

بررسی پایداری و انشعاب در سیستم تصادفی عصبی $I_{Na,p} + I_K$

مهدی فاتحی نیا*، محمد پناهی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. در این مقاله، پایداری و انشعاب مدل تصادفی $I_{Na,p} + I_K$ از سیستم‌های دینامیکی علوم اعصاب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. شرایط بروز انشعاب‌های D و P را در مدل تصادفی مورد نظر بررسی می‌کنیم. با استفاده از چند مورد شبیه‌سازی عددی و رسم خروجی برنامه‌های مرتبط با مدل، درستی نتایج تئوری را راستی آزمایی می‌کنیم.
واژه‌های کلیدی: سیستم‌های دینامیکی تصادفی، مدل هاجکین-هاکسلی، انشعاب سیستم تصادفی، مدل $I_{Na,p} + I_K$.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 60H10.

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، معادلات دیفرانسیل تصادفی که بر اساس حسابان و آنالیز تصادفی پایه‌گذاری شده مورد توجه روزافزونی قرار گرفته است. همچنین عدم قطعیت نقش مهمی را در بسیاری از فرآیندهای بیولوژی ایفا می‌کند. نادیده گرفتن این مسئله در بررسی پدیده‌های مدل‌سازی شده ممکن است بر تجزیه و تحلیل سیستم‌های مورد مطالعه تأثیر بگذارد [۴]. یکی از مدل‌های دینامیکی که در علوم اعصاب از محبوبیت و اهمیت بالایی برخوردار است مدل هاجکین-هاکسلی^۱ است. این مدل در واقع چگونگی ایجاد و گذر پتانسیل عمل را در غشاء یک سلول عصبی نشان می‌دهد. هاجکین و هاکسلی در سال ۱۹۵۲ این مدل دینامیکی را با استفاده از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل چهار بعدی نشان دادند. از آنجا که ابزار کارآمدی برای تحلیل دینامیک یک دستگاه معادلات دیفرانسیل چهار بعدی وجود نداشت مدل‌های کاهش یافته‌ی دو بعدی متعددی از مدل هاجکین-هاکسلی به وجود آمد. از مشهورترین این مدل‌های دو بعدی می‌توان به مدل $I_{Na,p} + I_K$ اشاره کرد [۱]. در این مقاله مدل تصادفی این سیستم را معرفی کرده و دینامیک آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
مدل $I_{Na,p} + I_K$ با استفاده از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل دو بعدی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{V} = \frac{1}{C} \left[I - g_L(V - E_L) - g_{Na}(V - E_{Na}) \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{V - V_{Th}}{k_m}}} \right) - g_K n(V - E_K) \right], \\ \dot{n} = \frac{1}{\tau(V)} \left[\frac{1}{1 + e^{\frac{V - V_{Th}}{k_n}}} - n \right], \end{cases}$$

که در آن متغیر V پتانسیل غشاء سلول عصبی و متغیر n میزان فعالیت کانال پتاسیم، متغیرهای دینامیکی اصلی این سیستم هستند. پارامترهای سیستم در جدول ۱ در دو نوع، بر اساس دسته‌بندی هاجکین از نورون‌ها نشان داده شده‌اند.

*سخران. آدرس ایمیل: fatehiniam@yazd.ac.ir

¹Hodgkin-Huxley

جدول ۱. پارامترهای سیستم

پارامتر	نام	نوع یک	نوع دو
C	ظرفیت غشاء سلول عصبی	۱	۱
I	جریان	۰	۰
g_L	میزان هدایت کانال نشتی	۸	۸
E_L	پتانسیل معکوس کانال نشتی	-۸۰	-۷۸
g_{Na}	حداکثر هدایت کانال سدیم	۲۰	۲۰
E_{Na}	پتانسیل معکوس کانال سدیم	۶۰	۶۰
g_K	حداکثر هدایت کانال پتاسیم	۱۰	۱۰
E_K	پتانسیل معکوس کانال پتاسیم	-۹۰	-۹۰
V_m	پتانسیل نیمه ولتاژ فعال سازی کانال سدیم	-۲۰	-۲۰
k_m	شیب فعال سازی کانال سدیم	۱۵	۱۵
V_n	پتانسیل نیمه ولتاژ فعال سازی کانال پتاسیم	-۲۵	-۴۵
k_n	شیب فعال سازی کانال پتاسیم	۵	۵
$\tau(V)$	زمان حساس به ولتاژ	۱	۱

۲. مدل تصادفی $I_{Na,p} + I_K$

همان طور که گفته شد از آنجا که مدل $I_{Na,p} + I_K$ دارای پارامترهای زیادی بوده و این امر موجب دشواری و ناکارآمدی تحلیل ها در عالم واقعیت می شود، لذا برای مطلوب تر بودن تحلیل ها از سیستم تصادفی متناظر با سیستم مورد نظر استفاده خواهد شد.

مدل تصادفی $I_{Na,p} + I_K$ با اضافه کردن ضریبی از فرآیند وینر به سیستم (۱) به دست می آید و با استفاده از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی دو بعدی به صورت زیر نشان داده می شود:

$$(2) \quad \begin{cases} dV = \frac{1}{C} \left[I - g_L(V - E_L) - g_{Na}(V - E_{Na}) \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{V_m - V}{k_m}}} \right) - g_K n(V - E_K) \right] dt \\ + \sigma V dW_t, \\ dn = \frac{1}{\tau(V)} \left[\frac{1}{1 + e^{\frac{V_n - V}{k_n}}} - n \right] dt + \sigma n dW_t, \end{cases}$$

که در آن σ یک پارامتر است که به سیستم (۱) اضافه شده که نشان دهنده شدت نویز وارد شده به سیستم است و W_t یک فرآیند وینر است.

در ادامه به معرفی یک چهارچوب و قالب کلی برای تحلیل پویایی سیستم های دینامیکی تصادفی دو بعدی خواهیم پرداخت [۲].

۱.۲. تحلیل دینامیک سیستم تصادفی. ابتدا با در نظر گرفتن بسط تیلور توابع در نقطه $O(0, 0)$ سیستم (۲) را بازنویسی می کنیم سپس با تبدیل مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ و پارامتردهی جدید داریم:

$$(3) \quad \begin{cases} dr = \left[\left(\mu_1 + \frac{1}{\sqrt{e}} \mu_2 \right) r + \frac{1}{\lambda} \mu_3 r^3 \right] dt + \left(\frac{1}{\lambda} \mu_4 r^2 \right)^{\frac{1}{2}} dW_t \\ d\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \mu_5 + \frac{1}{\lambda} \mu_6 r^2 \right) dt + \left(\frac{1}{\lambda} \mu_7 \right)^{\frac{1}{2}} dW_t \end{cases}$$

که در آن پارامترهای جدید به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\left(e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^2 g_L k_m + g_L k_m + g_{Na} k_m}{C \left(1 + e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^2 k_m} - \frac{1}{2\tau(V)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{V_m}{k_m}} g_{Na} k_m + 2e^{\frac{V_m}{k_m}} g_L k_m - g_{Na} E_{Na} e^{\frac{V_m}{k_m}}}{C \left(1 + e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^2 k_m} \\
 \mu_2 &= 2\sigma^2 \\
 \mu_3 &= \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{V_m}{k_m}} g_{Na} \left(2k_m + E_{Na} - 2\left(e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^2 k_m + \left(e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^2 E_{Na} - 2E_{Na} e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)}{C \left(1 + e^{\frac{V_m}{k_m}}\right)^4 k_m^2} \\
 \mu_4 &= 4\sigma^2 \\
 \mu_5 &= -\frac{2g_K E_K}{C} + \frac{2e^{\frac{V_n}{k_n}}}{\left(1 + e^{\frac{V_n}{k_n}}\right)^2 k_n \tau(V)} \\
 \mu_6 &= \frac{1}{2} \frac{\left(e^{\frac{V_n}{k_n}}\right)^2 + e^{\frac{V_n}{k_n}} - 2\left(e^{\frac{V_n}{k_n}}\right)^2}{\left(1 + e^{\frac{V_n}{k_n}}\right)^4 k_n^2 \tau(V)}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

حال با اعمال معادله‌ی فوکر-پلانک دو متغیره بر روی سیستم تصادفی (۲) داریم:

$$p(x, y) = \begin{cases} \delta(x^2 + y^2), & \mu_4 \geq 16\mu_1 + \mu_2, \\ \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{16\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_4}{2\mu_4}} \cdot \exp\left(\frac{\mu_3}{\mu_4}(x^2 + y^2)\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{16\mu_1 + \mu_2 - \mu_4}{2\mu_4}\right) \left(-\frac{\mu_3}{\mu_4}\right)^{\frac{16\mu_1 + \mu_2 - \mu_4}{2\mu_4}}}, & \mu_4 < 16\mu_1 + \mu_2. \end{cases}
 \tag{5}$$

با حل معادله فوکر-پلانک متناظر با معادله‌ی مدول از سیستم (۳) بر اساس روشی که در [۲] بیان شده است به تابع چگالی به فرم زیر دست پیدا می‌کنیم. در نتیجه تحلیل‌های خود را بر روی این تابع چگالی انجام می‌دهیم که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

$$p(r) = \begin{cases} \delta(r), & \mu_4 \geq 16\mu_1 + \mu_2, \\ \frac{r^{\frac{16\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_4}{\mu_4}} \cdot \exp\left(\frac{\mu_3}{\mu_4} r^2\right)}{\Gamma\left(\frac{16\mu_1 + \mu_2 - \mu_4}{2\mu_4}\right) \left(-\frac{\mu_3}{\mu_4}\right)^{\frac{16\mu_1 + \mu_2 - \mu_4}{2\mu_4}}}, & \mu_4 < 16\mu_1 + \mu_2. \end{cases}
 \tag{6}$$

پارامترهای (؟؟) اساس کار تجزیه و تحلیل پویایی سیستم‌های دینامیکی تصادفی می‌باشند. در ادامه به بیان چند قضیه در مورد تحلیل انشعاب‌های سیستم‌های دینامیکی تصادفی می‌پردازیم که همگی بر پایه‌ی پارامترهای (؟؟) استوار هستند.

۳. انشعاب‌های سیستم تصادفی

در نظریه‌ی انشعاب در سیستم‌های تصادفی دو نوع انشعاب اصلی وجود دارد: انشعاب D و انشعاب P [۳]. وقتی که سیستم تصادفی در اطراف نقطه تکین از حالت پایدار به ناپایدار تغییر وضعیت دهد گوییم انشعاب دینامیک یا انشعاب D

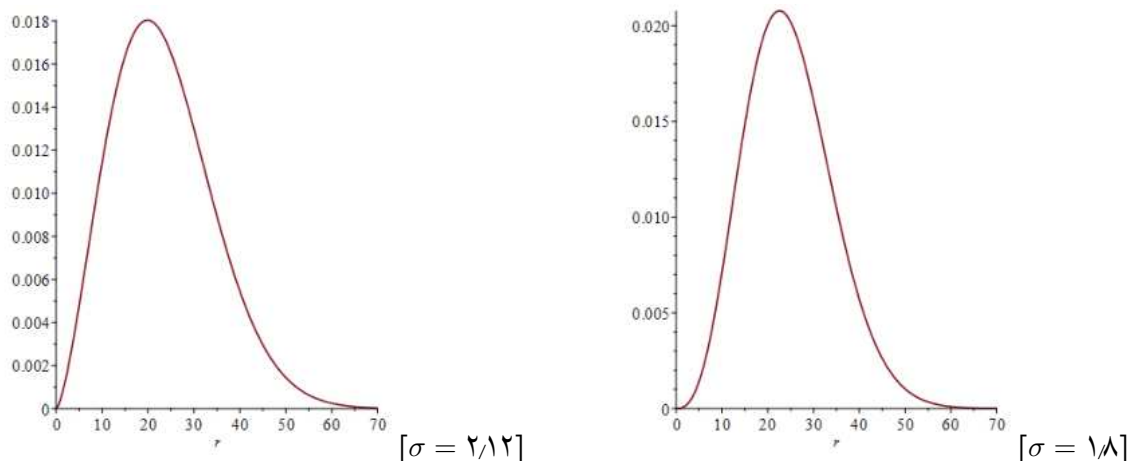
رخ داده است. انشعاب P به معنای تغییرات در شکل تابع چگالی احتمال است [۲]. در اینجا فرض می‌کنیم که $\mu_3 < 0$ و $\mu_4 > 0$.

قضیه ۱.۳. برای سیستم تصادفی (۳) در $\mu_4 = 16\mu_1 + \mu_2$ انشعاب D رخ می‌دهد به عبارت دیگر مقدار پارامتر μ_4 از مقدار $16\mu_1 + \mu_2$ بگذرد.

قضیه ۲.۳. برای سیستم تصادفی (۳) انشعاب P رخ می‌دهد هرگاه: مقدار پارامتر μ_4 از مقادیر $8\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2$ و $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3}$ بگذرد.

۴. نتایج عددی

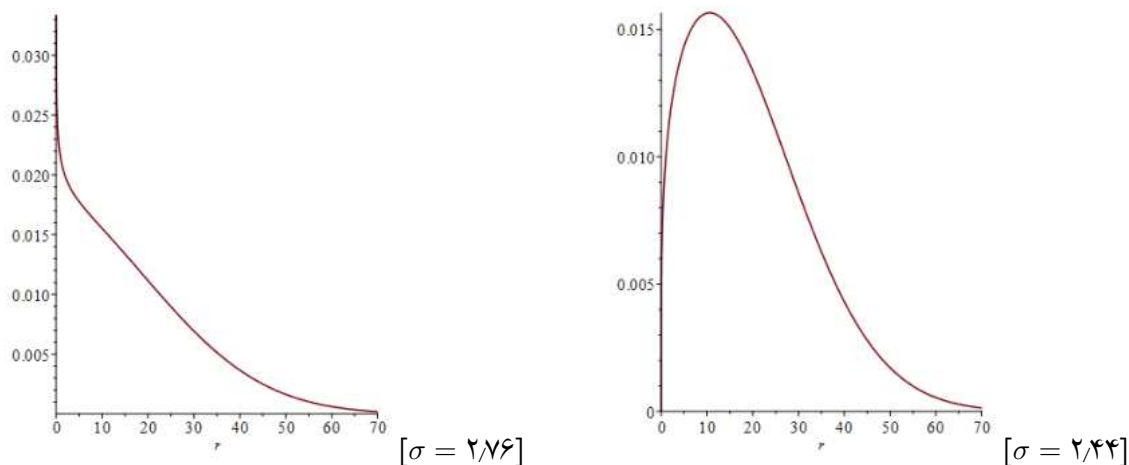
در این بخش به بررسی و تحلیل رفتارهای انشعابی سیستم تصادفی (۲) بر اساس دستورکار معرفی شده در [۲] می‌پردازیم.



شکل ۱. چگالی احتمال $p(r)$ برای مقدار نویزهای قبل از اولین نقطه‌ی انشعاب یعنی $8\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2$

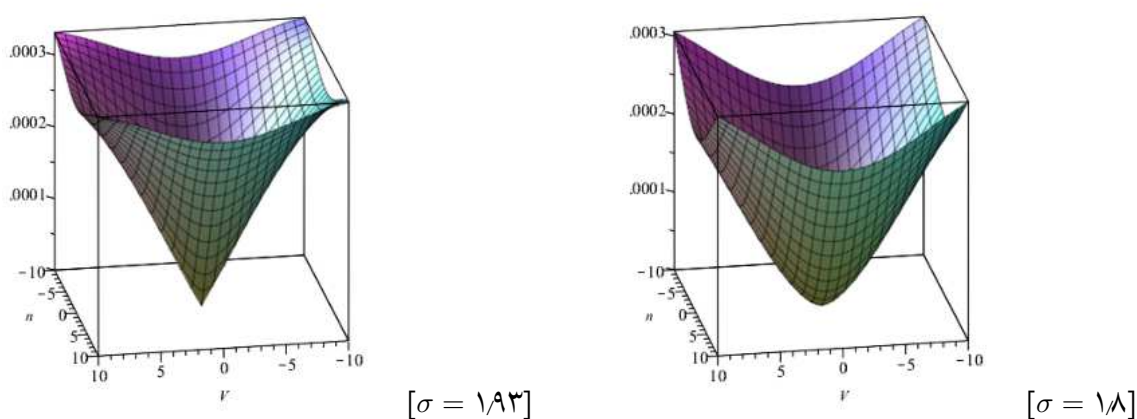
$$\sigma = 8000/1 \quad \mu_4 = 9600/12 \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 8642/19 \quad 7964/29$$

$$\sigma = 1200/2 \quad \mu_4 = 9776/17 \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 7005/20 \quad 8\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 = 5083/1$$

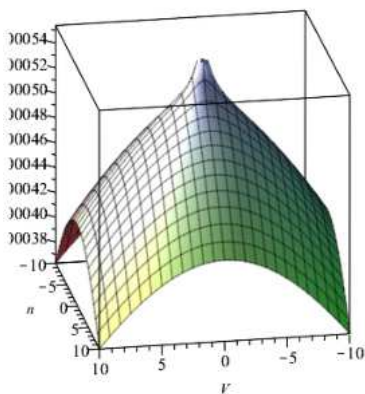


شکل ۲. چگالی احتمال $p(r)$ برای مقدار نویزهای بین دو نقطه‌ی انشعاب یعنی
 $\sigma = 7600/2$ $\mu_4 = 470430$, $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 7826/22$, $8\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 = 1740/34$,
 و
 $\sigma = 800/3$ $\mu_4 = 9456/37$, $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 285/24$, $8\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 = 428/36$,

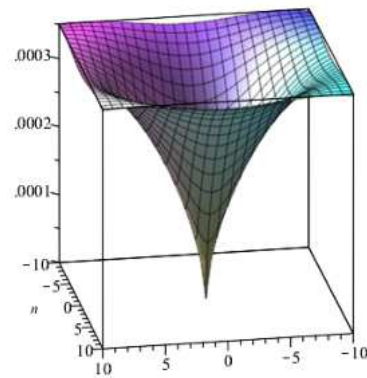
مانند حالت یک بعدی با مقداری از جدول ۱ مربوط به نورون‌های آستانه بالا به عبارت بدست آمده در تابع چگالی دو بعدی فوق و همچنین برای مقادیر مختلف σ به جدول زیر دست پیدا می‌کنیم. تحلیل را این‌گونه پیش خواهیم برد که مقادیری از σ را پیدا می‌کنیم که مقدار عبارت μ_4 از میان مقادیر عبارات $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3}$ و $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{4}$ بگذرد. حاصل این نتایج را در نمودارهای بعدی مشاهده خواهیم کرد.



شکل ۳. چگالی احتمال توأم $p(x, y)$ برای مقدار نویزهای قبل از اولین نقطه‌ی انشعاب یعنی
 $\sigma = 8000/1$ $\mu_4 = 9600/12$, $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 8982/14$, $8\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 = 8642/19$,
 و
 $\sigma = 9300/1$ $\mu_4 = 8996/14$, $\frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 1406/15$, $8\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 = 1875/20$,



$[\sigma = 2/19]$



$[\sigma = 2/6]$

شکل ۴. چگالی احتمال توأم $p(x, y)$ برای مقدار نویزهای بین دو نقطه‌ی انشعاب یعنی $8\mu_1 +$

$$\sigma = 1900/2 \quad \mu_2 = 1844/19, \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 6762/15, \quad \frac{1}{4}\mu_2 = 9016/20,$$

$$\text{و} \quad \sigma = 3200/2 \quad \mu_2 = 5296/21, \quad \frac{16\mu_1 + \mu_2}{3} = 9694/15, \quad 8\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 = 2925/21,$$

مراجع

1. E. M. Izhikevich, Dynamical systems in neuroscience. MIT press; (2007).
2. C. Luo and S. Guo, *Stability and bifurcation of two-dimensional stochastic differential equations with multiplicative excitations*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. 40(2) (2017), 795–817.
3. L. Arnold, Stochastic differential equations as dynamical systems. In Realization and Modelling in System Theory (1990).
4. P. E. Greenwood and M. L. Ward, Stochastic neuron models. Vol. 1. Springer, (2016).