



متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیکی

جواد جمالزاده^{۱*}، مهرداد کهرازه^۲

^۱: گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

چکیده. یکی از مهم‌ترین بخش ساختارهای توپولوژیکی، متریک‌پذیری می‌باشد که شرایطی را به وجود می‌آورد تا یک مترمانند d یافت شود به طوریکه توپولوژی به دست آمده از این متر، با توپولوژی اولیه یکسان باشد. در این دست‌نوشته در پی آن هستیم که پلی‌گروه‌های توپولوژیکی را متریک‌پذیر سازیم. این مهم را به کمک تعریف پیش‌نرم روی پلی‌گروه‌های توپولوژیکی انجام می‌دهیم و در نهایت قضیه اساسی متریک‌پذیری را روی پلی‌گروه‌های توپولوژیکی اثبات می‌کنیم. **واژه‌های کلیدی:** متریک‌پذیری، پلی‌گروه توپولوژیکی، پیش‌نرم. **طبقه‌بندی موضوعی** [۲۰۲۰]: 20N20, 22A30.

۱. مقدمه

یکی از مهمترین موضوعات مطرح شده روی فضاها توپولوژیک، بحث متریک‌پذیری و نرم روی آنها است و دلیل آن، خواص توپولوژیکی گسترده فضاها متریک و نرم‌دار است به‌خصوص در ساختارهای جبری توپولوژیک که نزدیکی خاصی با $\mathbb{R}$ و فضاها برآمده از آن دارد. به‌عنوان مثال، در گروه‌های توپولوژیک به‌عنوان یک ساختار جبری توپولوژیک خواص بسیار نزدیکی با فضاها متریک و نرم‌دار، مانند کاملاً منظم بودن، هاسدورف بودن و ... دارد. از جهت متریک‌پذیری نیز یک قضیه شگفت‌انگیز به نام قضیه بیرخوف-کاکوتانی وجود دارد که بیان می‌کند، یک گروه توپولوژیک متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر شمارای نوع اول باشد [۲].

با توجه به اینکه پلی‌گروه‌های توپولوژیکی یک فضای توپولوژیکی می‌باشند، لذا در این مقاله برآن شده‌ایم که ساختار مشابه با قضیه بیرخوف-کاکوتانی را ارائه دهیم تا بتواند به کمک پیش‌نرم موارد مشابهی با گروه‌های توپولوژیک را ارائه نماید و ساختار پلی‌گروه‌های توپولوژیک را به فضاها متریک نزدیک سازد. اکنون به تشریح ساختار ابرگروه توپولوژیک می‌پردازیم. فرض کنید H یک مجموعه ناتهی باشد و $P^*(H)$ گردایه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های H بجز تهی باشد. یک نگاشت

$$o : H \times H \rightarrow P^*(H)$$

را که دارای دو خاصیت زیر باشد ابرگروه می‌گویند:

$$\forall a, b, c \in H : ao(boc) = (aob)oc \quad (1)$$

$$\forall a \in H : aoH = Hoa \quad (2)$$

این ساختار اولین بار توسط مارتی [۱۴] در سال ۱۹۳۴ ارائه شده است. سپس در سال‌های متمادی توسط کوسکاس [۱۳]، کوسینی [۴، ۳]، دواز [۵، ۶] و جعفرآبادی [۱۱] مورد مطالعه و گسترش قرار گرفته است که کاربردهای زیادی در علوم

*سخنران. آدرس ایمیل: jamalzadeh1980@math.usb.ac.ir

محض و کاربردی در موضوعات هندسی، ابرگراف‌ها، شبکه‌ها، مجموعه‌های فازی، ترکیبیات، کدگذاری و هوش مصنوعی دارد ([۶] را ببینید).

ساختارهای جبری همراه با توپولوژی نقش مهمی در ریاضیات دارند. اخیراً ریاضیدانان روی ابرساختارهای جبری، توپولوژی تعریف کرده‌اند. عامری [۱] و هوشگوا [۱۰]، ابرگروه‌های $\mathcal{T}_u$ (توپولوژیکی را تعریف و بررسی کرده‌اند. حیدری [۹] این توپولوژی را روی ابرگروه‌ها قرارداد. حال در لم زیر یک توپولوژی روی $P^*(H)$ تعریف می‌کنیم.

لم ۱.۱. [۱۰] فرض کنید $(H, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه خانواده‌ی $\mathcal{l}$ شامل همه‌ی مجموعه‌های

$$S_v = \{U \in P^*(H) : U \subseteq V\}$$

و $V \in \mathcal{T}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}_u$ روی $P^*(H)$ است.

پلی‌گروه‌ها کلاس خاصی از ابرگروه‌ها هستند که برای اولین بار توسط لولیدیس در سال ۱۹۸۱ معرفی شدند. $P = (P, o, e, {}^{-1})$ یک پلی‌گروه است که در آن $e \in P$ و ${}^{-1}$ عمل معکوس روی پلی‌گروه P و (P, o) یک نیم‌ابرگروه است که:

$$(1) \quad \forall x \in P : eox = xoe = x$$

$$(2) \quad \forall x, y, z \in P : x \in yoz \Rightarrow y \in xoz^{-1}, z \in y^{-1}ox$$

در هر پلی‌گروه احکام زیر برقرار است:

$$e \in xox^{-1} \cap x^{-1}ox,$$

$$e^{-1} = e,$$

$$(x^{-1})^{-1} = x,$$

$$(xoy)^{-1} = y^{-1}ox^{-1}.$$

۲. پیش‌نرم روی پلی‌گروه‌های توپولوژیکی

در این بخش می‌خواهیم روی پلی‌گروه‌های توپولوژیکی پیش‌نرم تعریف کنیم که مقدمه‌ای است برای تعریف متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیکی.

تعریف ۱.۲. فرض کنید P یک پلی‌گروه بوده و N یک نگاشت روی P باشد، آنگاه یک نگاشت مانند $\tilde{N} : P^*(P) \rightarrow R$ با ضابطه‌ی $\tilde{N}(A) = \sup \{N(a) : a \in A\}$ را یک پیش‌نرم روی P گوئیم هرگاه:

$$P\tilde{N}(1) \tilde{N}(e) = 0$$

$$P\tilde{N}(2) \tilde{N}(x) = \tilde{N}(x^{-1})$$

$$P\tilde{N}(3) \tilde{N}(AB) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$$

مثال ۲.۲. فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط $\mathbb{R}^2$ باشد. برای $p, q \in P$ که $p \neq q$ ، $\overline{pq}$ را مجموعه‌ی همه‌ی نقاط روی خط گذرا از p و q فرض می‌کنیم، یعنی $\overline{pq} = rp + (1-r)q$ که $0 < r < 1$. شیء $I \notin P$ را انتخاب می‌کنیم و $P = (P \cup \{I\}, \circ, I, {}^{-1})$ را در نظر می‌گیریم که برای هر $x \in P \cup \{I\}$ و $x^{-1} = x$ ، $x \circ I = I \circ x = x$ و برای $p, q \in P$

$$p \circ q = \begin{cases} \overline{pq} - \{p, q\} & p \neq q \\ \{P, I\} & p = q \end{cases}$$

لذا $P = (P \cup \{I\}, \circ, I, {}^{-1})$ یک پلی‌گروه است. اکنون

$$\tilde{N}(pq) = \sup \{N(x) : x \in \overline{pq} - \{p, q\}\}$$

را تعریف می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$1) \quad \tilde{N}(I) = 0$$

$$2) \quad \tilde{N}(x) = \tilde{N}(x^{-1})$$

$$3) \quad \tilde{N}(pq) = \tilde{N}(rp + (1-r)q) = \tilde{N}(rp) + \tilde{N}((1-r)q) = r\tilde{N}(p) + (1-r)\tilde{N}(q) \leq \tilde{N}(p) + \tilde{N}(q)$$

و در نتیجه $\tilde{N}$ ، یک پیش‌نرم است.

گزاره ۳.۲. اگر $\tilde{N}$ یک پیش‌نرم روی P باشد، آنگاه برای هر $x \in P$ داریم: $\tilde{N}(x) \geq 0$.

گزاره ۴.۲. اگر $\tilde{N}$ یک پیش‌نرم روی پلی‌گروه P باشد، آنگاه برای هر $x, y \in P$ نامساوی زیر، برقرار است.

$$|\tilde{N}(x) - \tilde{N}(y)| \leq \tilde{N}(xy^{-1}).$$

گزاره ۵.۲. فرض کنید $\tilde{N}$ یک پیش‌نرم روی پلی‌گروه P بوده و α یک عدد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه تابع $\alpha\tilde{N}$ روی P با ضابطه $(\alpha\tilde{N})(x) = \alpha(\tilde{N}(x))$ برای هر $x \in P$ ، یک پیش‌نرم روی P است.

گزاره ۶.۲. برای هر پیش‌نرم $\tilde{N}$ روی پلی‌گروه P ، مجموعه

$$Z_{\tilde{N}} = \{x \in P : \tilde{N}(x) = 0\}$$

زیرپلی‌گروه P است.

گزاره ۷.۲. مجموع دو پیش‌نرم روی پلی‌گروه P ، یک پیش‌نرم روی P است.

لم ۸.۲. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار و کراندار و نامنفی روی پلی‌گروه P باشد، آنگاه تابع $\tilde{N}_f$ که

$$\tilde{N}_f(x) = \sup \{ \tilde{f}(yx) - \tilde{f}(y) | y \in P \}$$

و

$$\tilde{f}(xy) = \sup \{ f(t) : t \in xy \}$$

یک پیش‌نرم روی P است.

گزاره ۹.۲. پیش‌نرم $\tilde{N}$ روی پلی‌گروه توپولوژیکی P پیوسته است، اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه همسایگی U از e وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in U$ ، $\tilde{N}(x) \leq \epsilon$.

۳. متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیک

در این بخش می‌خواهیم در مورد متریک‌پذیری پلی‌گروه‌های توپولوژیک بحث کنیم. بدین منظور لم اساسی زیر را می‌آوریم.

لم ۱۰.۳. فرض کنید $\{U_n : n \in w\}$ یک دنباله از همسایگی‌های باز و متقارن e در پلی‌گروه توپولوژیکی P باشد. بطوریکه برای هر $n \in w$ ، $U_{n+1} \subseteq U_n$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} \left\{ A \in P^*(p) : \tilde{N}(A) < \frac{1}{4^n} \right\} &\subseteq U_n \\ &\subseteq \left\{ A \in P^*(p) : \tilde{N}(A) < \frac{2}{4^n} \right\} \end{aligned}$$

بنابراین پیش‌نرم $\tilde{N}$ پیوسته است. علاوه بر این اگر مجموعه‌های U_n پایا باشد.

تعریف ۲۰.۳. فرض کنید $\tilde{N}$ یک پیش‌نرم روی پلی‌گروه P باشد. در این صورت

$$\left\{ A \in P^*(P) : \tilde{N}(A) < 1 \right\}$$

یک $\tilde{N}$ -گوی واحد در P می‌نامیم و آن را با $B_{\tilde{N}}$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی $B_{\tilde{N}}(\epsilon) = \left\{ A \in P^*(p) : \tilde{N}(A) < \epsilon \right\}$ که ϵ عددی مثبت است را $\tilde{N}$ -گوی به شعاع ϵ می‌نامیم.

قضیه ۳.۳. (مارکوف) برای هر همسایگی باز U از e در پلی گروه توپولوژیکی P یک پیش نرم پیوسته مانند $\tilde{N}$ وجود دارد که گوی $B_{\tilde{N}}$ مشمول U است.

قضیه ۴.۳. (متریک پذیری) پلی گروه توپولوژیکی P ، متریک پذیر است، اگر و تنها اگر شمارای نوع اول باشد.

مراجع

1. R. Ameri, Topological(transposition) hypergroups, Itah. Pure Apple. Math. 13 (2003) 171-176.
2. A. V. Arhangel skii, M. G. Tkachenko, Topological Groups and Related Structure, Atlantis Studies in Mathematics, Vol. 1, Atlantis Press/World Scientifvc, Paris, 2008.
3. P. Corsini, Prolegomena of Hypergroup Theory, Aviani Editor, Tricesimo, 1993.
4. P. Corsini, V. Leoreanu, Application of Hyperstructures Theory, Advances in Mathematics, Kluwer Academic Publisher, Dor-drecht, 2003.
5. B. Davvaz, polygroup theory and related Systems, World Scientific Publishing Co. pte. Ltd., Hackensack, 2013.
6. B. Davvaz, V. Leorena-Fortea, Hypering Theory and applications, International Academic Press, Usb, 2007.
7. R. Engelking, General Topology, PWN-polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.
8. D. Heidari, S.M.S Modarres, B. Davvaz, Topological hypergroups in the sense of marty, Commun. Algebra 42(2014) 4712-4721.
9. D. Heidari, B. Davvaz, S.M.S Modarres, Topological polygroups, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35(2012) 335-343.
10. S. Hoskova-Mayerova, Topological hypergroupoids, Comput. Math. Soc. 22 (1981) 95-104.
11. H.M. Jafarabadi, N.H. Sarmin, M.R. Molaei, Completely Simple and regular semi hypergroups, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35 (2012) 335-343.
12. J. Jamalzadeh, Paratopological polygroups versus topological polygroups, Filomat 32:8 (2018), 2755-2761.
13. M. Koskas, Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes, J. Math. Pures Appl. 49:9 (1970) 155-192.
14. F. Marty, Sur une generalizatiom de la notion de groupe, 8th Congres Math. Scandinaves, Stockholm, 1934.