2nd National Conference on Computational and Experimental Mechanics, SRTTU, Tehran
27 Feb 2020

دومین کنفرانس ملی مکانیک محاسباتی و تجربی
تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
8 اسفندماه 1398

اثر تخلخل روی کمانش ورق‌های ضخیم هدفمند با شرایط مختلف بارگذاری

امید نورمحمدی ارانی[1*]

[1]کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز؛

[*]آبادان-6314653199، omidnoormohammadi4@gmail.com

چکیده
در این مقاله کمانش ورق‌های ضخیم هدفمند متخلخل مستطیلی بر اساس تئوری مرتبه بالاتر تغییرشکل برشی و عمودی ورق بررسی شده است. معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از قانون کار مجازی نوشته شده‌اند. با توجه به شرایط مرزی ساده روی چهار لبه ورق از روش حل ناویر برای حل تحلیلی استفاده شده است. به منظور تعریف توزیع تغییرات ویژگیهای ماده ورق در راستای ضخامت از قانون توانی و برای تخمین اثر تخلخل روی کمانش ورق سه نوع تابع توزیع تخلخل استفاده شده‌اند. برای صحت‌سنجی نتایج تحلیلی با نتایج موجود در مقاله‌ها مقایسه شده‌اند. اثر توان ماده هدفمند، تابع توزیع تخلخل، تخلخل، نرخ طول به ضخامت و شرایط بارگذاری روی بار بحرانی کمانش ورق‌های هدفمند متخلخل بررسی و بحث شده است.

کلیدواژگان
کمانش، هدفمند، تخلخل، تئوری مرتبه بالاتر تغیرشکل برشی و عمودی ورق

Effect of porosity on buckling behavior of thick FG plates under different loading conditions

Omid Noormohammadi Arani[1]

[1]Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran;
* P.O.B. 6314653199 Abadan, Iran, omidnoormohammadi4@gmail.com

Abstract
In this paper buckling behavior of functionally graded square porous plates based on higher order shear and normal deformable plate theory (HOSNDPT) is investigated. The governing equations and associated boundary conditions are derived using principle of virtual work. The equations are then solved analytically, assuming the simply support boundary condition along all edges using Navier approach. To describe the change of material properties of the plate through the thickness the power law distribution and to investigate the effect of porosity on the buckling behavior of the plate three porosity distribution functions are applied. The accuracy of the analytical solutions are verified by comparing the results against those available in the literature. The effects of power-law index, porosity distribution function, porosity, side-to-thickness ratio and loading types on critical buckling load of functionally graded porous plates are also investigated and discussed.

Keyword

buckling, functionally graded, porous, higher order shear and normal deformable plate theory

1- مقدمه

ورق‌ها با شکل‌ها و هندسه‌های مختلف تحت بارگذاری‌های درون صفحه‌ای فشاری یا کششی یا ترکیبی از این دو حالت در سازه‌های مختلف مکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در شرایط معینی، چنین بارگذاری‌هایی می‌توانند منجر به کمانش ورق شوند. کمانش یا ناپایداری یک بی‌ثباتی است که میتواند باعث خرابی یا شکست سازه شود. این پدیده از اهمیت عملی فوق‌العادهای برخوردار است. کمانش ورق با یک انحراف ناگهانی جانبی در ورق تعریف می‌شود. هرچند ممکن است تنش‌های ایجاد شده در ورق کمتر از تنش موردنیاز برای شکست ماده‌ای که ورق از آن تشکیل شده، باشند ولی ممکن است کمانش اتفاق بیفتد. با افزایش بارهای محوری درون صفحه‌ای اعمال شده روی ورق، سرانجام این بارها به اندازه کافی بزرگ می‌شوند که باعث می‌شوند صفحه ناپایدار شود و سرانجام کمانش اتفاق بیفتد.

مواد هدفمند به دلیل دوام بالا، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی، قابلیت انعطاف پذیری و چقرمگی از مواد کاربردی هستند و در زمینه‌های زیادی مانند خودروسازی و صنایع هوافضا مورد استفاده قرار میگیرند. مواد هدفمند که می‌توانند از ترکیب دو ماده تشکیل دهنده یا بیشتر ایجاد شوند با تغییر از یک ماده به ماده دیگر با یک گرادیان خاص ساخته می‌شوند. این ترکیب قادر است تا بهترین خصوصیات هر دو ماده را داشته باشد. ثابت شده است که مواد هدفمند با به کارگیری تخلخل ضمن حفظ مقدار قابل توجهی از قدرت، می‌توانند از لحاظ کاهش وزن و جذب انرژی بیشتر بهبود یابند [1و2]. مطالعات مختلفی وجود دارد که نشان می‌دهد مواد متخلخل هدفمند نتایج امیدوارکننده‌ای برای چندین کاربرد مهندسی مانند تصفیه پیشرفته [3]، صنعت خودرو [4] و ایمپلنت‌های[1] پزشکی [5و6] دارند. از این رو محققان متعددی پاسخ‌های مکانیکی مواد هدفمند متخلخل را به عنوان دسته جدید مواد کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده‌اند. رضایی و همکاران [7] یک رویکرد تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی ورق‌های هدفمند متخلخل ایجاد کردند. مدل آن‌ها بر اساس تئوری

[1] implant

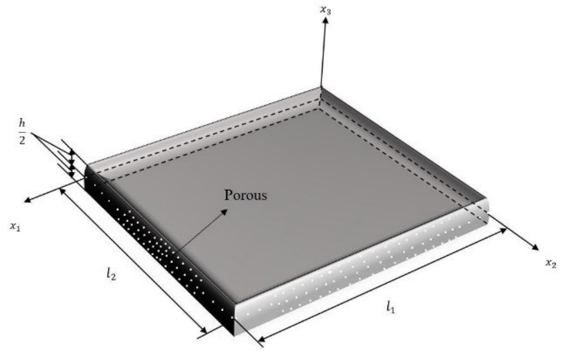
چهار متغیره بهبود یافته ورق بود. آکباس[1] [8] تحلیل ارتعاشی و خمش استاتیکی برای ورق هدفمند متخلخل مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده با استفاده از تئوری تغیرشکل برشی مرتبه اول ورق را ارائه داد. وانگ[2] و ژو[3] [9] ارتعاش دامنه بزرگ ورق‌های نازک هدفمند سیگموئید با تخلخل را بررسی کردند. آن‌ها غیرخطی‌های هندسی را با استفاده از تئوری غیرخطی ون کارمن ورق در نظر گرفتند. نتایج آن‌ها حاکی از آن است که انواع توزیع تخلخل یکنواخت و ناهموار تأثیرات متفاوتی بر دامنه رزونانس ورق هدفمند سیگموئید دارد. علاوه بر این، اثر توزیع حجم اجزاء به وضوح نشان داده شده است. کونگ[4] و همکاران [10] کمانش و پس‌کمانش حرارتی غیرخطی ورق‌های هدفمند متخلخل را مطالعه کردند. آنها از تئوری برشی مرتبه بالای ورق ردی استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که عملکرد بهتری در ورق با تخلخل یکنواخت توزیع شده از نظر تحلیل کمانش و پس‌کمانش وجود دارد. ژائو[5] و همکاران [11] یک راه حل دقیق سه بعدی جدید برای آنالیز ارتعاش ورق ضخیم هدفمند متخلخل با سه توزیع تخلخل مختلف ایجاد کردند. قربانی و همکاران [12] ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد متخلخل را مطالعه کردند. لیکلر[6] و همکاران [13] ارتعاشات یک ورق متخلخل مستطیلی با دو معادله کوپل شامل مشتقات انحراف نسبت به زمان و مکان و حرکت نسبی جامد سیال را شرح دادند. رضایی و سعیدی [14] اثر کوپل جابهجایی بین جامد و مایع روی مشخصات ارتعاشات آزاد ورق‌های سخت متخلخل همسانگرد مستطیلی تحت شرایط تخریب نشده را تخمین زدند. رضایی و سعیدی [15] ارتعاشات آزاد ورقهای متخلخل مستطیلی اشباع شده از سیال لزج را ارائه دادند.

برخلاف اکثر مطالعات قبلی روی ورقهای هدفمند متخلخل، این کار کمانش ورقهای ضخیم هدفمند متخلخل مستطیلی با تئوری مرتبه بالاتر تغییرشکل برشی و عمودی ورق را ارائه می دهد که بار بحرانی کمانش دقیقتری را فراهم می‌کند. علاوه بر این تأثیر میزان تخلخل، توان ماده هدفمند، اندازه طول به عرض ورق، توزیع تخلخل با استفاده از چندین نوع تابع توزیع تخلخل روی کمانش ورق‌های هدفمند متخلخل مستطیلی با دقت بیشتری بررسی شده و نتایج عددی کمانش در این کار ارائه شده است.

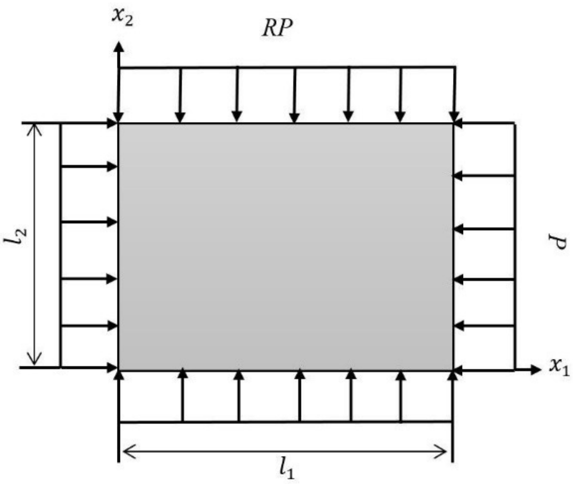
2- سینماتیک ورق

ورق هدفمند متخلخل مستطیلی با طول l_1، عرض l_2 و ضخامت h به طوری که خواص ماده در راستای ضخامت، x_3، طبق تابع توانی متغیر است و بار درون صفحه‌ای در راستای x_1 و x_2 اعمال می‌شود را در نظر بگیرید (شکل 1). مدل‌های متفاوتی برای توزیع خواص ماده در یک ورق از جنس ماده هدفمند وجود دارد. این مدل‌ها عموما توزیع خواص بین دو سطح بالایی و پایینی ورق را به صورت توابع مشخصی از ضخامت ورق در نظر می‌گیرند. در این مقاله خواص مکانیکی ورق طبق رابطه توانی (1) در راستای ضخامت تغییر میکند [16].

$$H(x_3)=(H_c-H_m)\left(\frac{1}{2}+\frac{x_3}{h}\right)^N+H_m \qquad (1)$$



شکل 1-1 هندسه ورق هدفمند متخلخل مستطیلی



شکل 1-2 ورق هدفمند متخلخل مستطیلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ی

در رابطه (1) H نماینده خواص فیزیکی و مکانیکی ورق از جمله مدول یانگ (E)، مدول برشی (G)، ضرایب لامه (λ,μ) میباشد که H_c خواص ماده در $x_3=\frac{h}{2}$ و H_m خواص ماده در $x_3=-\frac{h}{2}$ می‌باشد. با توجه به این که ضریب پواسون (ν) مقدار عددی کوچکی دارد و تغییرات آن در راستای ضخامت اندک است از تغییرات آن در راستای ضخامت صرف نظر و ثابت در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که جنس ورق مورد بررسی متخلخل هدفمند می‌باشد خواص آن طبق رابطه (2) تعریف می‌شود.

---
[1] Akbas
[2] Wang
[3] Zu
[4] Cong
[5] Zhao
[6] Leclaire

$$H(x_3)=\left((H_c-H_m)\left(\frac{1}{2}+\frac{x_3}{h}\right)^N+H_m\right)(1-\psi(x_3)) \qquad (2)$$

در رابطـه (2)ـ $\psi(x_3)$ تـابع توزیـع تخلخـل در ورق می‌باشد. در این جا سه تابع توزیع تخلخـل طبـق رابطـه (3) در نظر گرفته می‌شود [17].

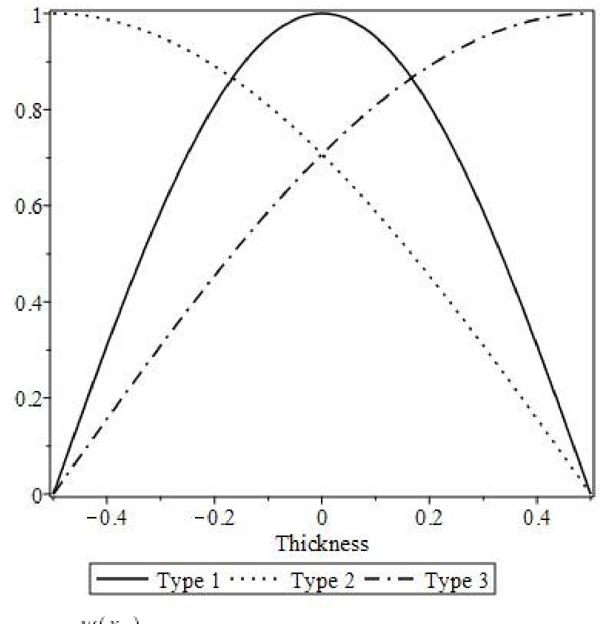
Type 1: $$\psi(x_3)=\phi\cos(\frac{\pi x_3}{h}) \qquad (3\text{-}1)$$

Type 2: $$\psi(x_3)=\phi\cos\frac{\pi}{2}(\frac{x_3}{h}+\frac{1}{2}) \qquad (3\text{-}2)$$

Type 3: $$\psi(x_3)=\phi\cos\frac{\pi}{2}(\frac{x_3}{h}-\frac{1}{2}) \qquad (3\text{-}3)$$

در روابط (3) عبارت ϕ میزان تخلخل را نشان میدهد.

شکل 2 توابع توزیع تخلخل نرمالیزه شده را نشان می‌دهد. همان‌طور که شکل 2 نشان می‌دهد هر سه نوع تابع توزیع تخلخل حجم یکسانی از خالی بودن را در ماده نتیجه می‌دهند. تابع توزیع تخلخل نوع 1 نسبت به صفحه میانی ورق متقارن است و بخش میانی ورق متخلخل تر است و تخلخل ماده از بیشترین مقدار خود ϕ با حرکت به سمت سطح بالا و پایین ورق به صفر کاهش می‌یابد. اما این تقارن برای دو تابع توزیع تخلخل دیگر صادق نیست. در تابع توزیع تخلخل نوع 2 تخلخل در بالای ورق صفر است و با حرکت به سمت پایین ورق افزایش می‌یابد تا به سطح پایینی ورق به بیشترین مقدار خود ϕ می‌رسد. تابع توزیع تخلخل نوع 3 روندی برعکس نوع 2 دارد.



$\bar{\psi}(x_3)=\frac{\psi(x_3)}{\phi}$

شکل 2- توزیع توابع تخلخل نرمالیزه شده

در تئوری تغییر شکل برشی و عمودی ورق سه مولفه جابه‌جایی با استفاده از سری تیلور در راستای ضخامت، x_3، بسط داده می‌شوند و عبارات با درجه مساوی از x_3 در بسط نگه داشته می‌شوند. از آن جایی که هر دو نوع تغییرشکل‌های برشی و عمودی در نظر گرفته می‌شوند، این تئوری، تئوری تغییرشکل برشی و نرمال نامیده می‌شود. اگر عبارات با درجه مساوی K از x_3 یعنی x_3^K در بسط مولفه‌های جابه‌جایی نگه داشته شوند، تئوری ورق تئوری مرتبه K نامیده می‌شود. تئوری تغییرشکل برشی و عمودی ورق به صورت روابط (4) در نظر گرفته می‌شود [18].

$$u_1(x_1,x_2,x_3,t)=u(x_1,x_2,x_3,t) \qquad (4\text{-}1)$$
$$u_2(x_1,x_2,x_3,t)=v(x_1,x_2,x_3,t) \qquad (4\text{-}2)$$
$$u_3(x_1,x_2,x_3,t)=w(x_1,x_2,x_3,t) \qquad (4\text{-}3)$$

در روابط (4) u بیانگر مولفه جابه‌جایی ورق در راستای x_1، v بیانگر مولفه جابه‌جایی ورق در راستای x_2 و w بیانگر مولفه جابه‌جایی ورق در راستای x_3 است. در این تئوری مولفه‌های میدان جابه‌جایی بر حسب چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر در راستای ضخامت x_3 بسط داده می‌شوند.

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{a=1}^{K=5}L_a(x_3)u^a(x_1,x_2,t) \qquad (5\text{-}1)$$
$$v(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{a=1}^{K=5}L_a(x_3)v^a(x_1,x_2,t) \qquad (5\text{-}2)$$
$$w(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{a=1}^{K=5}L_a(x_3)w^a(x_1,x_2,t) \qquad (5\text{-}3)$$

در روابط (5) $L_a(x_3)$ بیانگر توابع لژاندر و K بیانگر مرتبه تئوری ورق می‌باشد. اگر $K\geq 2$ تئوری ورق مرتبه بالا نامیده می‌شود. از آن جا که چندجمله‌ای‌های لژاندر چندجمله‌ای‌های متعامد هستند رابطه زیر برقرار است:

$$\int_{-1}^{1}L_a(x_3)L_b(x_3)dx_3=\delta_{ab} \qquad (6)$$

در رابطه (6) δ_{ab} دلتای کرونکر می‌باشد.

چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر بر حسب توابع پایه $1,x_3,x_3^2,x_3^3,...$ هستند و محاسبات جبری را کاهش می‌دهند. تعدادی از این چندجمله‌ای‌ها به صورت روابط (7) هستند.

$$\begin{aligned}
L_0(x_3)&=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
L_1(x_3)&=\frac{\sqrt{6}}{2}x_3\\
L_2(x_3)&=\frac{\sqrt{10}}{2}(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x_3^2)\\
L_3(x_3)&=\frac{\sqrt{14}}{2}(\frac{5}{2}x_3^3-\frac{3}{2}x_3)\\
L_4(x_3)&=\frac{3\sqrt{2}}{2}(\frac{35}{8}x_3^4-\frac{15}{4}x_3+\frac{3}{8})\\
L_5(x_3)&=\frac{\sqrt{22}}{2}(\frac{63}{8}x_3^5-\frac{35}{4}x_3^3+\frac{15}{8}x_3)
\end{aligned} \qquad (7)$$

مشتق چندجمله‌ای‌های لژاندر در قالب ترکیب خطی از خود چندجمله‌ای‌های لژاندر به صورت رابطه (8) قابل بیان هستند.

$$L'_a(x_3)=D_{ab}L_b(x_3)=\sum_{b=0}^{K=5}D_{ab}L_b(x_3) \qquad (8)$$

در رابطه (8) $L'_a(x_3)$ چندجمله‌ای متعامد لژاندر از درجه $a-1$ و D_{ab} مولفه‌های ماتریس ضرایب مشتق هستند. ماتریس D به صورت رابطه (9) است:

$$[D]_{8\times 8}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{11} & 0 & \sqrt{35} & 0 & 3\sqrt{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{39} & 0 & \sqrt{91} & 0 & \sqrt{143} & 0 & 0 \\ \sqrt{15} & 0 & 5\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{15} & 0 & \sqrt{195} & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

بر اساس رابطه تنش-کرنش ون کارمن غیرخطی، رابطه تنش-کرنش به صورت رابطه (10) است.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} L_a(x_3)u^a_{,1}+\frac{1}{2}L_a(x_3)L_b(x_3)w^a_{,1}w^b_{,1} \\ L_a(x_3)v^a_{,2}+\frac{1}{2}L_a(x_3)L_b(x_3)w^a_{,1}w^b_{,1} \\ D_{ab}L_b(x_3)w^a+\frac{1}{2}D_{ab}L_b(x_3)D_{cd}L_d(x_3)w^a w^c \\ L_a(x_3)u^a_{,2}+L_a(x_3)v^a_{,1}+L_a(x_3)L_b(x_3)w^a_{,1}w^b_{,2} \\ D_{ab}L_b(x_3)u^a+L_a(x_3)w^a_{,1}+L_a(x_3)D_{bc}L_c(x_3)w^a_{,1}w^b \\ D_{ab}L_b(x_3)v^a+L_a(x_3)w^a_{,2}+L_a(x_3)D_{bc}L_c(x_3)w^a_{,2}w^b \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

در رابطه (10) ε بیانگر کرنش‌های نرمال و γ بیانگر کرنش‌های برشی هستند.

3- معادلات حاکم بر ورق

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر کمانش ورق هدفمند متخلخل مستطیلی از اصل جابه‌جایی مجازی استفاده می‌شود. طبق این اصل در حالت تعادل مجموع تغییرات انرژی کرنشی و انرژی نیروهای خارجی برابر صفر است.

$$\int_0^T(\delta U+\delta W)dT=0 \qquad (11)$$

در این رابطه δU بیانگر انرژی کرنشی بر واحد حجم و δW بیانگر انرژی نیروهای خارجی بر واحد حجم و T بیانگر زمان می‌باشند. تغییرات انرژی کرنشی طبق رابطه (12) تعریف می‌شود.

$$\delta U=\int_\Omega\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}+\sigma_{33}\delta\varepsilon_{33}+\sigma_{12}\delta\gamma_{12} +\sigma_{13}\delta\gamma_{13}+\sigma_{23}\delta\gamma_{23})dx_1dx_2dx_3 \qquad (12)$$

با جایگذاری رابطه (10) در رابطه (12) رابطه (13) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\delta U=\int_\Omega\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[&\sigma_{11}(L_a(x_3)\delta u^a_{,1}+L_a(x_3)L_b(x_3)w^b_{,1}\delta w^a_{,1}) \\ &+\sigma_{22}(L_a(x_3)\delta v^a_{,2}+L_a(x_3)L_b(x_3)w^b_{,2}\delta w^a_{,2}) \\ &+\sigma_{33}(D_{ab}L_b(x_3)\delta w^a+D_{ab}L_b(x_3)D_{cd}L_d(x_3)w^c\delta w^a) \\ &+\sigma_{12}(L_a(x_3)\delta u^a_{,2}+L_a(x_3)\delta v^a_{,1}+L_a(x_3)L_b(x_3)w^b_{,2}\delta w^a_{,1} \\ &+L_a(x_3)L_b(x_3)w^b_{,1}\delta w^a_{,2})+\sigma_{13}(D_{ab}L_b(x_3)\delta u^a \\ &+L_a(x_3)\delta w^a_{,1}+L_a(x_3)D_{bc}L_c(x_3)w^b\delta w^a_{,1} \\ &+L_a(x_3)D_{bc}L_c(x_3)w^b_{,1}\delta w^a)+\sigma_{23}(D_{ab}L_b(x_3)\delta v^a \\ &+L_a(x_3)\delta w^a_{,2}+L_a(x_3)D_{bc}L_c(x_3)w^b\delta w^a_{,2} \\ &+L_a(x_3)D_{bc}L_c(x_3)w^b_{,2}\delta w^a)]dx_1dx_2dx_3\end{aligned} \qquad (13)$$

با انتگرال‌گیری تنش‌ها در راستای ضخامت ورق منتجه‌های تنش به صورت روابط (14) قابل تعریف هستند.

$$M^a_{\alpha\beta}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\alpha\beta}L_a(x_3)dx_3 \qquad (14\text{-}1)$$

$$M^{ab}_{\alpha\beta}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\alpha\beta}L_a(x_3)L_b(x_3)dx_3 \qquad (14\text{-}2)$$

$$T^a_i=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{i3}L_a(x_3)dx_3 \qquad (14\text{-}3)$$

$$T^{ab}_i=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{i3}L_a(x_3)L_b(x_3)dx_3 \qquad (14\text{-}4)$$

در روابط (14)، M و T به ترتیب منتجه‌های نرمال تنش و منتجه‌های برشی تنش می‌باشند.

با جایگذاری روابط (14) در رابطه (13) انرژی کرنشی به صورت رابطه (15) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}\delta U=\int_\Omega[(&M^a_{11}\delta u^a_{,1}+M^{ab}_{11}w^b_{,1}\delta w^a_{,1}+M^a_{22}\delta v^a_{,2} \\ &+M^{ab}_{22}w^b_{,2}\delta w^a_{,2}+T^b_{33}D_{ab}\delta w^a+T^{bd}_{33}D_{ab}D_{cd}w^c\delta w^a \\ &+M^a_{12}\delta u^a_{,2}+M^a_{12}\delta v^a_{,1}+M^{ab}_{12}w^b_{,2}\delta w^a_{,1}+M^{ab}_{12}w^b_{,1}\delta w^a_{,2} \\ &+T^b_1D_{ab}\delta u^a+T^a_1\delta w^a_{,1}+T^{ac}_1D_{bc}w^b\delta w^a_{,1}+T^{ac}_1D_{bc}w^a_{,1}\delta w^b \\ &+T^b_2D_{ab}\delta v^a+T^a_2\delta w^a_{,2}+T^{ac}_2D_{bc}w^b\delta w^a_{,2}+T^{ac}_2D_{bc}w^a_{,2}\delta w^b) \\ &]dx_1dx_2dx_3\end{aligned} \qquad (15)$$

با توجه به این که ورق در راستاهای x_1 و x_2 و به صورت درون صفحه‌ای بارگذاری شده است انرژی نیروهای خارجی به صورت رابطه (16) قابل بیان است:

$$\delta W=\int_S(-PL_a(0)\delta v^a_1-RPL_a(0)\delta v^a_2)dS \qquad (16)$$

در رابطه (16) P بار اعمالی درون صفحه‌ای، R پارامتر بارگذاری و S سطح جانبی ورق محل اعمال نیروهای خارجی درون صفحه‌ای می‌باشد. اگر $R=0$ ورق به صورت فشاری و در راستای x_1، اگر $R=1$ ورق به صورت فشاری و در دو راستا و اگر $R=-1$ ورق به صورت فشاری در راستای x_1 و کششی در راستای x_2 بارگذاری شده است.

با جایگذاری روابط (15) و (16) در رابطه (11) و انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء و فاکتورگیری از عبارات δu، δv و δw معادلات حاکم بر کمانش ورق هدفمند متخلخل مستطیلی به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$\delta u^a:(T_1^b D_{ab}-\frac{\partial M_{11}^a}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{12}^a}{\partial x_2})=0 \quad (17\text{-}1)$$

$$\delta v^a:(T_2^b D_{ab}-\frac{\partial M_{12}^a}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{22}^a}{\partial x_2})=0 \quad (17\text{-}2)$$

$$\begin{aligned}\delta w^a:&(T_3^b D_{ab}-\frac{\partial T_1^a}{\partial x_1}-\frac{\partial T_2^a}{\partial x_2}-(M_{11}^{ab}w_{,1}^b)_{,1}\\&-(M_{22}^{ab}w_{,2}^b)_{,2}+T_{33}^{bd}D_{ab}D_{cd}w^c-(M_{12}^{ab}w_{,2}^b)_{,1}\\&-(M_{12}^{ab}w_{,1}^b)_{,2}-(T_1^{ac}D_{bc}w^b)_{,1}+T_1^{bc}D_{ac}w_{,1}^b\\&-(T_2^{ac}D_{bc}w^b)_{,2}+T_2^{bc}D_{ac}w_{,2}^b=0\end{aligned} \quad (17\text{-}3)$$

هم‌چنین شرایط مرزی ورق به صورت روابط (18) قابل استخراج هستند:

$$\delta u^a:(M_{11}^a-PL_a(0))\mathbf{n}_1+(M_{12}^a)\mathbf{n}_2=0 \quad (18\text{-}1)$$

$$\delta v^a:(M_{12}^a)\mathbf{n}_1+(M_{22}^a-RPL_a(0))\mathbf{n}_2=0 \quad (18\text{-}2)$$

$$\begin{aligned}\delta w^a:&(T_1^a+M_{11}^{ab}w_{,1}^b+M_{12}^{ab}w_{,2}^b+T_1^{ac}D_{bc}w^b)\mathbf{n}_1\\&+(T_2^a+M_{22}^{ab}w_{,2}^b+M_{12}^{ab}w_{,1}^b+T_2^{ac}D_{bc}w^b)\mathbf{n}_2=0\end{aligned} \quad (18\text{-}3)$$

در راوابط (18) $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ به ترتیب بردارهای یکه در راستاهای x_1 و x_2 می‌باشند.

برای به دست آوردن معادلات پایداری ورق متخلخل هدفمند مستطیلی از معیار تعادل همسایگی طبق روابط (19) استفاده می‌شود.

$$u^a=\bar{u}^a+\tilde{u}^a \quad (19\text{-}1)$$

$$v^a=\bar{v}^a+\tilde{v}^a \quad (19\text{-}2)$$

$$w^a=\bar{w}^a+\tilde{w}^a \quad (19\text{-}3)$$

با جایگذاری روابط (19) در روابط (14) منتجه‌های تنش در حالت تعادل و همسایگی آن به صورت روابط (20) قابل بیان هستند:

$$M_{\alpha\beta}^a=\bar{M}_{\alpha\beta}^a+\tilde{M}_{\alpha\beta}^a \quad (20\text{-}1)$$

$$M_{\alpha\beta}^{ab}=\bar{M}_{\alpha\beta}^{ab}+\tilde{M}_{\alpha\beta}^{ab} \quad (20\text{-}2)$$

$$T_i^a=\bar{T}_i^a+\tilde{T}_i^a \quad (20\text{-}3)$$

$$T_i^{ab}=\bar{T}_i^{ab}+\tilde{T}_i^{ab} \quad (20\text{-}4)$$

با جایگذاری روابط (20) در روابط (17) و ارضای معادلات تعادل، معادلات پایداری حاکم بر کمانش ورق هدفمند متخلخل مستطیلی به صورت روابط (21) به دست می‌آیند:

$$\delta u^a:(\tilde{T}_1^b D_{ab}-\frac{\partial \tilde{M}_{11}^a}{\partial x_1}-\frac{\partial \tilde{M}_{12}^a}{\partial x_2})=0 \quad (21\text{-}1)$$

$$\delta v^a:(\tilde{T}_2^b D_{ab}-\frac{\partial \tilde{M}_{12}^a}{\partial x_1}-\frac{\partial \tilde{M}_{22}^a}{\partial x_2})=0 \quad (21\text{-}2)$$

$$\begin{aligned}\delta w^a:&(\tilde{T}_3^b D_{ab}-\frac{\partial \tilde{T}_1^a}{\partial x_1}-\frac{\partial \tilde{T}_2^a}{\partial x_2}-\bar{M}_{11}^{ab}\tilde{w}_{,11}^b\\&-\bar{M}_{22}^{ab}\tilde{w}_{,22}^b)=0\end{aligned} \quad (21\text{-}3)$$

با استفاده از معیار تعادل همسایگی، شرایط مرزی به صورت روابط (22) قابل بیان هستند:

$$(\tilde{M}_{11}^a)\mathbf{n}_1+(\tilde{M}_{12}^a)\mathbf{n}_2=0 \quad (22\text{-}1)$$

$$(\tilde{M}_{12}^a)\mathbf{n}_1+(\tilde{M}_{22}^a)\mathbf{n}_2=0 \quad (22\text{-}2)$$

$$(\tilde{T}_1^a+\bar{M}_{11}^{ab}\tilde{w}_{,1}^b)\mathbf{n}_1+(\tilde{T}_2^a+\bar{M}_{22}^{ab}\tilde{w}_{,2}^b)\mathbf{n}_2=0 \quad (22\text{-}2)$$

4- حل معادلات حاکم بر پایداری ورق

به منظور حل معادلات حاکم بر پایداری ورق هدفممند متخلخل مستطیلی، شرایط مرزی روی چهار لبه ورق مورد نیاز است. از آن جایی که فرض شده است ورق در چهار لبه دارای تکیه‌گاه ساده است، شرایط مرزی ورق به صورت روابط (23) قابل ساده شدن هستند:

$$on\ x_1=0\ and\ x_1=l_1 \Rightarrow W^a=0, M_{11}^a=0, M_{21}^a=0 \quad (23\text{-}1)$$

$$on\ x_2=0\ and\ x_2=l_2 \Rightarrow W^a=0, M_{22}^a=0, M_{12}^a=0 \quad (23\text{-}2)$$

به منظور اعمال شرایط مرزی تکیه گاه ساده در چهار لبه ورق و حل معادلات حاکم بر پایداری ورق از روش ناویر (یا روش سری‌های دوگانه) استفاده می‌شود. این روش، تابعیت میدان جابجایی از مختصات درون صفحه‌ای را به صورت مجموعی از جملات هارمونیک در نظر می‌گیرد. این تابعیت باید به گونه‌ای در نظر گرفته شود که شرایط مرزی ورق ارضا گردد. بنابراین، با توجه به شرایط مرزی (23)، میدان جابهجایی جدید را می‌توان به صورت روابط (24) نوشت:

$$u^a(x_1,x_2,t)=\sum_{m,n=1}U^{amn}(t)\cos(\frac{m\pi x_1}{l_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{l_2}) \quad (24\text{-}1)$$

$$v^a(x_1,x_2,t)=\sum_{m,n=1}V^{amn}(t)\sin(\frac{m\pi x_1}{l_1})\cos(\frac{n\pi x_2}{l_2}) \quad (24\text{-}2)$$

$$w^a(x_1,x_2,t)=\sum_{m,n=1}W^{amn}(t)\sin(\frac{m\pi x_1}{l_1})\sin(\frac{n\pi x_2}{l_2}) \quad (24\text{-}3)$$

در روابط (24) ضرائب U^{amn}، V^{amn} و W^{amn} به ترتیب، مؤلفه‌های ثابت جابه‌جایی در راستاهای x_1، x_2 و x_3 می‌باشند. در این سری ها، m و n تعداد جملات موجود در سری می‌باشند و در مسئله کمانش ورق، بیانگر شماره مدهای کمانش می‌باشند. با قرار دادن روابط (24) در روابط (21) یک دستگاه معادلات جبری به دست می‌آید که در آن مجهولات U^{amn}، V^{amn} و W^{amn} جواب حل این دستگاه هستند.

5- بحث و نتایج عددی

در این بخش از مقاله برای بررسی صحت سنجی روش حل و اعتبارسنجی نتایج به دست آمده مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده از تئوری مرتبه بالاتر تغییرشکل برشی و عمودی ورق و نتایج ارائه شده توسط مراجع [19]، [20] و [21] انجام شده است، بدین منظور پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}=\frac{P_{cr}\times 10^{-6}}{l_2}$ و $\hat{P}_{cr}=\frac{P_{cr}12l_2^2(1-\nu^2)}{Eh^3}$ تعریف می‌شود. و پس از آن اثر پارامترهای مختلف ورق روی پارامتر بی بعد بار بحرانی کمانش بررسی شده است، بدین منظور پارامتر بیبعد بار

بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} l_2^2}{E_c h^3}$ تعریف می‌شود. بدین منظور از سه جفت ماده هدفمند استفاده شده است که در جدول 1 آمده است.

جدول 1- خصوصیات مواد

1	Aluminum	$E_m = 70\times10^9\ N/m^2$	$\nu = 0.3$
	Silicon Carbide	$E_c = 420\times10^9\ N/m^2$	$\nu = 0.3$
2	SUS304	$E_m = 207.7\times10^9\ N/m^2$	$\nu_c = 0.3177$
	Si_3N_4	$E_c = 322.27\times10^9\ N/m^2$	$\nu_m = 0.24$
3	Epoxy 1	$E_m = 1.44\times10^9\ N/m^2$	$\nu = 0.38$
	Epoxy 2	$E_c = 14.4\times10^9\ N/m^2$	$\nu = 0.38$

در جدول 2 پارامتر بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ برای یک ورق هدفمند مستطیلی با توان‌های مختلف ماده هدفمند N ، شرایط مختلف بارگذاری R و مقادیر مختلف طول به عرض ورق $\frac{l_1}{l_2}$ در حالی که نسبت طول به ضخامت ورق $\frac{l_1}{h}=10$ میباشد با نتایج مراجع [19] و [20] مقایسه شده است. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌گردد بین نتایج حاضر و نتایج مرجع [19] اختلاف ناچیزی وجود دارد که با توجه به تئوری مشابه مورد استفاده خطای موجود ناشی از خطای محاسبات می‌باشد. هم‌چنین بین نتایج حاضر و نتایج موجود در مرجع [20] توافق خوبی وجود دارد و خطای کمی وجود دارد. علت این خطا استفاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییرشکل برشی ورق می‌باشد که در آن کرنش‌های عمودی در نظر گرفته نمی‌شوند (اعداد بالانویس داخل پرانتز مد بار کمانشی را نشان می‌دهند).

جدول 2- مقایسه پارامتر بی بعد بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ برای ورق هدفمند مستطیلی با [19] و [20]

N	R	$\frac{l_1}{l_2}$	*Present Study*	[19]	[20]
0	1	1	715.797(1)	715.808(1)	718.692(1)
		1.5	525.308(1)	525.308(1)	526.861(1)
	0	1	1431.595(1)	1431.594(1)	1437.361(1)
		1.5	1519.588(2)	1519.588(2)	1527.903(2)
	-1	1	2746.838(2)	2746.842(2)	2772.980(2)
		1.5	2746.838(3)	2746.842(3)	2772.980(3)
1	1	1	350.034(1)	350.034(1)	351.124(1)
		1.5	256.194(1)	256.194(1)	256.776(1)
	0	1	700.068(1)	700.068(1)	702.304(1)
		1.5	745.802(2)	745.801(2)	748.920(2)
	-1	1	1361.175(2)	1361.174(2)	1371.653(2)
		1.5	1361.175(3)	1361.174(3)	1371.653(3)

در جداول 3-1 و 3-2 پارامتر بار بحرانی کمانش $\hat{P}_{cr}$ برای یک ورق هدفمند مربعی با توان‌های مختلف ماده هدفمند N ، شرایط مختلف بارگذاری R و مقادیر مختلف ضخامت به طول ورق $\frac{h}{l_1}$ با نتایج مرجع [21] مقایسه شده است. همان‌طور که از این جداول مشاهده می‌گردد با توجه به نازک بودن ورق بین نتایج حاضر و نتایج مرجع [21] توافق خوبی وجود دارد و خطای کمی وجود دارد. علت این خطا استفاده از تئوری ورق کلاسیک در مرجع [21] می‌باشد.

جدول 3-1- مقایسه پارامتر بار بحرانی کمانش $\hat{P}_{cr}$ برای ورق هدفمند مربعی برای شرایط بارگذاری $R=0$ با [21]

	Present Study	[21]	*Present Study*	[21]	*Present Study*	[21]
N	$\frac{h}{l_1}=0.01$		$\frac{h}{l_1}=0.02$		$\frac{h}{l_1}=0.03$	
0	1.1244	1.1222	8.9804	8.9104	30.2259	30.072
1	0.9315	0.95022	7.4392	7.6018	25.0351	25.656
2	0.8939	0.89103	7.1378	7.1283	24.0160	24.058
5	0.8599	0.82293	6.8496	6.5834	23.0417	22.219

جدول 3-2- مقایسه پارامتر بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ برای ورق هدفمند مربعی برای شرایط بارگذاری $R=1$ با [21]

	Present Study	[21]	*Present Study*	[21]	*Present Study*	[21]
N	$\frac{h}{l_1}=0.01$		$\frac{h}{l_1}=0.02$		$\frac{h}{l_1}=0.03$	
0	0.5622	0.55692	4.4902	4.4552	15.1130	15.036
1	0.4658	0.44605	3.7196	3.6845	12.5175	12.435
2	0.4469	0.44329	3.5689	3.5463	12.0080	11.969
5	0.3920	0.42712	3.4248	3.4168	11.5209	11.532

در جدول 4 اثر طول به عرض ورق $\frac{l_1}{h}$ ، توان ماده هدفمند N ، میزان تخلخل φ و نوع تابع توزیع تخلخل ψ روی پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ برای یک ورق هدفمند متخلخل مربعی ارائه گردیده است.
همان‌طور که از این جدول قابل مشاهده است صرف‌ظر از نوع تابع توزیع تخلخل مورد استفاده با افزایش طول به ضخامت ورق پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد که بدین معنی است هر چه ورق نازک‌تر باشد نیروی اعمالی کمتری برای کمانش ورق مورد نیاز هست و هر چه ورق ضخیم‌تر باشد نیروی اعمالی بیشتری برای کمانش ورق مورد نیاز است. با افزایش توان ماده هدفمند و پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. از آن جایی که ماده ورق هدفمند است و سطح پایینی ورق از ماده با سفتی کمتر و سطح بالایی ورق از ماده با سفتی بیشتری برخوردار است و با افزایش توان ماده هدفمند سفتی کل ورق کاهش می‌یابد با افزایش توان ماده هدفمند بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. با افزایش میزان تخلخل پارامتر بی‌عد بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد که به دلیل آن کاهش سفتی ورق با افزایش تخلخل ورق می‌باشد که نتیجه کاهش سفتی ورق کاهش نیروی اعمالی مورد نیاز برای کمانش ورق می‌باشد.

جدول 4- اثر طول به عرض ورق $\frac{l_1}{h}$ ، توان ماده هدفمند N ، میزان تخلخل φ روی پارامتر بیبعد بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ برای یک ورق هدفمند مربعی متخلخل برای انواع تابع توزیع تخلخل

	$\frac{l_1}{h}$	φ	$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=5$
ψ_1	5	0	30.0735	13.5487	9.2295	6.3834
		0.2	27.3422	12.1799	8.2929	5.7490
		0.5	22.9363	9.9833	6.7728	4.7034
	10	0	35.9456	15.5979	10.6278	7.7997
		0.2	33.1414	14.1528	9.6404	7.1305
		0.5	28.7977	11.8705	8.0643	6.0559
	20	0	37.7923	16.2130	11.0501	8.2665
		0.2	35.0012	14.7528	10.0534	7.5965
		0.5	30.7740	12.4656	8.4756	6.5395
ψ_2	5	0	30.0735	13.5487	9.2295	6.3834
		0.2	26.3778	11.9158	8.0946	5.5522
		0.5	20.2916	9.2468	6.2532	4.2028
	10	0	35.9456	15.5979	10.6278	7.7997
		0.2	31.5916	13.6875	9.2833	6.7429
		0.5	24.2894	10.5345	7.0869	5.0136
	20	0	37.7923	16.2130	11.0501	8.2665
		0.2	33.2360	14.2184	9.6410	7.1334
		0.5	25.5509	10.9173	7.3349	5.2752
ψ_3	5	0	30.0735	13.5487	9.2295	6.3834
		0.2	26.3778	11.8124	8.0734	5.6324
		0.5	20.2916	9.0266	6.2236	4.4086
	10	0	35.9456	15.5979	10.6278	7.7997
		0.2	31.5916	13.6667	9.3616	6.9557
		0.5	24.2894	10.5297	7.3107	5.5501
	20	0	37.7923	16.2130	11.0501	8.2665
		0.2	33.2360	14.2264	9.7539	7.3973
		0.5	25.5509	10.9877	7.6464	5.9394

جدول 5 نشان می‌دهد بیشترین بار بحرانی کمانش زمانی رخ می‌دهد که ورق تحت بارگذاری کششی-فشاری در دو راستا قرار دارد. هم‌چنین تاثیر پارامترهای ورق روی پارامتر بی‌عد بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ در دو حالت بارگذاری فشاری-فشاری $R=1$ و فشاری-کششی $R=-1$ مانند حالت فشاری در یک راستا $R=0$ میباشد.

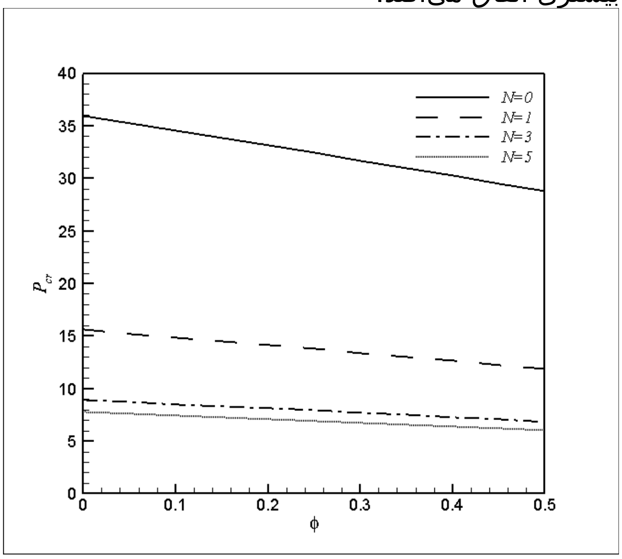
در این جدول مقدار طول به عرض ورق $\frac{l_1}{h}=10$ و میزان تخلخل $\varphi=0.5$ می‌باشد. هم‌چنین بیشترین بار بحرانی کمانش مربوط به تابع تخلخل نوع 1 می‌باشد.

جدول 5- اثر توان ماده هدفمند N ، نوع بارگذاری R روی پارامتر بیبعد بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ برای یک ورق هدفمند مربعی متخلخل برای انواع تابع توزیع تخلخل

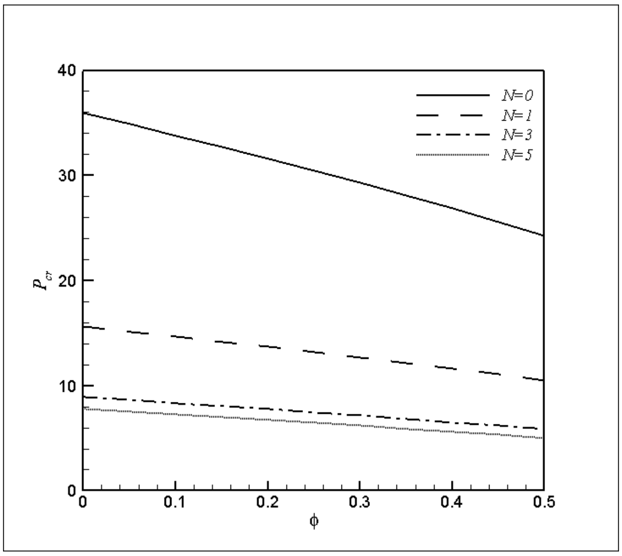
R		$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=5$
0	ψ_1	28.7977	11.8705	8.0643	6.0559
	ψ_2	24.2894	10.5345	7.0869	5.0136
	ψ_3	24.2894	10.5297	7.3107	5.5501

1	ψ_1	14.3988	5.9352	4.0321	3.0279
	ψ_2	12.1447	5.2673	3.5434	2.5068
	ψ_3	12.1447	5.2648	3.6554	2.7751
-1	ψ_1	$53.1858^{(2)}$	$22.5842^{(2)}$	$15.3290^{(2)}$	$11.0150^{(2)}$
	ψ_2	$46.0615^{(2)}$	$20.5136^{(2)}$	$13.8369^{(2)}$	$9.5172^{(2)}$
	ψ_3	$46.0615^{(2)}$	$20.2497^{(2)}$	$14.0050^{(2)}$	$10.2317^{(2)}$

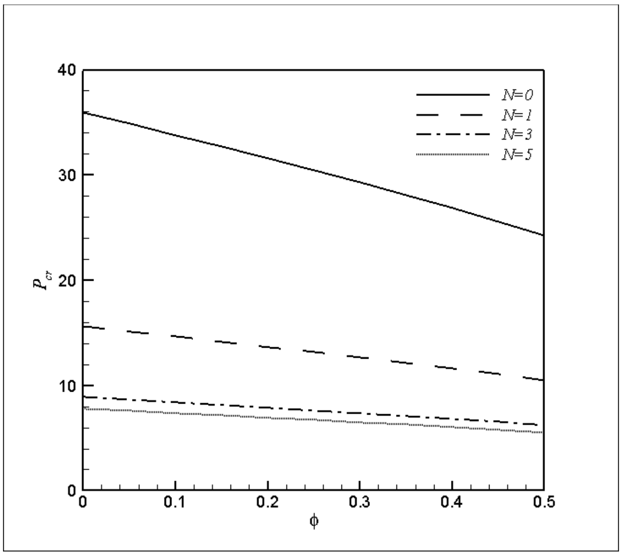
در شکلهای 3-1، 3-2 و 3-3 اثر میزان تخلخل φ روی پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ ورق هدفمند متخلخل مربعی برای توان‌های مختلف ماده هدفمند و انواع تابع توزیع تخلخل نشان داده شده است. همانطور که قابل مشاهده است صرف‌نظر از نوع تابع توزیع تخلخل با افزایش میزان تخلخل φ ، مقدار پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد که این کاهش مقدار برای مقادیر کوچکتر توان ماده هدفمند با سرعت بیشتری اتفاق می‌افتد.



شکل 3-1: تغییرات بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ نسبت به میزان تخلخل برای مقادیر مختلف توان ماده هدفمند برای تابع تخلخل نوع 1

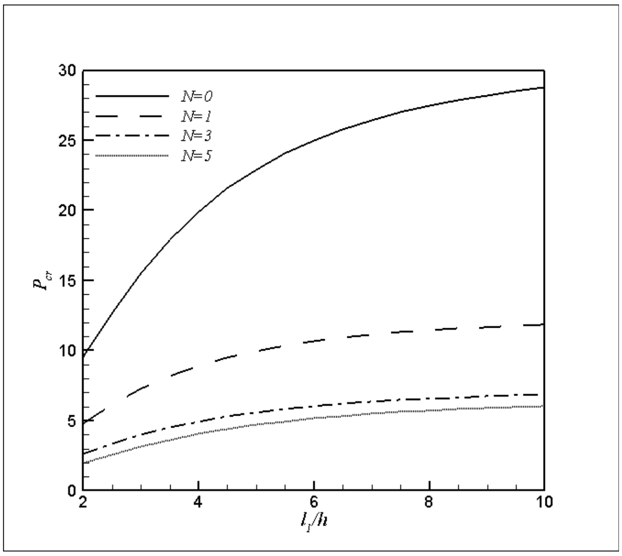


شکل 3-2: تغییرات بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ نسبت به میزان تخلخل برای مقادیر مختلف توان ماده هدفمند برای تابع تخلخل نوع 2

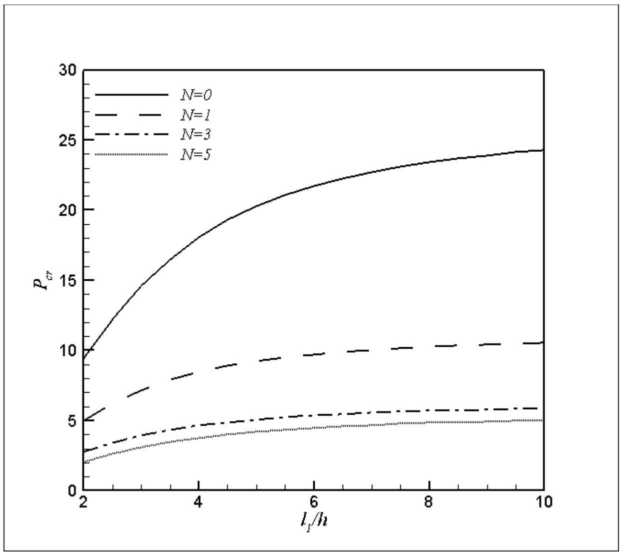


شکل 3-3: تغییرات بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ نسبت به میزان تخلخل برای مقادیر مختلف توان ماده هدفمند برای تابع تخلخل نوع 3

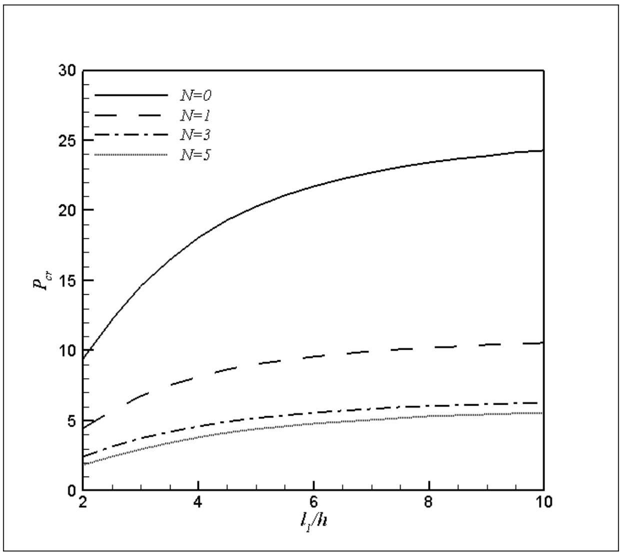
در شکلهای 4-1، 4-2 و 4-3 اثر طول به عرض ورق $\frac{l_1}{h}$ در حالی که میزان تخلخل $\varphi = 0.5$ روی پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش ورق هدفمند متخلخل مربعی برای توان‌های مختلف ماده هدفمند و انواع تابع توزیع تخلخل نشان داده شده است. همان‌طور که قابل مشاهده است صرف‌نظر از نوع تابع توزیع تخلخل با افزایش میزان طول به عرض ورق مقدار پارامتر بی‌بعد بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد که این افزایش مقدار برای مقادیر کوچکتر توان ماده هدفمند با سرعت بیشتری اتفاق می‌افتد.



شکل 4-1: تغییرات بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ نسبت به طول به ضخامت ورق برای مقادیر مختلف توان ماده هدفمند برای تابع تخلخل نوع 1



شکل 4-2: تغییرات بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ نسبت به طول به ضخامت ورق برای مقادیر مختلف توان ماده هدفمند برای تابع تخلخل نوع 2



شکل 4-3: تغییرات بار بحرانی کمانش $\bar{P}_{cr}$ نسبت به طول به ضخامت ورق برای مقادیر مختلف توان ماده هدفمند برای تابع تخلخل نوع 3

6- نتیجهگیری

1- در این مقاله حل تحلیلی برای کمانش ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند متخلخل با تکیه گاه ساده در چهار لبه ورق با استاده از تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی ورق ارائه شده است. شرایط مرزی ورق با استفاده از حل ناویر به طور دقیق ارضا شدند. نقطه برجسته تئوری مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی و عمودی ورق، برخلاف سایر تئوری‌های ورق، در نظر گرفتن کرنش‌های نرمال برون صفحه‌ای می‌باشد.
2- با ثابت در نظر گرفتن بقیه پارامترهای ورق، با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.
3- با ثابت در نظر گرفتن بقیه پارامترهای ورق، با افزایش توان ماده هدفمند بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.
4- با ثابت در نظر گرفتن بقیه پارامترهای ورق، با افزایش میزان تخلخل بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.
5- بیشترین بار بحرانی کمانش مربوط به تابع توزیع تخلخل نوع 1 که توزیع متقارنی در طول ضخامت ورق دارد می‌باشد.
نتایج:

[1] Al Jahwari, Farooq, Ahmed AW Anwer, and Hani E. Naguib. "Fabrication and microstructural characterization of functionally graded porous acrylonitrile butadiene styrene and the effect of cellular morphology on creep behavior." *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics* 53, no. 11 (2015): 795-803.
[2] Al Jahwari, Farooq, Yuanhao Huang, Hani E. Naguib, and Jason Lo. "Relation of impact strength to the microstructure of functionally graded porous structures of acrylonitrile butadiene styrene (ABS) foamed by thermally activated microspheres." *Polymer* 98 (2016): 270-281.
[3] Yadroitsev, I., I. Shishkovsky, Ph Bertrand, and I. Smurov. "Manufacturing of fine-structured 3D porous filter elements by

[16] Bao, G., and L. Wang. "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings." *International Journal of Solids and Structures* 32, no. 19 (1995): 2853-2871.

[17] Kim, Jinseok, Krzysztof Kamil Żur, and J. N. Reddy. "Bending, free vibration, and buckling of modified couples stress-based functionally graded porous micro-plates." *Composite Structures* 209 (2019): 879-888.

[18] Gilhooley, D. F., R. C. Batra, J. R. Xiao, M. A. McCarthy, and J. W. Gillespie Jr. "Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions." *Composite Structures* 80, no. 4 (2007): 539-552.

[19] Abdollahi, M., A. R. Saidi, and M. Mohammadi. "Buckling analysis of thick functionally graded piezoelectric plates based on the higher-order shear and normal deformable theory." *Acta Mechanica* 226, no. 8 (2015): 2497-2510.

[20] Bodaghi, M., and A. R. Saidi. "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory." *Applied Mathematical Modelling* 34, no. 11 (2010): 3659-3673.

[21] Ramu, I., and S. C. Mohanty. "Buckling analysis of rectangular functionally graded material plates under uniaxial and biaxial compression load." *Procedia Engineering* 86 (2014): 748-757.

selective laser melting." *Applied Surface Science* 255, no. 10 (2009): 5523-5527.

[4] Koohbor, Behrad, and Addis Kidane. "Design optimization of continuously and discretely graded foam materials for efficient energy absorption." *Materials & Design* 102 (2016): 151-161.

[5] Giannitelli, S. M., F. Basoli, P. Mozetic, P. Piva, F. N. Bartuli, F. Luciani, C. Arcuri, M. Trombetta, A. Rainer, and S. Licoccia. "Graded porous polyurethane foam: A potential scaffold for oro-maxillary bone regeneration." *Materials Science and Engineering: C* 51 (2015): 329-335.

[6] Han, Changjun, Yan Li, Qian Wang, Shifeng Wen, Qingsong Wei, Chunze Yan, Liang Hao, Jie Liu, and Yusheng Shi. "Continuous functionally graded porous titanium scaffolds manufactured by selective laser melting for bone implants." *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 80 (2018): 119-127.

[7] Rezaei, A. S., A. R. Saidi, M. Abrishamdari, and MH Pour Mohammadi. "Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: an analytical approach." *Thin-Walled Structures* 120 (2017): 366-377.

[8] Akbaş, Şeref Doğuşcan. "Vibration and static analysis of functionally graded porous plates." *Journal of Applied and Computational Mechanics* 3, no. 3 (2017): 199-207.

[9] Wang, Yan Qing, and Jean W. Zu. "Large-amplitude vibration of sigmoid functionally graded thin plates with porosities." *Thin-Walled Structures* 119 (2017): 911-924.

[10] Cong, Pham Hong, Trinh Minh Chien, Nguyen Dinh Khoa, and Nguyen Dinh Duc. "Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT." *Aerospace Science and Technology* 77 (2018): 419-428.

[11] Zhao, Jing, Kwangnam Choe, Fei Xie, Ailun Wang, Cijun Shuai, and Qingshan Wang. "Three-dimensional exact solution for vibration analysis of thick functionally graded porous (FGP) rectangular plates with arbitrary boundary conditions." *Composites Part B: Engineering* 155 (2018): 369-381.

[12] Arani, Ali Ghorbanpour, Zahra Khoddami Maraghi, Mehdi Khani, and Iman Alinaghian. "Free vibration of embedded porous plate using third-order shear deformation and poroelasticity theories." *Journal of Engineering* 2017 (2017).

[13] Leclaire, Philippe, K. V. Horoshenkov, M. J. Swift, and D. C. Hothersall. "The vibrational response of a clamped rectangular porous plate." *Journal of sound and vibration* 247, no. 1 (2001): 19-31.

[14] Rezaei, A. S., and A. R. Saidi. "On the effect of coupled solid-fluid deformation on natural frequencies of fluid saturated porous plates." *European Journal of Mechanics-A/Solids* 63 (2017): 99-109.

[15] Rezaei, A. S., and A. R. Saidi. "Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials." *Composite Structures* 134 (2015): 1051-1060.