مثلثی زیبا بین سیستم‌های دینامیکی، جبر و ترکیبیات

حسن ملکی[۱،*] ، الهام درویش علیمرادی[۲]

[۱]دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

[۲]دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

چکیده. در دهه‌های اخیر بین سیستم‌های مینیمال کانتور در شاخهٔ سیستم‌های دینامیکی، گروه‌های بُعدی در شاخهٔ جبر و دیاگرام‌های براتلی در شاخهٔ ترکیبیات رابطه‌های دوسویه‌ای پدیدار شده که در نوع خود جذاب، کاربردی و زیباست. در این مقاله در نظر داریم با معرفی هرکدام از این مفاهیم، نمایی از ارتباط بین آنها را به نمایش گذاریم.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های دینامیکی مینیمال کانتور، گروه‌های بُعدی، دیاگرام‌های براتلی.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 37B05, 05C63, 06F15.

---

۱. مقدمه

در ریاضیات، سیستم‌های دینامیکی به طور وسیعی با نگاشت‌های یک فضا سر و کار دارند. فضاهای مورد بحث معمولا دارای نوعی ساختار هندسی یا اندازه‌پذیر هستند. در بیشتر موارد، ما خود را به نگاشت‌های یک فضا که پیوسته و معکوس‌پذیر باشند، محدود می‌کنیم. بهترین ویژگی این نگاشت‌ها این است که خودشان و معکوس‌شان، می‌توانند تکرار شوند. چنین سیستم‌هایی طیف وسیعی از پدیده‌های مختلف را به نمایش می‌گذارند. متداول است که توجه و بررسی خود را به یک کلاس با ویژگی‌های خاص معطوف کنیم.

ما دو محدودیت خاص خواهیم داشت. اول این که سیستم ما معمولا مینیمال است؛ یعنی اگر نگاشت $\varphi : X \to X$ را در نظر بگیریم، آنگاه برای هر $x \in X$، مدار x که به صورت $O(x) = \{\varphi^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ تعریف می‌شود، در X چگال است. به صورت شهودی، این نشان می‌دهد که سیستم دارای پیچیدگی خاصی است: هر نقطه تحت تکرار نگاشت φ به هر زیرمجموعهٔ باز فضا منتقل می‌شود. این معادل است با این که هیچ زیرمجموعهٔ ناتهی سرهٔ فشرده از X وجود ندارد که تحت φ به خودش نگاشته شود. مطالعهٔ دینامیک این فضاها با تجزیهٔ آنها به قسمت‌های کوچکتر غیرممکن است. به عبارت دیگر، سیستم قابل تقلیل نمی‌باشد.

دومین محدودیتی که ما روی سیستم اعمال می‌کنیم این است که فضای حالت X، کلاً ناهمبند باشد؛ به این معنی که تنها زیر مجموعه‌های ناتهی و همبند این فضا، تک نقطه‌ای‌ها هستند. برخی از مفاهیم سیستم‌های دینامیکی همچون هم‌ارز مداری در حیطهٔ فضاهای توپولوژیک همبند، خیلی جالب و کارآمد نیست. مجموعه‌های کانتور که فشرده، کلاً ناهمبند و بدون نقطهٔ تنها هستند، جایگزین مناسبی برای این فضاها به حساب می‌آیند. این مجموعه‌ها ممکن است کمی غیرطبیعی به نظر بیایند اما دارای یک خاصیت عمومی جالب هستند. هر فضای متریک فشرده، تصویر پیوسته یک فضای کانتور است [۴].

*سخنران. آدرس ایمیل: hmaleki@malayeru.ac.ir

سیستم‌های مینیمال روی فضاهای کانتور، در حالی که به خودی خود، خاص و جذاب هستند، دارای یک خاصیت عمومی و جهانی در بین سیستم‌های دیگر نیز می‌باشند. یک نتیجهٔ مهم دربارهٔ این فضاها قضیهٔ جویت-کریگر[1] است که بیان می‌کند هر سیستم اندازه‌پذیری که تقلیل‌ناپذیر باشد، را می‌توان با یک سیستم مینیمال روی یک مجموعهٔ کانتور مدل‌سازی کرد [۴]. بنابراین مطالعهٔ سیستم‌های مینیمال روی فضاهای کانتور در نظریهٔ سیستم‌های دینامیکی گسسته از جایگاه مهمی برخوردار است. یک خاصیت مهم دیگر این فضاها این است که آن‌ها دارای ساختاری هستند که تا حد زیادی ترکیبیاتی است. مهم‌تر از همه، این نوع سیستم‌های دینامیکی را به طور طبیعی می‌توان از جانشانی‌ها، زیرانتقال‌ها و دیگر ساختارهای نمادین یا ترکیبیاتی به دست آورد. مطالعه سیستم‌های مینیمال روی مجموعه‌های کانتور طی سه دههٔ گذشته پیشرفت چشمگیری داشته است. نقطه شروع، کارهای آناتولی ورشیک[2] بوده است [۲].

از سوی دیگر، ارتباطی دو سویهٔ بین سیستم‌های مینیمال کانتور و نوع خاصی از گروه‌ها به نام «گروه‌های بُعدی»[3] وجود دارد. گروه‌های بُعدی بر اساس مفهوم گروه‌های آبلی مرتب تعریف می‌شوند. گروه‌های بُعدی که توسط الیوت[4] در سال ۱۹۷۶ معرفی شدند برای کلاس بندی AF-جبرها به کار گرفته می‌شوند [۴]. کلمه «بُعد» در مفهوم گروه‌های بُعدی به ارتباط این گروه‌ها با ابعاد برخی از جبرها اشاره دارد. این جبرها خودشان به عنوان کلاسی از C^*-جبرها، حدهای مستقیم جبرهای با بُعد متناهی هستند که برای اولین بار، توسط براتلی[5] در سال ۱۹۷۲ معرفی شدند [۳]. این جبرها از نوع خاصی از گراف‌ها ساخته می‌شوند که به آنها «دیاگرام براتلی» می‌گویند. ارتباط بین گروه‌های بُعدی و نظریه سیستم‌های دینامیکی توسط ورشیک[6] در سال ۱۹۸۲ برقرار شد [۲]. او یک ترتیب روی مسیرهای دیاگرام براتلی به کار گرفت تا روی همه مسیرهای متناهی دیاگرام یک سیستم دینامیکی توپولوژیک تعریف کند. سپس نشان داده شد که هر سیستم دینامیکی مینیمال روی یک فضای کانتور با چنین سیستمی یکریخت است و در نتیجه به هر سیستم کانتور مینیمال یک گروه بُعدی نسبت داده شد [۴]. کارهای بعدی نشان داد که این گروه، با ساختار مداری یک سیستم دینامیکی مینیمال کانتور مرتبط است [۲]. از سوی دیگر، بین دیاگرام‌های براتلی که نوعی خاص از گراف‌ها هستند و سیستم‌های مینیمال کانتور نیز ارتباط تنگاتنگ و مهمی وجود دارد که مطالعهٔ هر یک از این مفاهیم را دقیق‌تر و عمیق‌تر می‌کند.

۲. تعاریف

۱.۲. سیستم‌های مینیمال کانتور.

تعریف ۱.۲. فرض کنید (X,T) که $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته است، یک سیستم دینامیکی توپولوژیک باشد. زیرمجموعهٔ $Y \subseteq X$ را پایدار گویند هرگاه $TY \subseteq Y$ باشد. سیستم دینامیکی توپولوژیک (X,T) را مینیمال گویند هرگاه X تنها زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته و پایدار X باشد.

می‌توان نشان داد سیستم دینامیکی توپولوژیک (X,T) مینیمال است اگر و تنها اگر مدار مثبت هر عضو در X چگال باشد [۲]. به علاوه می‌توان دید هر فضای متریک فشرده‌ای تصویر پیوستهٔ یک مجموعهٔ کانتور است [۴]. فرض می‌کنیم (X,T) یک سیستم مینیمال روی فضای متریک فشردهٔ X است. بنا بر قضیهٔ فوق، یک نگاشت پیوسته و پوشا مانند $F : C \to X$ وجود دارد به طوری که C یک مجموعهٔ کانتور است. حال قرار می‌دهیم:

$$K = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \in C, F(x_{n+1}) = T(F(x_n))\}$$

که $K \subseteq C^{\mathbb{Z}}$. مجموعهٔ K و نگاشت انتقال $\sigma : K \to K$ را با ضابطهٔ $\sigma(x) = y$ که در آن $y_n = x_{n+1}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت زیرفضای مینیمال (Z,σ) از (K,σ) وجود دارد به قسمی که $\psi \circ \sigma = T \circ \psi$. به عبارت بهتر برای هر سیستم مینیمال روی یک فضای متریک فشرده یک فاکتور مینیمال روی یک فضای کانتور وجود دارد. بنابر این $Z \subseteq K \subseteq C^{\mathbb{Z}}$ بسته و در نتیجه یک فضای کانتور است [۲].

[1] Jewett-Krieger
[2] Anatoly Vershik
[3] Dimension Groups
[4] Elliott
[5] Bratelli
[6] Vershik

۲.۲. **گروه‌های مرتب.** ساختارهای جبری مرتب به ویژه میدان‌های مرتب، گروه‌های مرتب و فضاهای برداری مرتب زمینه‌های شناخته شده و کلاسیکی هستند که هم به خاطر جذابیت‌های ذاتی و هم به خاطر کاربرد در شاخه‌های دیگر در ریاضیات بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. شروع داستان، تحت تأثیر مطالعات آنالیز تابعی توسط رایز در سال ۱۹۴۰ به معرفی فضاهای برداری مرتب انجامید. پس از آن به کمک برخی از همان تکنیک‌هایی که در آنجا مورد استفاده قرار گرفته بود، گروه‌های مرتب معرفی شدند [۳].

تعریف ۲.۲. گروه آبلی $(G,+)$ همراه با رابطهٔ ترتیب جزئی $\leqslant$ را گروه مرتب گویند هرگاه عمل $+$ با رابطهٔ $\leqslant$ سازگار باشد؛ به این معنی که برای هر $g,h,k\in G$ که $g\leqslant h$ داشته باشیم: $g+k\leqslant h+k$. در گروه مرتب G، مخروط مثبت G مجموعهٔ $G^+=\{g\in G \mid g\geqslant ۰\}$ تعریف می‌شود.

در یک گروه مرتب، می‌توان گفت $x\leqslant y$ اگر و تنها اگر $y-x\geqslant ۰$. در یک گروه مرتب، نامساوی‌ها را با حفظ جهت می‌توان با یکدیگر جمع کرد. به عبارت بهتر اگر $x_۱,y_۱,x_۲,x_۲,\dots,x_n,y_n\in G$ به گونه‌ای که به ازای هر i، $x_i\leqslant y_i$ آنگاه $\Sigma x_i\leqslant \Sigma y_i$. به علاوه، می‌توان نتیجه گرفت که اگر $x\leqslant y$ آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داریم $nx\leqslant ny$. همچنین اگر $x\leqslant y$ آنگاه $-y\geqslant -x$. یک گروه مرتب G را جهت‌دار گویند هرگاه برای هر $x,y\in G$، یک $z\in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $x,y\leqslant z$. به عبارت دیگر، G جهت‌دار است اگر هر جفت از عناصر آن، یک کران بالای مشترک داشته باشند. می‌توان نشان داد گروه مرتب G جهت‌دار است اگر و تنها اگر توسط مخروط مثبتش تولید شده باشد، یعنی $G=G^+-G^+$ [۳]. یک ایده‌آل ترتیب از گروه مرتب G زیرگروه جهت‌دار $J\subseteq G$ است به قسمی که اگر $x_۱,x_۲\in J$ و $y\in G$ و $x_۱\leqslant y\leqslant x_۲$ آنگاه $y\in J$. یک واحد ترتیب از گروه مرتب G، یک عنصر مثبت u است، به طوری که به ازای هر $g\in G^+$، یک عدد صحیح $n>۰$ وجود داشته باشد به قسمی که $g\leqslant nu$. گروه مرتب $\mathcal{G}=(G,G^+)$ را ساده گویند اگر دارای هیچ ایده‌آل ترتیب سرهٔ ناتهی نباشد. می‌توان نشان داد گروه مرتب جهت‌دار (G,G^+) ساده است اگر و تنها اگر هر عنصر غیرهمانی (نا صفر) از G^+ یک واحد ترتیب باشد [۳]. گروه مرتب (G,G^+) را بدون حفره گویند هرگاه برای هر $g\in G$ و $n>۰$ اگر $ng\in G^+$ آنگاه $g\in G^+$. در غیر این صورت، گروه دارای حفره است. در گروه مرتب بدون حفره (G,G^+) اگر برای $g,h\in G$ و $n>۰$ داشته باشیم $ng\geqslant nh$ آنگاه $g\geqslant h$. گروه مرتب G در خاصیت درونیابی رایز صدق می‌کند اگر برای هر $x_۱,x_۲,y_۱,y_۲\in G$ به طوری که داشته باشیم $x_۱\leqslant y_۱,y_۲$ و $x_۲\leqslant y_۱,y_۲$، یک $z\in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $x_۱,x_۲\leqslant z\leqslant y_۱,y_۲$.

فرض کنید برای هر $n\geqslant ۰$، گروه G_n یک گروه آبلی و نگاشت $i_{n+۱,n}:G_n\to G_{n+۱}$ یک همریختی باشد. مجموعه‌های

$$\Delta=\{(g_n)_{n\geqslant ۰}\mid g_n\in G_n,\ g_{n+۱}=i_{n+۱,n}(g_n),\quad \forall n\geqslant m,\ \forall m\geqslant ۰\}$$

و

$$\Delta^\circ=\{(g_n)_{n\geqslant ۰}\in\Delta\mid\ g_n=۰,\quad \forall n\geqslant m,\ \exists m\geqslant ۰\}$$

زیرگروه‌هایی از حاصلضرب مستقیم $\prod_{n\geqslant ۰}G_n$ هستند و $\Delta^\circ\subset\Delta$. فرض کنید G گروه خارج قسمتی $G=\Delta/\Delta^\circ$ و $\pi:\Delta\to G$ تصویر طبیعی باشد. گروه G که با نماد $G=\varinjlim G_n$ نشان داده می‌شود را حد مستقیم از دنبالهٔ $(G_n)_{n\geqslant ۰}$ با نگاشت‌های $i_{n+۱,n}$ گویند. نگاشت‌های $i_{n+۱,n}$ و در حالت کلی نگاشت‌های $i_{m,n}=i_{m,m-۱}\circ i_{m+۱,m}\cdots\circ i_{n+۱,n}$ برای $n<m$، همریختی‌های اتصال‌دهنده نامیده می‌شوند. فرض کنید $\mathcal{G}_n=(G_n,G_n^+,۱_n)$ برای هر $n\geqslant ۰$، یک گروه مرتب یکدار جهت‌دار و $i_{n+۱,n}:G_n\to G_{n+۱}$ یک همریختی از گروه‌های مرتب یکدار باشد. حال فرض کنید G حد مستقیم دنبالهٔ $(G_n)_{n\geqslant ۰}$ و $G^+=\pi(\Delta^+)$، که

$$\Delta^+=\{(g_n)_{n\geqslant ۰}\mid g_n\in G_n^+,\quad \forall n\geqslant m,\exists m\geqslant ۰\}$$

و $۱_G=\pi(۱_{G_n})_{n\geqslant ۰}$.

گزاره ۳.۲. [۱] سه‌تایی $\mathcal{G}=(G,G^+,۱)$ یک گروه مرتب یکدار جهت‌دار، هر $i_n:\mathcal{G}_n\to\mathcal{G}$ یک همریختی از گروه‌های مرتب یکدار و $G^+=\bigcup i_n(G_n^+)$ است.

تعریف ۴.۲. یک گروه بُعدی، حد مستقیم دنبالهٔ

$$\mathbb{Z}^{k_۱}\xrightarrow{M_۱}\mathbb{Z}^{k_۲}\xrightarrow{M_۲}\mathbb{Z}^{k_۳}\dots$$

ازگروه‌های $\mathbb{Z}^{k_i}$ با $k_i \geqslant ۱$، مرتب شده با ترتیب معمولی و با واحد ترتیب $(۱,\ldots,۱)$، همراه با همریختی‌های تعریف شده توسط ماتریس‌های نامنفی M_i است.

۳.۲. گروه کوهمولوژی مرتب یک سیستم دینامیکی. فرض کنید (X,T) یک سیستم دینامیکی توپولوژیک روی یک فضای متریک فشرده و T یک نگاشت پیوسته باشد. در اینصورت $C(X,\mathbb{R})$ را گروهی از همهٔ نگاشت‌های حقیقی مقدار پیوسته روی X و $C(X,\mathbb{Z})$ را زیرگروهی از همهٔ نگاشت‌های مقدار صحیح پیوسته روی X تعریف می‌کنیم. اگر X یک فضای توپولوژیک همبند باشد، برای هر $f \in C(X,\mathbb{Z})$، $f(X) \subseteq \mathbb{Z}$ نیز همبند است و از آنجا که تنها مؤلفه‌های همبندی $\mathbb{Z}$ تک نقطه‌ای‌ها هستند، بنابراین f نیز نگاشت ثابت می‌شود و در نتیجه $C(X,\mathbb{Z})$ تنها شامل نگاشت‌های ثابت است. اما زمانی که X یک فضای فشرده و کلاً ناهمبند است، ساختار $C(X,\mathbb{Z})$ متفاوت و درخور توجه خواهد بود. برای هر $f \in C(X,\mathbb{R})$، هم‌کران f را به عنوان نگاشت $\partial_T : C(X,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $\partial_T(f) = f \circ T - f$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت، نگاشت $f \in C(X,\mathbb{R})$ را نگاشت هم‌کران گویند اگر یک نگاشت $g \in C(X,\mathbb{R})$ وجود داشته باشد به قسمی که $f = \partial_T(g)$. فرض کنید (X,T) یک سیستم دینامیکی توپولوژیک باشد. از آن جا که نگاشت هم‌کران روی $C(X,\mathbb{Z})$، یک همریختی گروهی است، تصویر $\partial_T C(X,\mathbb{Z})$ یک زیرگروه است. بنابراین، ما گروه خارج قسمتی $C(X,\mathbb{Z})\big/\partial_T C(X,\mathbb{Z})$ را با نماد $H(X,T,\mathbb{Z})$ نمایش می‌دهیم. سپس، تصویر $C(X,\mathbb{Z}_+)$ را با $H^+(X,T,\mathbb{Z}_+)$ نشان می‌دهیم. در نهایت، سه‌تایی

$$K^\circ(X,T) = (H(X,T,\mathbb{Z}), H^+(X,T,\mathbb{Z}_+), ۱_X),$$

را نمایش می‌دهیم و به آن گروه کوهمولوژی مرتب سیستم دینامیکی (X,T) گوییم که در آن ۱_X، تصویر یک نگاشت ثابت با مقدار ۱ روی X در $H(X,T,\mathbb{Z})$ است.

۴.۲. دیاگرام‌های براتلی. اکنون مفهوم دیاگرام براتلی را معرفی می‌کنیم. اگرچه این دیاگرام نامتناهی است، اما یک شیِٔ کاملاً ترکیبیاتی است. این دیاگرام یک نوع گراف نامتناهی است. این گراف که آن را با نماد (V,E) نشان می‌دهیم، از یک دنباله از مجموعه‌های رئوس $V_\circ, V_۱, V_۲, \ldots$ که همگی ناتهی و دو به دو مجزا هستند و هر V_i دارای تعداد متناهی رأس است، تشکیل شده است. ما فرض می‌کنیم که $V_\circ$ تنها یک رأس دارد که آن را با نماد $v_\circ$ نشان می‌دهیم. همچنین این گراف یک دنباله از مجموعه‌های یال‌های $E_۱, E_۲, \ldots$ تشکیل شده است که همگی ناتهی و دو به دو مجزا هستند و هر E_i دارای تعداد متناهی یال است. هر یال از مجموعهٔ E_n از یک رأس در $V_{n-۱}$ به رأسی در V_n می‌رود. به این صورت می‌توان یک جهت روی یال‌ها در نظر گرفت. در هر دیاگرام براتلی برای هر $n \geqslant ۱$ دو نگاشت $s : E_n \to V_{n-۱}$ و $r : E_n \to V_n$ وجود دارد که برای هر $v \in \bigcup_{n\geqslant\circ} V_n$، داریم $s^{-۱}\{v\} \neq \varnothing$ و برای هر $v \in \bigcup_{n\geqslant ۱} V_n$ داریم $r^{-۱}\{v\} \neq \varnothing$. به ترتیب آن‌ها را نگاشت مبدأ و نگاشت برد یا مقصد می‌نامیم. حال فرض کنید

$$X_E = \{(x_۱, x_۲, \ldots) \mid x_n \in E_n, r(x_n) = s(x_{n+۱}), n \geqslant ۱\}.$$

متر $d : X_E \times X_E \to [\circ,\infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x,y) = \inf\{۱, ۲^{-n} \mid n \geqslant ۱, (x_۱, x_۲. \ldots, x_n) = (y_۱, y_۲, \ldots, y_n)\}.$$

می‌توان نشان داد که (X_E, d) یک فضای متریک فشرده کانتور است که روی آن یک نگاشت مینیمال وجود دارد [۱].

۳. نتایج اصلی

قضیهٔ مهم زیر، که به قضیهٔ اِفرس ـ هندلمن ـ شِن معروف است، گروه‌های بُعدی را در میان گروه‌های مرتب شمارا مشخص می‌کند.

قضیه ۱.۳. [۲] یک گروه مرتب شمارا، گروه بُعدی است اگر و تنها اگر یک گروه مرتب یکدار رایز جهت‌دار بدون حفره باشد.

قضیهٔ زیر برای هر سیستم مینیمال کانتور یک گروه مرتب یکدار جهت‌دار ساده بدون حفره معرفی می‌کند:

قضیه ۲.۳. [۱] برای هر سیستم کانتور مینیمال (X,T)، $K^\circ(X,T)$ یک گروه مرتب یکدار جهت‌دار ساده بدون حفره است.

قضیه ۳.۳. [۲] اگر سیستم‌های دینامیکی (X,T) و (X',T') به صورت توپولوژیک مزدوج باشند آنگاه گروه‌های وابسته $H(X,T,\mathbb{Z})$ و $H(X',T',\mathbb{Z})$ یکریخت هستند.

قضیهٔ زیر متناظر با هر سیستم مینیمال کانتور یک دیاگرام براتلی مشخص می‌کند:

قضیه ۴.۳. [۲] فرض کنید (X,φ) یک سیستم مینیمال کانتور است. آنگاه یک دیاگرام براتلی مرتب سادهٔ $(V,E,\geqslant)$ و یک همسانریختی $h: X_E \to X$ وجود دارد به قسمی که $h\circ\varphi_E = \varphi\circ h$ و $h(x_{\max}) = y$.

مراجع

1. Durand, F., Perrin, D.: Dimension groups and dynamical systems. arXiv:2007.15721 (2020).
2. Durand, F., Perrin, D.: Dimension Groups and Dynamical Systems, Substitutions, Bratteli Diagrams and Cantor Systems, Cambridge University Press, (2020). (preprint)
3. Goodearl, K.R.: Partially Ordered Abelian Groups with Interpolatio, Math. Surveys and Monographs No. 20, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (1986).
4. Ian, F., Putnam.: Cantor Minimal Systems. Amer. Math. Society, (2018).