



بعد متوسط سیستم دینامیکی انبساطی پیوستار

زهره افچنگی*، و علی برزنونی^۱

^۱ دانشگاه حکیم سبزواری

چکیده. کاتو^۱ در [۲] نشان می‌دهد که اگر $f: X \rightarrow X$ همسانریختی انبساطی پیوستار باشد، آنگاه $\dim(X) < \infty$ ؛ یعنی بعد توپولوژیکی X متناهی است. در این ارائه، ما به معرفی سیستم دینامیکی $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ خواهیم پرداخت که $\dim(X) = \infty$. همچنین به معرفی مفهوم بعد متوسط سیستم دینامیکی $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ پرداخته و رابطه بین این مفهوم با مفهوم انبساطی پیوستار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. واژه‌های کلیدی: بعد توپولوژیکی، بعد متوسط سیستم دینامیکی، انبساطی پیوستار. طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۲۰]: 18A32, 18F20, 39B42.

۱. مقدمه

فرض کنیم (X, d) فضای متریک باشد. نگاشت $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ عمل گروه $\mathbb{Z}^k$ روی X خوانیم در صورتی که $\varphi(n, x) = \varphi(n, \varphi(m, x))$ و $x \in X$ برای هر $\varphi(n + m, x) = \varphi(n, \varphi(m, x))$ و $n, m \in \mathbb{Z}^k$ و $x \in X$. هرگاه عمل $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته باشد، آنگاه $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک سیستم دینامیکی خوانده می‌شود. به عنوان مثال، اگر $f: X \rightarrow X$ یک همسانریختی باشد و $\varphi: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ به وسیله $\varphi(n, x) = f^n(x)$ تعریف شود، آنگاه $\varphi: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ یک سیستم دینامیکی است که در این مقاله با (X, f) نمایش داده می‌شود. یکی از مفاهیم مهم سیستم‌های دینامیکی، مفهوم انبساطی است. این مفهوم اولین بار توسط اوتز [۶] برای مطالعه مدارهای جانبی به کار برده شد و تغییر کوچک در مفهوم انبساطی، باعث ایجاد مفاهیم جدید در سیستم‌های دینامیکی می‌شود و مفاهیمی مانند انبساطی مثبت، انبساطی نقطه به نقطه، انبساطی آنتروپی و انبساطی پیوستار به ترتیب توسط شوارتزمن (۱۹۵۲)، ردی (۱۹۷۰)، باون (۱۹۷۲) و کاتو از جمله این مفاهیم جدید می‌باشند. این مفاهیم برای سیستم دینامیکی $f: X \rightarrow X$ معرفی شدند و عده‌ای از محققین به توسعه این مفاهیم برای سیستم $\varphi: \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ پرداختند. از طرفی نظریه بعد یکی از شاخه‌های توپولوژی بوده که به مطالعه بعد یک فضای توپولوژیکی می‌پردازد. تعاریف متفاوتی از بعد یک فضای توپولوژی در مقالات متفاوت وجود دارد. به عنوان مثال، بعد استقرایی کوچک در سال ۱۹۲۲ توسط اریسون و بعد استقرایی بزرگ و بعد پوششی در سال ۱۹۳۱ توسط چن معرفی شد و دیگر این که این مفاهیم روی فضای متریک جدایی پذیر معادلند. برای مطالعه بیشتر به کتاب [۱] مراجعه کنید. منیه در [۳] به مطالعه رابطه بین مفهوم انبساطی $f: X \rightarrow X$ و بعد توپولوژیکی X پرداخته و ثابت می‌کند اگر همسانریختی انبساطی مانند $f: X \rightarrow X$ وجود داشته باشد، آنگاه بعد توپولوژیکی فضای X متناهی است.

* سخنران. آدرس ایمیل: afchangizohre@gmail.com

با توجه به این که مفهوم انبساطی برای $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ قابل توسیع است، این سوال مطرح می‌شود که آیا نتایج منیه برای سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ قابل توسیع است؟ اما در [۵]، مولفین به ارائه سیستم دینامیکی انبساطی $\varphi : \mathbb{Z}^2 \times X \rightarrow X$ می‌پردازند که بعد توپولوژیکی X نامتناهی است. ولی در [۴]، به معرفی مفهوم بعد متوسط یک سیستم دینامیکی پرداخته و رابطه آن را با مفهوم انبساطی سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ مطالعه می‌کند. نتایج منیه برای $f : X \rightarrow X$ توسط کاتو در [۲] برای مفهوم انبساطی پیوستار توسیع داده شد. انبساطی پیوستار مفهومی ضعیف‌تر از مفهوم انبساطی است و در این مقاله به کمک ایده‌های مطرح شده در [۴]، ما به مطالعه رابطه انبساطی پیوستار و بعد متوسط سیستم دینامیکی خواهیم پرداخت.

۲. تعاریف مورد نیاز

تعریف ۲.۱. فرض کنید $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X و $x \in X$ باشد. مرتبه α در نقطه x را با نماد $ord_x(\alpha)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ord_x(\alpha) := -1 + \#\{i \in I \mid x \in A_i\}$$

که در آن $\#E$ نمایش دهنده تعداد عناصر E می‌باشد. همچنین برای $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ مرتبه خانواده α را با نماد $ord(\alpha)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$ord(\alpha) := \sup_{x \in X} ord_x(\alpha).$$

مثال ۲.۲. فرض کنیم $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ یک افراز برای مجموعه X باشد؛ یعنی برای هر $i, j \in I$ ، $A_i \cap A_j = \emptyset$ و $X = \cup_{i \in I} A_i$ اما $ord_x(\alpha) = 0$ و این نتیجه می‌دهد که $ord(\alpha) = 0$ هرگاه $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ یک افراز از X باشد.

فرض کنیم $I \subseteq N$. برای پوشش $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ از فضای X ، قرار می‌دهیم $D(\alpha) := \min_{\beta} ord(\beta)$ که β هر پوشش متناهی از X است که تقریبی از α است؛ یعنی $\alpha < \beta$.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد. بعد توپولوژیکی فضای X را با $dim(X)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$dim(X) := \sup_{\alpha} D(\alpha)$$

که α پوشش باز متناهی دلخواهی از X است. بعد توپولوژیکی X با نام بعد لبگ 2X نیز معروف می‌باشد.

مثال ۲.۴. فرض کنیم که X مجموعه‌ای با تعداد $n + 2$ عضو باشد. نقطه $x_0 \in X$ را در نظر می‌گیریم. توپولوژی زیر را روی X معرفی می‌کنیم. U مجموعه باز در X است، هرگاه $U = \emptyset$ یا این که U زیر مجموعه‌ای از X باشد که حاوی x_0 است.

اگر $\alpha = \{\{x_0, x\}\}_{x \in X - \{x_0\}}$ ، آنگاه α پوشش باز برای X خواهد بود. واضح است که اگر β پوشش بازی از X باشد که ظریف‌تر از α است، آنگاه

$$ord(\alpha) \leq ord(\beta).$$

پس

$$D(\alpha) := ord(\alpha) = n.$$

از طرفی α ظریف‌تر از هر پوشش از X است. بنابراین

$$dim(X) = D(\alpha) = n.$$

اگر α و β دو پوشش باز متناهی برای فضای متریک (X, d) باشند، آنگاه بنا بر قضیه ۱.۱.۴ در [۱]،

$$D(\alpha \vee \beta) \leq D(\alpha) + D(\beta),$$

که

^۲Lebesgue dimension

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

لم ۲,۵. (Fekete's lemma) فرض کنید $\{a_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای زیر جمعی از اعداد حقیقی باشد یعنی

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m, \quad \forall n, m \geq 1$$

به طوری که $a_n \geq 0$ برای همه $n \geq 1$. در این صورت دنباله $\{b_n\}_{n \geq 1}$ تعریف شده به وسیله $b_n := \frac{a_n}{n}$ همگرا بوده و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \geq 1} V_n.$$

□

اثبات. به قضیه ۶.۲.۳ در [۱] مراجعه شود.

فرض کنید α پوشش باز متناهی برای X و $f : X \rightarrow X$ نگاشتی پیوسته باشد. برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ ، پوشش باز $w(\alpha, f, n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(\alpha, f, n) := \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha) = \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\alpha).$$

همچنین فرض کنید

$$D(\alpha, f, n) := D(w(\alpha, f, n)).$$

بنا بر قضیه ۶.۳.۱ در [۱]، دنباله $\{D(\alpha, f, n)\}_{n \geq 1}$ در خاصیت زیر جمعی صدق می‌کند. بنابراین بنا بر لم ۲,۵، دنباله

$$\left\{ \frac{D(\alpha, f, n)}{n} \right\}_{n \geq 1}$$

همگرا است. فرض کنید

$$D(\alpha, f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(\alpha, f, n)}{n}.$$

تعریف ۲,۶. فرض کنید $f : X \rightarrow X$ نگاشتی پیوسته روی فضای متریک X باشد. بعد توپولوژیکی متوسط سیستم (X, f) را با $mdim(X, f)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$mdim(X, f) := \sup_{\alpha} D(\alpha, f)$$

که α پوشش باز متناهی دلخواه از X است.

قضیه ۲,۷. فرض کنید $f : X \rightarrow X$ نگاشتی پیوسته روی فضای متریک (X, d) باشد و بعد توپولوژیکی X متناهی باشد. یعنی $dim(X) < \infty$. در این صورت

$$mdim(X, f) = 0.$$

□

اثبات. به کتاب [۱] مراجعه شود.

در این قسمت به معرفی بعد متوسط برای سیستم دینامیکی $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ می‌پردازیم. می‌دانیم که برای دو پوشش باز $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ از X ، $D(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq D(\mathcal{U}) + D(\mathcal{V})$ ؛ یعنی دارای خاصیت زیر جمعی است. بنابراین اگر $\mathcal{U}$ پوشش باز X باشد، آنگاه حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D\left(\bigvee_{n \in [-N, N]^* \cap \mathbb{Z}^k} \varphi(-n, \mathcal{U})\right)}{(2N+1)^k}.$$

فرض کنیم برای پوشش باز $\mathcal{U}$ از X و سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ ، نماد $\mathcal{A}(\mathcal{U}, \varphi)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\mathcal{A}(\mathcal{U}, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D\left(\bigvee_{n \in [-N, N]^* \cap \mathbb{Z}^k} \varphi(-n, \mathcal{U})\right)}{(2N+1)^k}.$$

تعریف ۲,۸. فرض کنیم (X, d) فضای متریک باشد. بعد متوسط سیستم دینامیکی $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ را با نماد $mdim(X, \varphi)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$mdim(X, \varphi) = \sup\{\mathcal{A}(\mathcal{U}, \varphi) \mid \mathcal{U} \text{ پوشش باز از } X \text{ است}\}.$$

۳. نتایج اصلی

در این بخش به معرفی مفاهیم انبساطی و انبساطی پیوستار برای سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ خواهیم پرداخت و رابطه این دو مفهوم را با بعد متوسط سیستم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ بررسی خواهیم کرد. فرض کنیم $C(X)$ گردایه تمام مجموعه‌های بسته و همبند X باشد. اگر d_H متریک هاسدورف و X فضای متریک فشرده باشد، آنگاه $(C(X), d_H)$ فضای متریک فشرده خواهد بود [۲].

تعریف ۳,۱. فرض کنیم $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ سیستم دینامیکی روی فضای متریک (X, d) باشد.

(۱) $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک سیستم انبساطی خوانیم در صورتی که $c > 0$ وجود داشته باشد که اگر $x \neq y$ ، آنگاه

$$d(\varphi(n, x), \varphi(n, y)) > c \quad n \in \mathbb{Z}^k \text{ وجود داشته باشد به طوری که}$$

(۲) $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک سیستم انبساطی پیوستار خوانیم در صورتی که $c > 0$ وجود داشته باشد که برای هر مجموعه ناتهی $n \in \mathbb{Z}^k, A \in C(X)$ وجود داشته باشد به طوری که $diam(\varphi(n, A)) > c$.

به راحتی می‌توان دید که هر سیستم انبساطی، یک سیستم انبساطی پیوستار است؛ اما عکس آن برقرار نیست [۲].

قضیه ۳,۲. فرض کنید $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ عمل پیوسته انبساطی باشد که با عمل پیوسته $\psi : \mathbb{Z}^{k-1} \times X \rightarrow X$ خاصیت جابجایی دارد. یعنی این که برای هر $h \in \mathbb{Z}^{k-1}, g \in \mathbb{Z}^k, x \in X$ و هر $\varphi(g, \psi(h, x)) = \psi(h, \varphi(g, x))$. در این صورت $mdim(X, \psi) < \infty$.

□

اثبات. به [۴] مراجعه شود.

اگر $k = 1$ ، عمل $\psi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ یک عمل بدیهی است و بعد متوسط سیستم $\psi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ همان بعد توپولوژیکی X خواهد بود. بنا بر قضیه اصلی خواهیم داشت:

به کمک تکنیک‌های به کار گرفته شده در قضیه (۳,۲)، می‌توان نتایج این قضیه به حالت سیستم دینامیکی انبساطی پیوستار توسیع دهیم. در واقع قضیه اصلی مقاله ارائه شده به صورت زیر می‌باشد:

قضیه اصلی. فرض کنید $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ عمل پیوسته انبساطی پیوستار باشد که با عمل پیوسته $\psi : \mathbb{Z}^{k-1} \times X \rightarrow X$ خاصیت جابجایی دارد. یعنی این که برای هر $h \in \mathbb{Z}^{k-1}, g \in \mathbb{Z}^k, x \in X$ و هر $\varphi(g, \psi(h, x)) = \psi(h, \varphi(g, x))$. در این صورت $mdim(X, \psi) < \infty$.

نتیجه ۳,۳. اگر $f : X \rightarrow X$ یک همسانریختی انبساطی پیوستار باشد، آنگاه $dim(X) < \infty$.

لازم به ذکر است که این نتیجه، قضیه ۵.۲ در [۲] می‌باشد. اگرچه بنا به نتیجه ۳,۳، سیستم دینامیکی انبساطی پیوستار از گروه $\mathbb{Z}$ روی فضای متریک فشرده (X, d) ایجاب می‌کند که $dim(X) < \infty$ ، در حالی که $k \neq 1$ ممکن است که $\varphi : \mathbb{Z}^k \times X \rightarrow X$ یک سیستم انبساطی پیوستار باشد اما $dim(X) = \infty$. برای این منظور فرض می‌کنیم که $K^2 = S^1 \times S^1$ چنبره دو بعدی باشد و $A : K^2 \rightarrow K^2$ همسانریختی توصیف شده توسط ماتریس $[A] = [a_{ij}]$ باشد که $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ و $\det([A]) = 1$ و A دارای مقادیر ویژه از اندازه ۱ نباشد. بنا بر [۵]، $A : K^2 \rightarrow K^2$ یک همسانریختی انبساطی است. فرض کنیم

$$X = (K^2)^{\mathbb{Z}} = \{\{x_i\} \mid x_i \in K^2\}.$$

برای هر دو نقطه در X مانند $x = (x_i)$ و $y = (y_i)$ ، متریک

$$\tilde{d}(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{d(x_i, y_i)}{2^{|i|}}$$

روی X در نظر می‌گیریم و در همسانریختی $f : X \rightarrow X$ و $\sigma : X \rightarrow X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x)_i = A(x_i),$$

$$\sigma(x)_i = x_{i+1}.$$

بنا به قضیه ۴.۲ در [۵]، سیستم دینامیکی $\varphi : \mathbb{Z}^2 \times X \rightarrow X$ تولید شده بوسیله f و σ انبساطی می‌باشد. بنابراین $dim(X) = \infty$ در حالی که $\varphi : \mathbb{Z}^2 \times X \rightarrow X$ انبساطی پیوستار بوده؛

مراجع

- [1] M. Coornaert, *Topological dimension and dynamical systems*, Universitext. Springer. Cham, 2015.
- [2] H. Kato, Continuum-wise expansive homeomorphisms, *Can. J. Math.* 45(3) (1993), 576–598.
- [3] R. Marie, Expansive homeomorphisms and topological dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.* 252 (1979), 313–319.
- [4] T. Meyerovitch and M. Tsukamoto, Expansive multiparameter actions and mean dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.* 371(10) (2019), 7275–7299.
- [5] Shi, En Hui; Zhou, Li Zhen, The nonexistence of expansive $\mathbb{Z}^d$ actions on graphs, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 21 (6) (2005), 1509–1514.
- [6] W. R. Utz, Unstable homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 769–774.