۴] [۴] اکستروپی باقیمانده عمر را بر اساس k-رکوردها بررسی کردند. ستار و جوزه [۱] ، اکستروپی باقیمانده عمر مرتبط با رکوردها را تعریف کرده و به بیان برخی ویژگی‌های آن پرداختند. در این مقاله در بخش ۲، تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکوردهای بالا و پایین تعریف می‌شود. در بخش ۳، دو کلاس ناپارامتری براساس این تابع تعریف شده و کران‌هایی برای تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکورد محاسبه می‌شود. در ادامه به محاسبه مقدار تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر در رکوردهای متناظر با متغیرهای تصادفی تولید شده تحت تبدیلات خطی و تبدیلات اکیداً صعودی پرداخته می‌شود.

۲. تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر در رکوردهای متناظر با متغیرهای تصادفی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی است که طول عمر یک مؤلفه یا سیستم با تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ را نشان می‌دهد. زمانی که یک مؤلفه یا سیستم در زمان t فعال باشد، ممکن است به مطالعه اطلاعات چگالی باقیمانده عمر مؤلفه یا سیستم بعد از زمان t علاقه‌مند باشیم. بر این اساس در این بخش، تابع مولد اطلاع IG برای توزیع باقیمانده طول عمر سیستم یا مؤلفه بر اساس رکوردها تعریف و مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای متغیر تصادفی X متناظر با طول عمر سیستم، متغیر $X_t = (X - t | X > t)$ متغیر تصادفی باقیمانده عمر سیستم در زمان t نامیده می‌شود که دارای تابع چگالی $f_t(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(t)}$ و تابع بقا $\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۱. (خوارزمی و بالاکریشنان [۵]). فرض کنید X_t متغیر تصادفی باقیمانده عمر با تابع چگالی مطلقا پیوسته $f_t(x)$ باشد. تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر RIG به صورت

$$G_\alpha(X;t) = \frac{\int_t^\infty f^\alpha(x)dx}{\bar{F}^\alpha(t)}, \tag{۴}$$

[3] Ebrahimi
[4] Jose and Sathar

تعریف می‌شود.

ملاحظه ۲.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع گامای بریده شده با پارامترهای n و λ است، اگر تابع چگالی آن به صورت

$$f(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n;\lambda t)}x^{n-1}e^{-\lambda x},\ x>t>0,$$

باشد که با نماد $X\sim\Gamma_t(n,\lambda)$ نشان داده می‌شود و در آن $\Gamma(n;t)=\int_t^\infty x^{n-1}e^{-x}dx,\ n>0$ تابع گامای ناقص است .

قضیه ۳.۲. فرض کنید U_n^X، رکورد nام بالا در دنباله‌ای از مشاهدات با تابع چگالی $f(x)$ باشد. در این صورت تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر U_n^X برابر است با

$$G_\alpha(U_n^X;t)=\frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1;-\log(1-F(t)))}{\Gamma^\alpha(n;-\log(1-F(t)))}E_{g^*}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1-e^{-V_n}))],\tag{۵}$$

که در آن V_n یک متغیر تصادفی با توزیع گامای بریده شده $\Gamma_{-\log(1-F(t))}(\alpha(n-1)+1,1)$ است که تابع چگالی آن با g^* نمایش داده می‌شود.

اثبات. با استفاده از رابطه (۴) می‌توان نوشت

$$G_\alpha(U_n^X;t)=\frac{\int_t^\infty f^\alpha_{U_n^X}(x)dx}{\bar{F}^\alpha_{U_n^X}(t)}.\tag{۶}$$

از طرفی

$$\bar{F}_{U_n^X}(t)=\int_t^\infty f_{U_n^X}(x)dx=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\log(1-F(t))}^\infty u^{n-1}e^{-u}du=\frac{\Gamma(n;-\log(1-F(t)))}{\Gamma(n)},\tag{۷}$$

که تساوی دوم با جایگذاری رابطه (۲) و سپس تغییر متغیر $u=-\log(1-F(x))$ حاصل شده است. با تغییر متغیر مشابه می‌توان ثابت کرد

$$\int_t^\infty f^\alpha_{U_n^X}(x)dx=\frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1;-\log(1-F(t)))}{\Gamma^\alpha(n)}E_{g^*}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1-e^{-V_n}))].\tag{۸}$$

بنابراین با جایگذاری (۷) و (۸) در رابطه (۶) نتیجه ثابت می‌شود. □

مثال ۴.۲. فرض کنید X دارای توزیع نمایی با تابع چگالی $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ باشد، آنگاه

$$G_\alpha(U_n^X;t)=\frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1;\alpha\lambda t)}{\Gamma^\alpha(n;\lambda t)}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha(n-1)+1}}.\tag{۹}$$

قضیه ۵.۲. تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکورد n ام پایین، L_n^X به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$G_\alpha(L_n^X;t)=\frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1;-\log F(t))}{\Gamma^\alpha(n;-\log F(t))}E_{g^{**}}[f^{\alpha-1}(F^{-1}(1-e^{-V_n}))],\tag{۱۰}$$

که در آن $V_n\sim\Gamma_{-\log(F(t))}(\alpha(n-1)+1,1)$ و g^{**} تابع چگالی V_n است.

۳. بررسی برخی ویژگی‌های تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکورد

در این بخش ابتدا دو کلاس بر اساس تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر تعریف کرده و سپس به مطالعه بیشتر تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر پرداخته می‌شود.

تعریف ۱.۳. متغیر تصادفی X دارای تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر صعودی (نزولی) $IRIG$ ($(DRIG)$) است، اگر و تنها اگر $G_\alpha(X;t)$ تابعی صعودی (نزولی) نسبت به t باشد.

قضیه ۲.۳. اگر $\{X_i,\ i \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال f و تابع توزیع F باشد و $f_{U_n^X}$ و $\bar{F}_{U_n^X}$ تابع احتمال و تابع بقای رکورد nام بالا باشد. همچنین فرض کنید یکی از دو قسمت الف یا ب برقرار باشد.
الف. تابع $G_\alpha(U_n^X;t)$ نسبت به t نزولی است و $\alpha > ۰$،
ب. تابع $G_\alpha(U_n^X;t)$ نسبت به t صعودی است و $۰ < \alpha < ۱$ ،
آن‌گاه $G_\alpha(U_n^X;t)$ به طور یکتا و منحصر بفرد توسط تابع نرخ خطر رکورد nام بالا تعیین می‌شود.

اثبات. رابطه (۶) معادل است با

$$G_\alpha(U_n^X;t)\bar{F}^\alpha_{U_n^X}(t) = \int_t^\infty f^\alpha_{U_n^X}(x)dx \tag{۱۱}$$

حال با مشتقگیری از رابطه (۱۱) نسبت به t داریم

$$G'_\alpha(U_n^X;t)\bar{F}^\alpha_{U_n^X}(t) - \alpha f_{U_n^X}(t)\bar{F}^{\alpha-۱}_{U_n^X}(t)G_\alpha(U_n^X;t) = -f^\alpha_{U_n^X}(t).$$

با توجه به تعریف $h_{U_n^X}(t) = \frac{f_{U_n^X}(t)}{\bar{F}_{U_n^X}(t)}$، نتیجه می‌شود

$$G'_\alpha(U_n^X;t) - \alpha h_{U_n^X}(t)G_\alpha(U_n^X;t) = -h^\alpha_{U_n^X}(t).$$

بنابراین برای یک مقدار ثابت $t > ۰$، $h_{U_n^X}(t)$ یک حل مثبت از معادله

$$g(x) = x^\alpha - \alpha G_\alpha(U_n^X;t)x + G'_\alpha(U_n^X;t) = ۰, \tag{۱۲}$$

است. طبق فرضیات قسمت الف $g(۰) = G'_\alpha(U_n^X;t) < ۰$ و $g(+\infty) = +\infty$ و

$$g'(x) = \alpha x^{\alpha-۱} - \alpha G_\alpha(U_n^X;t)x, \tag{۱۳}$$

بنابراین به ازای $\alpha > ۱$ تابع $g(x)$ ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد و بنابراین دارای یک مقدار مینیمم در نقطه $x = (G_\alpha(U_n^X;t))^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ است که نشان می‌دهد معادله (۱۳) دارای یک جواب مثبت یکتای $h_{U_n^X}(t)$ برای همه مقادیر t است. بنابراین $G_\alpha(U_n^X;t)$ به طور یکتا $h_{U_n^X}(t)$ و در نتیجه F را تعیین می‌کند. $\square$

قضیه ۳.۳. اگر U_n^X متعلق به کلاس $IRIG$ ($DRIG$) باشد، آن‌گاه

$$G_\alpha(U_n^X;t) \geq (\leq)\frac{۱}{\alpha}h^{\alpha-۱}_{U_n^X}(t) \tag{۱۴}$$

اثبات. با مشتقگیری از رابطه (۶) نسبت به t، تفکیک کسر و استفاده از تابع نرخ خطر رکورد nام نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dt}G_\alpha(U_n^X;t) = -h^\alpha_{U_n^X}(t) + \alpha h_{U_n^X}(t)G_\alpha(U_n^X;t) > (<)۰,$$

که نامساوی آخر به این دلیل برقرار است که X به رده $IRIG$ ($DRIG$) متعلق است. حال با ساده کردن رابطه بالا نتیجه مطلوب ثابت می‌شود. $\square$

لم بعد، مقدار تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکوردهایی را نشان می‌دهد که با استفاده از تبدیلات مکان-مقیاس متغیرهای تصادفی حاصل شده‌اند.

قضیه ۴.۳. فرض کنید X یک متغیر تصادفی مطلقا پیوسته و $a > ۰$ و $b \geq ۰$ مقادیر ثابت حقیقی مقدار باشند. همچنین قرار دهید $Z = aX + b$، در این صورت

$$G_\alpha(U_n^Z;t) = \frac{۱}{a^{\alpha-۱}}G_\alpha(U_n^X;\frac{t-b}{a}). \tag{۱۵}$$

اثبات. از آن‌جایی که $a > ۰$ و $t > b$، نامساوی $\frac{t-b}{a} > ۰$ نتیجه می‌شود. از طرفی می‌دانیم

$$\bar{F}_{U_n^Z}(t) = \int_t^\infty \frac{(-\log(۱ - F_Z(z)))^{n-۱} f_Z(z)}{\Gamma(n)} dz.$$

با جایگذاری $F_Z(z) = F_X(\frac{z-b}{a})$ و $f_Z(z) = \frac{۱}{a} f_X(\frac{z-b}{a})$ در رابطه بالا و تغییر متغیر $x = \frac{z-b}{a}$ نتیجه می‌شود

$$\bar{F}_{U_n^Z}(t) = \int_{\frac{t-b}{a}}^\infty \frac{(-\log(۱ - F_X(x)))^{n-۱} f_X(x)}{\Gamma(n)} dx = \frac{\Gamma(n; -\log(۱ - F_X(\frac{t-b}{a})))}{\Gamma(n)} = \bar{F}_{U_n^X}(\frac{t-b}{a})$$

تساوی دوم با تغییر متغیر $u = -\log(۱ - F_X(x))$ و تساوی آخر طبق رابطه (۷) حاصل شده است. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد

$$\int_t^\infty f^\alpha_{U_n^Z}(z)dz = \frac{\Gamma(\alpha(n-۱)+۱; -\log(۱ - F_X(\frac{t-b}{a})))}{a^{\alpha-۱}\Gamma^\alpha(n)} E_{g^{***}}[f^{\alpha-۱}(F^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))]$$

که در آن $V_n \sim \Gamma_{-\log(۱-F_X(\frac{t-b}{a}))}(\alpha(n-۱)+۱, ۱)$ و g^{***} تابع چگالی V_n است. حال با استفاده از تعریف تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکوردهای متناظر با متغیر تصادفی Z و روابط بالا اثبات قضیه کامل می‌شود. □

در قضیه بعد، تاثیر تبدیلات یکنوای صعودی از متغیرهای تصادفی روی تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر رکوردها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۵.۳. فرض کنید $\psi(.)$ یک تابع اکیدا صعودی باشد به طوری‌که $\psi(۰) = ۰$ و $\psi(\infty) = \infty$ و تعریف کنید $Y = \psi(X)$. همچنین فرض کنید U_n^X و U_n^Y به ترتیب nامین رکورد بالا متناظر با X و Y باشند. در این صورت

$$G_\alpha(U_n^Y; t) = \frac{G_\alpha(U_n^X; \psi^{-۱}(t))}{E_g[f_X^{\alpha-۱}(F_X^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))]} E\left[\frac{f_X(F_X^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))}{\psi'(F_X^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))}\right]^{\alpha-۱} \tag{۱۶}$$

که در آن $V_n \sim \Gamma_{-\log(۱-F_X(\psi^{-۱}(t)))}(\alpha(n-۱)+۱, ۱)$.

اثبات. با جایگذاری روابط $F_Y(y) = F_X(\psi^{-۱}(y))$ و $f_Y(y) = \frac{۱}{\psi'(\psi^{-۱}(y))} f_X(\psi^{-۱}(y))$ در تعریف تابع بقای U_n^Y و استفاده از تغییر متغیر $Y = \psi(X)$ برابری $\bar{F}_{U_n^Y}(t) = \bar{F}_{U_n^X}(\psi^{-۱}(t))$ ثابت می‌شود. از طرفی به طور مشابه می‌توان ثابت کرد

$$\int_t^\infty f^\alpha_{U_n^Y}(y)dy = \frac{\Gamma(\alpha(n-۱)+۱; -\log(۱ - F_X(\psi^{-۱}(t))))}{\Gamma^\alpha(n)} E\left[\frac{f_X(F_X^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))}{\psi'(F_X^{-۱}(۱ - e^{-V_n}))}\right]^{\alpha-۱}$$

با جایگذاری روابط فوق در تعریف تابع مولد اطلاع باقیمانده رکورد متناظر با Y نتیجه ثابت می‌شود. □

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به محاسبه تابع مولد اطلاع باقیمانده عمر برای رکوردهای بالا و پایین پرداخته و براساس آن دو کلاس ناپارامتری تعریف شد و کران‌هایی برای تابع مولد اطلاع رکوردها بر اساس این دو کلاس محاسبه گردید. همچنین تاثیر تبدیلات خطی و اکیدا صعودی بر مقدار تابع مولد اطلاع رکوردها مورد مطالعه قرار گرفت.

مراجع

1. Abdul Sathar, E. I. and Jose, J. *Extropy based on records for random variables representing residual life.* Communications in Statistics-Simulation and Computation, (2020), 1–15.
2. Ebrahimi, N. *How to measure uncertainty in the residual life time distribution.* Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A, (1996), 48–56.
3. Golomb, S. *The information generating function of a probability distribution (corresp.).* IEEE Transactions on Information Theory, 12(1), (1966), 75–77.

4. Jose, J. and Sathar, E. A. *Residual extropy of k-record values.* Statistics and Probability Letters, 146, (2019), 1–6.
5. Kharazmi, O. and Balakrishnan, N. *Jensen-information generating function and its connections to some well-known information measures.* Statistics and Probability Letters, 170, (2021), 108995.
6. Kharazmi, O. and Balakrishnan, N. *Information generating function for order statistics and mixed reliability systems.* Communications in Statistics-Theory and Methods, (2021), 1–10.