



مطالعه حرکت غیرخطی آونگ فضایی و تحلیل عددی با نرم افزار XPP

محمد حسین زاده¹، مجید شاهقلی^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک دانشگاه شهید رجایی تهران
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، تهران
* majid.shahgholi@sru.ac.ir

چکیده

آونگ فضایی مدل ساده‌ای برای بسیاری از پدیده‌های طبیعی و مکانیکی است. رفتار حرکتی آونگ فضایی غیرخطی و پیچیده است. در این مطالعه، سیستم آونگ فضایی توصیف شده‌است و معادلات حرکت آن با استفاده از معادله لاگرانژ مورد بهدست آمده است. هدف این مطالعه بررسی رفتار غیرخطی آونگ فضایی است. معادلات بهدست آمده، در فضای حالت بازنویسی و برای استفاده در نرم‌افزار XPP آماده شده‌اند. در ادامه، سیستم در حالت ارتعاش آزاد و ارتعاش اجباری تحت نیروی افقی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به پارامترهای مسئله که شامل فرکانس طبیعی سیستم، فرکانس نیروی خارجی و ضریب نیروی خارجی می‌شود، مطالعه انجام شده به بخشهای مختلفی تقسیم شده است و در هرکدام از این بخشها به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها، نمودارهای پاسخ زمانی، صفحه فاز، و پوانکاره رسم و بررسی شده‌اند و با استفاده از آنها تأثیرات تغییر پارامترها بر دامنه حرکت و رفتار کلی سیستم مشاهده و تحلیل شده است. در نهایت مشاهده شد که، حرکت آونگ فضایی در حالت آزاد یکپارچه است. در حالت ارتعاش اجباری نیز، مشاهده می‌شود که تغییرات فرکانس طبیعی یا فرکانس نیروی خارجی در بعضی حالتها سبب افزایش فازهای حرکتی می‌شود در حالی که در بعضی موارد تنها بر دامنه سرعت و مدت زمان تغییر فاز اثر می‌گذارد. همچنین همواره سیستم به ازای مقادیر کوچک ضریب نیروی خارجی، رفتار منظمتری از خود نشان می‌دهد.

کلیدواژگان

آونگ فضایی، پاندول فضایی، حرکت غیرخطی، نرم افزار XPP، تحلیل عددی

A study on nonlinear motion of spherical pendulum and numerical analysis using XPP software

Mohammad Hosseinzadeh¹, Majid Shahgholi^{2*}

1- Department of Mechanics Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

* Tehran, Iran, majid.shahgholi@sru.ac.ir

Abstract

The spherical pendulum is a simple model for many natural and mechanical phenomena. The behavior of spherical pendulum is nonlinear and complex. In this study, the spherical pendulum system is described and its equations of motion are obtained using the Lagrange equation. The obtained equations are rewritten for use in XPP software. Then free vibration and forced vibration under horizontal force have been studied. Due to the parameters of the problem, which include the natural frequency of the system, the external force frequency, and the external force coefficient, the study is divided into different sections and in each of these sections for different values of parameters, time history diagrams, phase diagrams, and Poincaré are plotted and using these diagrams, the effects of changing parameters on the amplitude of motion and overall behavior of the system have been analyzed. Finally, it was observed that in free vibration, the motion of the spherical pendulum is integrable. In forced vibration mode, it is observed that changes in natural frequency or external force frequency in some cases increase the phases in the phase plane, while in some cases only affect the amplitude and duration of phase shift. Also, the system always behaves in a more orderly manner for small values of the external force coefficient.

Keywords

Spherical pendulum, nonlinear motion, XPP, XPP/AUTO, Numerical Analysis

1- مقدمه

در زندگی امروزی ما و مخصوصاً در علم مهندسی، ارتعاشات و نحوه حرکت از اهمیت بالایی برخوردار است. معمولاً برای بررسی یک پدیده طبیعی، ابتدا سعی می‌شود مدل ساده‌ای برای آن پدیده در نظر گرفته شود که رفتار آن را با تقریب مناسبی شبیه‌سازی کند. سپس به‌جای مطالعه پدیده اصلی، مدل آن مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد، چراکه مطالعه رفتار آن ساده‌تر است و در عین حال جواب مناسبی برای نیاز ما خواهد بود. آونگ فضایی، مدل بسیاری از پدیده‌های طبیعی و مهندسی، مخصوصاً مدلهایی با تقارن کروی

می‌باشد. در شهر بازیها یا انواع ماشینآلات ساخت و ساز، آونگ فضایی قابل مشاهده است.

حرکت و رفتار آونگ فضایی در سه بعد صورت می‌گیرد که پیچیده و غیرخطی است. یکی از حالت‌های حرکت آونگ فضایی، حرکت صفحه‌ای است. ارتعاش اجباری آونگ در صفحه، قبلاً مطالعه شده‌است و رفتارهای متفاوتی در حرکت آن مشاهده شده است [1]. آونگ فضایی، یک سیستم یکپارچه¹ است، که توضیحات بیشتر در این زمینه را می‌توان در مطالعه کوشمن و بیتس [2]² یافت. با اینحال آونگ فضایی تحت نیرو

¹ integrable

² Cushman and Bates

1-2- بهدست آوردن معادله حالت و آماده سازی معادلات برای استفاده در نرمافزار XPP

با استفاده از معادلات حرکت، معادلات فضای حالت را بهدست میآوریم.

$$\ddot{x} = \frac{f(t) - \left(x - \frac{y^2 x}{1+y^2}\right) \left(\omega_0^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 (x^2 + y^2)\right)}{1+x^2 + \frac{x^2 y^2}{1+y^2}}$$

$$\ddot{y} = \frac{-xyf(t) + \left(\frac{x^2 y}{1+x^2} - y\right) \left(\omega_0^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 (x^2 + y^2)\right)}{1+xy^2 + \frac{x^2 y^2}{1+x^2}}$$

فضای حالت را بصورت زیر تعریف میکنیم.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xp \\ \ddot{x} &= xp' \\ \dot{y} &= yp \\ \ddot{y} &= yp' \end{aligned}$$

نیروی $f(t)$ نیز با رابطی زیر داده میشود (در حالت ارتعاش آزاد، نیروی $f(t)$ صفر است).

$$f(t) = k \cos \omega t$$

در نرمافزار XPP برای استفاده از توابع سینوس یا کسینوس که آرگومان آنها شامل متغیر زمان باشد، لازم است از روابط زیر استفاده شود:

$$\begin{aligned} c' &= c * (1 - c^2 - s^2) - \omega * s \\ s' &= s * (1 - c^2 - s^2) + \omega * c \end{aligned}$$

که ω همان ω میباشد. برای فراخوانی سینوس از s و برای فراخوانی کسینوس از c استفاده میکنیم. در نهایت معادلات را بصورت زیر تغییر میدهم تا از آنها در نرمافزار استفاده کنیم.

$$\begin{aligned} xp' &= (k * c - (x - (y^2 * x / (1 + y^2))) * \omega^2 + xp^2 + y \\ yp' &= (-x * y * k * c / (1 + x^2) + (x^2 * y / (1 + x^2) - y) \end{aligned}$$

3- تحلیل عددی

باتوجه به معادلات حرکت، پارامترهای مسئله عبارتند از: فرکانس طبیعی، فرکانس نیروی خارجی، و ضریب نیروی خارجی. در تحلیل عددی، با توجه به این پارامترها، چند حالت در نظر گرفته شده است. در هر حالت با تغییر مقدار پارامترها در یک بازه در نظر گرفته شده، نمودارهای پاسخ زمانی، صفحه فاز و بعضاً نمودار پوانکاره رسم و تحلیل شده است.

در هر حالت منظور از تابع سینوسی کوچک یا بزرگ، به ترتیب تابع سینوسی با دوره تناوب کوچکتر یا بزرگتر، نسبت به دیگری میباشد.

3-1- ارتعاش آزاد سیستم

یکپارچه نیست [3]. آونگ فضایی تحت نیروی افقی، ابتدا توسط میلز¹ [4] مطالعه شد و در آن به بررسی پایداری حالت صاف و همچنین حرکت آن تحت یک اختلال غیرخطی با دامنه کوچک پرداخته شد. مطالعه دیگری [5] نشان از انشعابهای مختلف در حرکت آونگ فضایی دارد، از جمله حرکت صفحه‌ای و غیرصفحه‌ای و همچنین حرکت آشوبناک. همچنین شواهد تجربی [6] رفتار پیچیده و آشوبناک آونگ فضایی را تایید میکند. در مطالعه‌های پیشرفته‌تر توسط برابانت [7]³ حرکت غیرصفحه‌ای کواسی و آشوبناک بررسی شده است. استون⁴ [8] مطالعه‌ای اخیر را با روش عددی و انشعاب ادامه داد. در مطالعه دیگری توسط میلز، از آونگ فضایی به عنوان مدل حرکت نامنظم یک سیال داخل یک ظرف استوانه‌ای استفاده شد [9, 10].

با توجه به مطالعات فوق و نظر به پیچیدگی سیستم، در این مطالعه سعی شده است رفتار غیرخطی سیستم با روش عددی، مورد بررسی قرار گیرد.

2- بهدست آوردن معادله حرکت با استفاده از معادله لاگرانژ

در شکل 1 آونگ فضایی در سیستم مختصات قابل مشاهده است. با توجه به شکل معادلات حرکت را بهدست میآوریم [11]. ابتدا معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را مینویسیم.

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = mgz$$

حال با استفاده از روابط فوق و معادله لاگرانژ، و باتوجه به نیروی وارد شده در راستای x ، معادلات حرکت را بهدست میآوریم. با توجه به اینکه طول آونگ ثابت است، معادلات در دو جهت x و y بهدست میآیند.

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x + x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y}) + \frac{1}{2} \omega_0^2 x(x^2 + y^2) &= f(t) \\ \omega_0^2 y + y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y}) + \frac{1}{2} \omega_0^2 y(x^2 + y^2) &= 0 \end{aligned}$$

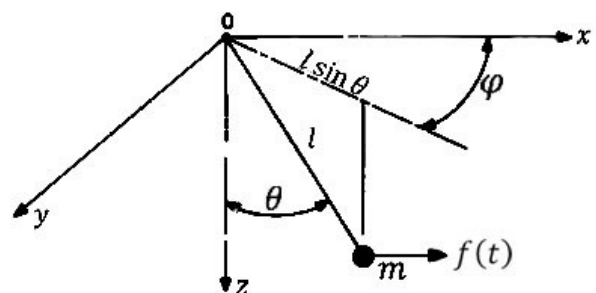


Fig. 1 Spherical pendulum
شکل 1 آونگ فضایی

¹ Miles

² bifurcation

³ Bryant

⁴ Aston



در نمودار صفحه فاز y ، تغییر محسوسی در نوع فازهای حرکتی مشاهده نمیشود.

در نهایت تغییرات ضریب نیروی خارجی بررسی میشود. با بررسی تغییرات k مشاهده میشود که برای مقادیر کوچکتر k رفتار سیستم منظمتر و قابل پیشبینی است. هرچه مقدار k بیشتر شود، فازهای حرکتی و دامنه x و y افزایش مییابد. اگر مقدار k از مقدار مشخصی (بسته به مقدار فرکانسها) بیشتر شود، رفتار سیستم آشوبناک و کاملاً غیر قابل پیشبینی میشود.

جدول 1 نحوه تغییر دامنههای حرکتی براساس تغییرات فرکانسها وقتی $\omega_0 > \omega$

Table 1 the manner of change in motion amplitudes based on changes in frequencies when $\omega_0 > \omega$

$\omega_0 > \omega$	دامنه u	دامنه v	دامنه w
افزایش ω_0	کاهش	ثابت	افزایش
افزایش ω	کاهش	افزایش	ثابت

3-4- ارتعاش اجباری، حالتی که فرکانس نیروی خارجی بزرگتر از فرکانس طبیعی باشد

در این حالت نیز در پاسخ زمانی x ، سه نوع تابع سینوسی دیده میشود. با بررسی نمودارهای پاسخ زمانی برای مقادیر مختلف فرکانس خارجی و طبیعی، مشاهده میشود که منشأ تابع سینوسی کوچک فرکانس نیروی خارجی و منشأ تابع سینوسی میانه، فرکانس طبیعی میباشد.

با تغییر فرکانسها، تغییر محسوسی در رفتار سیستم در صفحه فاز x ، دیده نمیشود و تنها تغییرات دامنه سرعت و زمان پُرشدن صفحه فاز مورد بحث است. در پاسخ زمانی y نیز مشابه قسمت 1-3 دو نوع تابع سینوسی مشاهده میشود که توضیحات همان قسمت در این مورد نیز صدق میکند.

با افزایش فرکانس نیروی خارجی و یا به عبارتی افزایش فاصله مقادیر فرکانس طبیعی و فرکانس نیروی خارجی، نمودار صفحه فاز y ، به سمت حلقه‌ای حدی میل میکند.

در نهایت در این حالت نیز تغییرات ضریب نیروی خارجی مورد بررسی قرار گرفته است. برای مقادیر کوچک k دامنه x با افزایش k بصورت مناسبی افزایش مییابد، اما با افزایش مقدار k از عدد مشخصی به بعد، دامنه x بطور ناگهانی افزایش مییابد و نمودار صفحه فاز آن نیز آشوبناک میشود. در حرکت y نیز نتایج مشابهی قابل برداشت است، اما بعد از اینکه مقدار k را از عدد مشخصی بیشتر شود، دامنه y با شدت بیشتری تغییر میکند و بازهم نمودار فاز آشوبناک میشود. در حالت کلی تأثیر تغییرات k روی y محسوستر است.

جدول 2 نحوه تغییر دامنههای حرکتی براساس تغییرات فرکانسها وقتی $\omega_0 < \omega$

Table 2 the manner of change in motion amplitudes based on changes in frequencies when $\omega_0 < \omega$

$\omega_0 < \omega$	دامنه u	دامنه v	دامنه w
افزایش ω_0	کاهش	ثابت	در ابتدا کاهش سپس تقریباً ثابت
افزایش ω	کاهش	افزایش	ثابت

در حالت ارتعاش آزاد، نمودارهای پاسخ زمانی x و y یک تابع سینوسی کامل را نشان میدهند. در این قسمت دو حالت قابل بررسی است: تغییرات رفتار سیستم براساس تغییرات فرکانس طبیعی و براساس تغییرات مقادیر اولیه x و y .

با افزایش فرکانس طبیعی، دامنه حرکتی x و y ثابت میماند و دوره تناوب در هردو راستای x و y کاهش، اما دامنه تغییرات سرعت در این دو راستا افزایش مییابد. ضمن اینکه در تمامی مقادیر فرکانس طبیعی، صفحه فاز، برای هردو متغیر، حلقه‌ای حدی¹ است. در قسمتی که تغییر مقدار اولیه متغیرها بررسی شد نیز برای هردو متغیر نتایج مشابهی به دست آمد. دیدیم که با افزایش مقدار اولیه هردو متغیر، دوره تناوب افزایش و در صورت ثابت ماندن مقدار اولیه یکی از متغیرها و افزایش دیگری، دوره تناوب کاهش مییابد. صفحه فاز در این حالت نیز حلقه‌ای حدی است، اما با افزایش مقادیر اولیه، مرتبه‌ای تغییرات سرعت بیشتر شده است. در نهایت مشاهده شد که با افزایش مقدار اولیه هرکدام از متغیرها، دامنه سرعت افزایش مییابد.

3-2- ارتعاش اجباری، حالتی که فرکانس طبیعی و فرکانس نیروی خارجی یکسان باشند

در این حالت، هیچ کدام از نمودارهای حرکتی نظم مشخصی را نشان نمیدهد. دامنهها همواره دچار تغییرات ناگهانی میشوند و صفحه فاز آشوبناک است. در این حالت تغییرات ضریب نیروی خارجی تأثیر چندانی در حرکت سیستم ندارد.

3-3- ارتعاش اجباری، حالتی که فرکانس طبیعی بزرگتر از فرکانس نیروی خارجی باشد

در حالت کلی هنگامیکه فرکانس طبیعی بزرگتر از فرکانس نیروی خارجی باشد، در نمودار پاسخ زمانی x سه نوع تابع سینوسی با دوره تناوبهای مختلف (که به ترتیب، تابع سینوسی کوچک، میانه و بزرگ نامیده میشوند) دیده میشوند. با افزایش مقدار فرکانس طبیعی، دوره تناوب تابع سینوسی کوچک و با افزایش فرکانس نیروی خارجی، دوره تناوب تابع سینوسی میانه کاهش مییابد. با افزایش هرکدام از فرکانسها، دوره تناوب تابع سینوسی بزرگ افزایش مییابد. لذا منشأ تابع سینوسی کوچک فرکانس طبیعی، منشأ تابع سینوسی میانه فرکانس نیروی خارجی، و منشأ تابع سینوسی بزرگ تعامل هردو فرکانس میباشد.

در نمودار صفحه فاز x ، نکته‌ای حائز اهمیت نسبت فرکانس طبیعی و فرکانس نیروی خارجی است. هرچه این نسبت بیشتر شود، تعداد فازهای مشاهده شده در صفحه فاز افزایش مییابد و در صورتیکه این نسبت تغییر نکند، شکل صفحه فاز تغییر محسوسی نخواهد کرد و فقط زمان تغییر فازها مورد بحث است.

در پاسخ زمانی y دو نوع سینوس مشاهده میشود که با بررسی تغییرات فرکانسها و با توجه به توضیحات فوق، تابع سینوسی کوچک ناشی از فرکانس طبیعی و تابع سینوسی بزرگ ناشی از تعامل دو فرکانس باهم میباشد.

4- نتایج

¹ limit cycle



9. Miles, J.W., Resonantly forced surface waves in a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 1984. 149: p. 15-31.
10. Miles, J., Resonantly forced, nonlinear gravity waves in a shallow rectangular tank. *Wave Motion*, 1985. 7(3): p. 291-297.
11. Nayfeh, A.H. and D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*. 2008: John Wiley & Sons.

بطور کلی دیده شد که ارتعاش آزاد سیستم یکپارچه است. پاسخ زمانی هر کدام از متغیرها منشکل از یک سینوس با مقادیر ثابت برای ماکزیمم و مینیمم می باشد و نمودارهای صفحه فاز آن حلقه‌ی حدی است. در حالت ارتعاش اجباری، مشاهده شد که در پاسخ زمانی x سه نوع تابع سینوسی مشاهده شد که همواره تابع سینوسی کوچکتر، ناشی از فرکانس بزرگتر است. برای پاسخ زمانی y دو نوع تابع سینوسی مشاهده شد که تابع سینوسی کوچک ناشی از فرکانس طبیعی است. همچنین در اسخ زمانی هردو متغیر، یک تابع سینوسی بزرگتر نیز تشکیل میشود که منشا آن نحوه‌ی تعامل هردو فرکانس است.

مشاهده شد که صفحه فاز x همواره کواسی است. در حالتی که فرکانس طبیعی بزرگتر است، با افزایش نسبت فرکانس طبیعی به فرکانس نیروی خارجی، فازهای حرکتی افزایش مییابد اما در حالتی که فرکانس خارجی بزرگتر باشد، با افزایش فرکانسها شکل صفحه فاز تغییر چندانی نمیکند. در صفحه فاز y ، بجز در مواردی که مقدار فرکانسها نزدیک باشد، صفحه فاز در تمامی موارد کواسی است. ضمن اینکه شکل صفحه فاز تغییر نمیکند اما ابعاد آن دچار تغییر میشود.

در مورد تغییرات ضریب نیروی خارجی مشاهده شد که، چه در حالتی که فرکانس طبیعی و چه در حالتی که فرکانس نیروی خارجی بزرگتر باشد، همواره مقدار کوچکتر k پاسخهای مناسبتری را موجب میشود.

در تمامی مواردی که فرکانس طبیعی و فرکانس نیروی خارجی یکسان باشند، رفتار سیستم آشوبناک است.

فهرست علائم

انرژی جنبشی	T
انرژی پتانسیل	V
فرکانس طبیعی	ω_0
فرکانس نیروی خارجی	ω
ضریب نیروی خارجی	k

1. Bryant, P.J. and J.W. Miles, On a periodically forced, weakly damped pendulum. Part 2: Horizontal forcing. *The ANZIAM Journal*, 1990. 32(1): p. 23-41.
2. Cushman, R.H. and L.M. Bates, *Global aspects of classical integrable systems*. Vol. 94. 1997: Springer.
3. Bridges, T.J. and K.V. Georgiou, Computing global orbits of the forced spherical pendulum. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2002. 165(1-2): p. 1-11.
4. Miles, J.W., Stability of forced oscillations of a spherical pendulum. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1962: p. 21-32.
5. Miles, J., Resonant motion of a spherical pendulum. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1984. 11(3): p. 309-323.
6. Tritton, D., Ordered and chaotic motion of a forced spherical pendulum. *European Journal of Physics*, 1986. 7(3): p. 162.
7. Bryant, P.J., Breakdown to chaotic motion of a forced, damped, spherical pendulum. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993. 64(1-3): p. 324-339.
8. Aston, P., Bifurcations of the horizontally forced spherical pendulum. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1999. 170(3-4): p. 343-353.