توسعه دوبعدی روش زیوکوویچ به منظور شبیه‌سازی فرآیند ذوب ماده تغییر فاز دهنده به همراه نانوذرات

مهدی بسطامی[1]، محمد تقیلو[2*]

1 - دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی سیستم‌های انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
2- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان
* زنجان، صندوق پستی 45371-38791، taghilou@znu.ac.ir

چکیده

استفاده از گرمای نهان در فرآیند تغییر فاز یکی از مهم‌ترین روش‌ها در ذخیره‌سازی انرژی و یا کنترل فرآیندهای حرارتی است. هدف از پژوهش پیش‌رو، توسعه مدل یک بعدی زیوکوویچ به همراه بررسی عددی اثر افزودن نانوذرات با ضریب هدایت حرارتی بالا به مواد تغییر فاز دهنده در حضور پره و در شرایط دو بعدی می‌باشد. تأثیر استفاده از نانوذرات در خواص ترموفیزیکی پی-سی-ام نیز به کمک روابط موجود در نظر گرفته خواهد شد. از سوی دیگر، با تفکیک میدان محاسباتی به دو قسمت متشکل از پی-سی-ام و پره، معادلات حاکم به صورت مجزا استخراج می‌گردند. در همین راستا، پس از استخراج معادله دو بعدی انرژی و اعمال اثرات تغییر فاز، معادله صریح محاسبه دما و کسر مایع بدست می‌آید. فرآیند صحت‌سنجی نتایج عددی توسط روابط تحلیلی موجود در شرایط یک بعدی و نتایج عددی دو بعدی صورت می‌پذیرد. انتظار می‌رود که علاوه بر تغییر شکل ناشی از افزودن پره در پیشروی جبهه ذوب، سرعت و عمق نفوذ نیز بهبود یافته، کانتورهای دما متراکم‌تر شده و فرآیند ذوب تسریع یابد. مشاهده شد که اثر پره در زمینه‌های ذکرشده بیشتر از نانو ذرات می‌باشد. البته دانستن این نکته که افزودن پره به مسئله در ابتدای فرآیند ذوب، به صورت مقاومت عمل کرده و اثر منفی دارد، خالی از لطف نیست. هم‌چنین افزودن نانوذرات در حالت ترکیبی، کارآیی به مراتب بیشتری نسبت به حالت استفاده از آن‌ها به صورت جداگانه خواهد داشت. شایان ذکر است به منظور ساده‌سازی معادلات حاکم، از اثرات جابجایی طبیعی صرف نظر شده است.

کلیدواژگان

گرمای نهان، ماده تغییر فاز دهنده، نانوذرات، پره، ذخیره‌سازی انرژی حرارتی

Two-dimensional development of the Ziokovich method to simulate the melting process of phase change material with nanoparticles

Mahdi Bastami[1*], Mohammad Taghilou[2]

1- Postgraduate student in energy systems engineering, Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.
2- Faculty of Mechanical Engineering, Zanjan University, Zanjan, Iran
* P.O.B. 45371-38791 Zanjan, Iran, taghilou@znu.ac.ir

Abstract

The use of latent heat in the phase change process is one of the most important methods in the energy storage or control of thermal processes. Phase change materials with high latent heat are one of the best ways to store thermal energy. The present study aims to develop a one-dimensional Zikovich model with a numerical investigation of the effect of adding nanoparticles with high thermal conductivity to phase change materials in the presence of the fin and two-dimensional conditions. The effect of using nanoparticles on the thermophysical properties of PCM will also be considered with the help of existing relationships. On the other hand, by dividing the computational field into two parts consisting of PCM and fin, the governing equations are extracted separately. In this regard, after extracting the two-dimensional energy equation and applying the effects of phase change, an explicit equation is obtained to calculate the temperature and liquid fraction. The process of validating numerical results is done by analytical relationships in one-dimensional conditions and two-dimensional numerical results. It was observed that adding nanoparticles in combination with each other, is much more efficient than using them one by one. It is worth mentioning that the project was executed by coding in the Fortran programming environment. To simplify the governing equations, the effects of natural convection have been neglected. The main challenge in implementing the numerical process of the model is to determine the start and end time of the melting process in each node and modify the governing equations to correct the position of the melting front.

Keywords

Latent Heat, Phase Change Material, NanoParticles, Fin, Thermal Energy Storage

۱- مقدمه

بررسی مسائل تغییر فاز جامد-مایع به دلیل کاربردهای گسترده آن در مسائل صنعتی و علمی، مورد توجه بسیاری از محققین قرار دارد. به عنوان مثال طراحی سیستم‌های ذخیره انرژی گرمای نهان[1] به منظور ذخیره و یا تخلیه انرژی گرمایی، مستقیماً با مسئله تغییر فاز در ارتباط می‌باشند [۱].

پیشروی جبهه ذوب/ انجماد سبب غیرخطی شدن مسائل تغییر فاز می‌شود [۲]. این‌گونه مسائل گذرا بوده و در حالت کلی دارای پاسخ تحلیلی برای پیش‌بینی میدان دما و موقعیت فصل مشترک نمی‌باشند. برای نخستین بار ارائه پاسخ تحلیلی توزیع دما و موقعیت جبهه انجماد در یک تختال آب در حال انجماد در اواخر سده‌ی نوزدهم توسط استفان [۳] انجام شده است. سولمان و همکاران [۴] مسئله استفان را در یک صفحه‌ی تخت با شرط مرزی

[1] Latent Heat Thermal Storage (LHTS)

جابجایی حل نمودند. بر اساس گزارش آن‌ها می‌توان مسئله استفان با شرط مرزی جابجایی را در حالی‌که گرمای ویژه ماده به صفر میل می‌کند، با استفاده از روش تقریب شبه‌تعادلی[1] حل نمود. وکیل‌التجار و سامان [۵] یک روش نیمه-تحلیلی برای مطالعه تغییر فاز در یک منبع مستطیلی شکل، حاوی چند ماده تغییر فاز دهنده[2] (PCM) با دماهای ذوب مختلف برای کاربردهای تهویه مطبوع توسعه داده و تأثیر ضخامت صفحه تخت را بر عملکرد منبع ذخیره بررسی نمودند. یوکسل و همکاران [۶] مدلی تحلیلی برای پیش‌بینی زمان و توزیع دما در حین ذوب و انجماد PCM ارائه دادند. با تعریف ظرفیت گرمایی متوسط، نتایج تحلیلی با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه شدند.

کالایسلوام و همکاران [۷] مسئله ذوب و انجماد PCM داخل یک مخزن استوانه‌ای را به صورت تحلیلی و تجربی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج تحلیلی آن‌ها موقعیت جبهه تغییر فاز را در زمان‌های مختلف پیش‌بینی کرده است. در راستای مطالعه تحقیقات تحلیلی می‌توان به مراجع [۸-۱۰] نیز مراجعه نمود. هسو و همکاران [۱۱] روش عددی بر اساس حجم کنترل برای حل مسائل پخش با شرط مرزی گذرا ارائه نمودند. هدف اصلی کار آن‌ها تبدیل مسئله با مرز متحرک به مرز ثابت بوده است. گام نخست برای این کار به دست آوردن معادله انرژی در سیستم مختصات غیرمتعامد و در قالب حجم کنترل است. سپس معادله انتگرالی به صورت گسسته به نگارش درمی‌آید.

زیوکوویچ و فوجی [۱۲] برای حل مسئله استفان هم‌دما، یک مدل عددی ساده ارائه کردند. مسئله استفان هم‌دما اشاره به مسئله تغییر فازی دارد که در آن، تغییر فاز در یک دمای نقطه‌ای (موضعی) رخ دهد. تنها مجهول مسئله این روش که بر اساس روش آنتالپی می‌باشد، دمای جسم می‌باشد. روش ارائه شده توسط زیوکوویچ و فوجی دارای محدودیت تغییر فاز هم‌دماست. از این رو نژار [۱۳] روش ارائه‌شده را جهت برطرف نمودن این محدودیت بهبود بخشید. وی معادلات انرژی حاکم، شامل جمله رسانش گرمای غیرخطی و جمله جابجایی فاز مایع را با استفاده از روش المان محدود حل نموده و سپس با روش آنتالپی اصلاح‌شده مقایسه کرد. نتایج حاصل از مقایسه نشان‌دهنده تطابق رضایت‌بخش میان این دو روش بود. هاوالا و همکاران [۱۴] روشی عددی مبتنی بر سعی و خطا برای حل مسئله تغییر فاز یک بعدی به همراه شرط مرزی جابجایی ارائه دادند. در مدل عددی آن‌ها تغییرات دمای دیواره و تغییر انرژی محسوس PCM در حالت ذوب یا انجماد در نظر گرفته شده است.

عموماً رسانش دمایی مواد تغییر فاز دهنده پایین است. به همین منظور تلاش بر این است که آهنگ انتقال گرما در سیستم‌های تغییر فاز دهنده بهبود یابد. یکی از راه‌های افزایش انتقال حرارت، افزایش سطح انتقال گرما است. در این راستا از سطوح گسترش یافته (پره‌ها) می‌توان استفاده کرد. شریفی و همکاران [۱۵] فرآیند ذوب PCM داخل یک مخزن پره‌دار را با درنظر گرفتن جابجایی طبیعی و به کمک روش حجم کنترل شبیه‌سازی نمودند. آن‌ها اثرات طول، ضخامت و تعداد پره‌ها را بر آهنگ تغییر فاز بررسی کردند. بر اساس نتایج آن‌ها، وجود پره‌های افقی آهنگ ذوب را در ابتدای فرآیند تغییر فاز افزایش می‌دهد. در کنار افزودن پره، استفاده از نانوذرات با ضریب رسانندگی بالا نیز به عنوان راهکار افزایش انتقال حرارت مورد توجه قرار گرفته است. مهدی و انسوفار [۱۶] فرآیند انجماد PCM به همراه نانوذرات اکسید آلومنیوم را در یک مبدل لوله‌ای سه‌گانه بررسی کردند. آن‌ها با ثابت نگه‌داشتن دمای سیال در مبدل حرارتی، مقادیر مختلفی از نانوذرات را به مخزن PCM اضافه نمودند. مطالعه عددی آن‌ها نشان می‌دهد که افزودن ۳ تا ۸ درصد حجمی از نانوذرات، به ترتیب منجر به کاهش ۸ تا ۲۰ درصدی زمان انجماد PCM می‌شود.

بشار و صدیقی [۱۷] با انجام یک مطالعه آزمایشگاهی به بررسی مسئله ذوب PCM به همراه نانوذرات در یک مخزن مستطیلی پرداختند. در پژوهش آن‌ها چهار نانوذره‌ی نقره، اکسید مس، اکسید آلومنیوم و نانولوله‌های کربنی چندجداره به طور مجزا به پارافین افزوده گردید. نتایج آن‌ها در هر چهار حالت، افزایش آهنگ انتقال گرما و ذوب را نشان می‌دهد. مهدی و انسوفار [۱۸] در تحقیقی دیگر، با افزودن همزمان پره و نانوذرات مسئله انجماد PCM را بررسی کردند. بدین منظور آن‌ها اثرات رسانش در پره، جابجایی طبیعی در PCM مایع و نیز اثرات حرکت براونی نانوذرات را در نظر گرفتند. نتایج آن‌ها نشان داد که استفاده از پره بدون نانوذرات در مقایسه با پره به همراه نانوذرات، تأثیر بهتری در افزایش آهنگ انجماد دارد. مهدی و همکاران [۱۹] با استفاده از افزودن پره و نانوذرات اکسید آلومینیوم به بررسی فرآیند ذوب و انجماد همزمان PCM درون یک مبدل لوله‌ای سه‌گانه پرداختند. آن‌ها با بهینه‌سازی هندسه پره‌ها به این نتیجه رسیدند که استفاده از نانوذرات در مبدل حاوی پره‌های بهینه‌شده، سبب کاهش عملکرد حرارتی مبدل می‌شود.

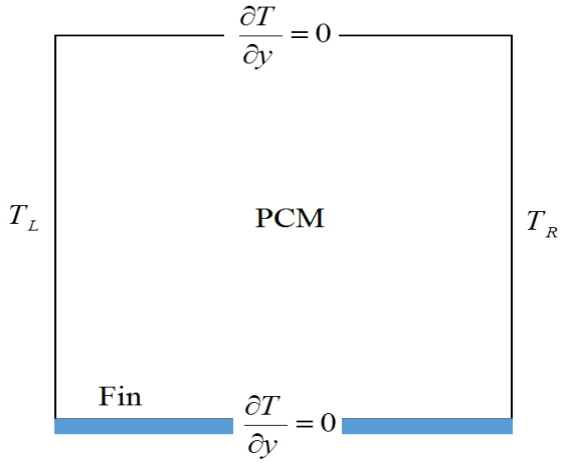
شیخ الاسلامی و همکاران [۲۰] فرآیند ذوب PCM به همراه نانوذرات را درون یک مبدل به منظور کنترل دمای ساختمان بررسی کردند. بدین منظور آن‌ها مدل ریاضی را براساس مدل تک‌فاز استخراج نموده و با روش حجم محدود حل نمودند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که با افزایش غلظت نانوذرات اکسید مس، فرآیند ذوب PCM شتاب می‌گیرد. در مقاله حاضر فرآیند ذوب PCM درون یک محفظه مربعی به همراه پره فلزی بررسی شده است. در همین راستا روش یک بعدی زیوکوویچ و فوجی به صورت دوبعدی توسعه داده می‌شود. هم‌چنین اثرات افزودن نانوذرات در فرآیند ذوب PCM مورد مطالعه قرار گرفته است.

هدف از این تحقیق، بررسی تغییر فاز ماده‌ی تغییر فاز دهنده در یک مخزن دو بعدی به همراه پره، با استفاده از شبیه‌سازی به روش اختلاف محدود و بر اساس فرمول‌بندی زیوکوویچ است. هم‌چنین به منظور افزایش رسانندگی گرمایی پی- سی- ام، از نانو ذرات با رسانندگی بالا استفاده می‌شود. با تفکیک میدان محاسباتی به دو قسمت متشکل از پی-سی-ام و پره، معادلات حاکم به صورت مجزا استخراج می‌گردند. در همین راستا پس از استخراج معادله دو بعدی انرژی و اعمال اثرات تغییر فاز، معادله صریح برای محاسبه دما و کسر مایع بدست می‌آید. فرآیند صحت‌سنجی نتایج عددی توسط روابط تحلیلی موجود در شرایط یک بعدی و نتایج عددی دو بعدی صورت می‌پذیرد.

[1] Quasi-Stationary
[2] Phase Change Material

۲- شرح مسئله

شکل ۱ مخزن مربعی‌شکل به ابعاد ۱ cm ×۱ cm، حاوی پره آلومینیومی به ضخامت ۱ mm و PCM را نشان می‌دهد. دیواره‌های بالایی و پایینی مخزن عایق بوده و دو دیواره جانبی آن دارای شرط مرزی دما ثابت هستند. از آنجا که هدف اصلی مقاله حاضر توسعه روش زیوکوویچ به یک مسئله دوبعدی است، به منظور سادگی از اثرات جابجایی طبیعی صرف نظر شده است.



شکل ۱ طرحواره مخزن حاوی PCM و پره آلومنیومی مورد استفاده

فاز اولیه PCM جامد بوده و دمای اولیه‌ی آن با دمای تغییرفاز T_m برابر در نظر گرفته شده است. خواص ترموفیزیکی فاز جامد و مایع PCM مشابه یکدیگر بوده و PCM خالص درنظر گرفته شده است. هم‌چنین از مقاومت گرمایی دیواره مخزن صرف نظر شده است. ماده تغییر فاز دهنده، پارافین بوده که خواص آن در جدول ۱ ارائه شده است. خواص ترموفیزیکی پره آلومینیومی نیز در جدول ۲ قابل مشاهده است.

جدول۱ خواص ماده‌ی تغییر فاز دهنده

چگالی، ρ (kg/m^3)	۸۰۵
دمای تغییر فاز، T_m (°C)	۳۲
ضریب انتقال حرارت هدایتی، k (W/m.K)	۰/۲
ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت، C_p (J/kg.K)	۲۳۷۹
گرمای نهان، L (J/kg)	۲۱۷۸۰۰

جدول ۲ خواص پره‌ی آلومینیومی

چگالی، ρ (kg/m^3)	۸۷۱
ضریب انتقال حرارت هدایتی، k (W/m.K)	۲۰۲/۴
ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت، c_p (J/kg.K)	۲۷۱۹

هم‌چنان که در قسمت مقدمه اشاره شد، علاوه بر پره و به منظور بهبود رسانندگی گرمایی PCM، از نانوذرات به عنوان افزاینده ضریب رسانندگی استفاده می‌شود. در این پژوهش از مس، نقره، آهن و طلا به عنوان نانوذرات استفاده شده است. خواص ترموفیزیکی نانوذرات مورد استفاده در جدول ۳ گزارش شده است.

جدول۳ خواص نانوذرات مورد استفاده

نانوذره	ρ (kg/m^3)	k (W/m.K)	c_p (J/kg.K)
مس	۸۹۳۳	۴۰۰	۳۸۵
نقره	۱۰۵۰۰	۴۲۹	۲۳۵
آهن	۷۸۷۰	۸۰/۲	۴۴۷
طلا	۱۹۳۰۰	۳۱۷	۳۱۷

۳- معادلات حاکم

به منظور حل عددی فرآیند ذوب از روش آنتالپی استفاده شده است. با توجه به این مهم که در فشارهای پائین آنتالپی فقط تابع دما است، معادله‌ی انرژی به فرم آنتالپی نوشته شده و نیازی به دانستن شرایط در مرز مشترک دو فاز نمی‌باشد. بدین ترتیب توزیع دمای داخل مخزن بدست می‌آید.

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\rho}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\rho}\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{1}$$

در معادله (۱) k ضریب رسانندگی حرارتی PCM بوده و H نماینده‌ی مجموع آنتالپی‌های محسوس و نهان ماده‌ی تغییر فاز دهنده است.

$$H=h+L.f \tag{2}$$

در معادله (۲) h آنتالپی محسوس، L گرمای نهان ماده‌ی تغییر فاز دهنده و f کسر حجمی فاز مایع است. پس از جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱)، معادله‌ی جدیدی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\nabla.\left(\frac{k}{\rho}\nabla T\right)-L\frac{\partial f}{\partial t} \tag{3}$$

با توجه به معادله (۳)، تنها در نقاطی که در آن تغییر فاز رخ می‌دهد، معادله انرژی به همراه جمله چشمه (جمله دوم در سمت راست معادله (۳)) حل خواهد شد و در سایر نقاط جمله چشمه برابر با صفر خواهد شد. برای محاسبه کسر مایع PCM می‌توان از تقریب زیر استفاده نمود:

$$f=\begin{cases}1 & T\geq T_m\\ 0 & T<T_m\end{cases} \tag{4}$$

در معادله (۳) توجه بدین نکته ضروری است که در تمامی مدت فرآیند تغییر فاز، دمای نقطه‌ی در حال تغییر فاز ثابت باقی مانده و از این جهت آنتالپی محسوس آن نیز بدون تغییر خواهد بود. بنابراین با صفر قراردادن مقدار گرمای محسوس در معادله (۳)، معادله (۵) تشکیل خواهد شد:

$$L\frac{\partial f}{\partial t}=\nabla.\left(\frac{k}{\rho}\nabla T\right) \tag{5}$$

دمای نقاطی که تغییر فاز در آن‌ها رخ نمی‌دهد، تغییر کرده و مقدار کسر مایع نیز برای این نقاط برابر با یک (برای فاز مایع) و صفر (برای فاز جامد) است.

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\nabla.\left(\frac{k}{\rho}\nabla T\right) \tag{6}$$

بنابراین معادله (۵) صرفاً در نقطه وقوع تغییر فاز و معادله‌ی (۶) در سایر نقاط مسئله حاکم خواهد بود. از این‌رو معادله دما، معادله (۶)، مستقل از معادله کسر مایع، معادله (۵)، بوده و کسر مایع در هر نقطه تابعی از دمای آن نقطه خواهد بود.

۳-۱ شبیه‌سازی عددی

به منظور گسسته‌سازی عددی معادلات حاکم، از روش تفاضل محدود استفاده شده است. گسسته‌سازی به صورت صریح و شبکه مورد بررسی متعامد است. با توجه به صریح بودن روش، مسئله پایداری در همگرایی پاسخ‌ها رخ خواهد داد. در راستای بهبود پایداری روش، از تکنیک متوسط‌گیری برای ضرایب معادلات گسسته‌شده استفاده شده است. مشتقات مکانی با روش تفاضل مرکزی با دقت مرتبه دو و مشتقات زمانی به صورت پیشرو با دقت مرتبه اول محاسبه می‌شوند. لازم به ذکر است که به دلیل حضور پره، ضریب رسانندگی حرارتی متغیر با مکان است. با توجه به تعریف آنتالپی محسوس، h=CpT، شکل گسسته‌شده معادله (۶) به صورت زیر قابل استخراج است:

$$T^{n+1}=T^{n}+\frac{\Delta t}{\rho C_p}\left[\left(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]+\frac{\Delta t}{\rho C_p}\left[\left(\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \tag{7}$$

هم‌چنین معادله کسر مایع، معادله (۵)، پس از گسسته‌سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f^{n+1}=f^{n}+\frac{\Delta t}{\rho L}\left\{\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}+k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\right\} \tag{8}$$

گام نخست در شبیه‌سازی فرآیند ذوب، تعیین ضرائب معادله انرژی، تبیین شرایط مرزی و آغاز حلقه‌ی زمانی است. چالش اصلی در حل این مسئله در گام‌های زمانی ابتدایی، تشخیص این موضوع است که تغییر فاز در کدام نقطه آغاز شده است؛ نقطه‌ای که دمای آن در لحظه‌ی کنونی بیشتر از دمای ذوب PCM، در گام زمانی پیشین کمتر از دمای ذوب PCM بوده و تغییر فاز برای آن نقطه آغاز شده است. بدین منظور در ابتدای حل می‌بایست مقدار بسیار ناچیزی برای کسر مایع در نقاط چسبیده به مرزهای مسئله، درنظر گرفته شود. بدین ترتیب فرآیند ذوب در داخل محفظه آغاز می‌شود. در گام‌های زمانی بعدی، نیازی به تشخیص آغاز فرآیند ذوب برای نقاط نیست؛ چرا که اگر پایان ذوب برای نقطه‌ای به درستی تشخیص داده شود، بلافاصله نزدیک‌ترین نقطه به نقطه مورد نظر شروع به ذوب خواهد کرد.

هر نقطه‌ای که تغییر فاز برای آن آغاز شده است، دمای نقطه به صورت پیش‌فرض برابر با دمای تغییر فاز PCM یعنی T_m قرار داده می‌شود. ضرائب معادله انرژی نیز بصورت دستی برابر با صفر می‌گردند. در این لحظه معادله (۸) نیاز به اصلاح دارد. در حقیقت لحظه‌ای پیش از شروع ذوب، مقداری گرما صرف رساندن دمای نقطه به دمای ذوب آن شده است که این مقدار در روند حل لحاظ نمی‌شود؛ بدین معنی که فرآیند ذوب به آن اندازه‌ای که معادله تشخیص داده است، پیشروی نکرده است. با اصلاح معادله (۸) در شروع تغییر فاز به صورت معادله (۹)، کسر مایع به مقدار واقعی خود بازگردانده می‌شود.

$$f^{n+1}=f^{n}+\frac{\Delta t}{\rho L}\left\{\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}+k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\right\}-\frac{C_p}{L}\left(T_m-T^{n}\right) \tag{9}$$

چالش بعدی در حل مسئله، تشخیص زمان پایان فرآیند ذوب است. کسر مایع نقطه در حال تغییر فاز از مقدار صفر شروع به تغییر می‌کند. در عمل اگر مقدار آن به یک برسد، یعنی تغییر فاز به پایان رسیده است. در حل عددی اگر مقدار کسر مایع نقطه‌ای در گام زمانی کنونی از عدد یک بزرگ‌تر شود، نشان‌دهنده آن است که نقطه بطور کامل مایع شده است. در این لحظه حل معادله (۸) برای آن نقطه به اتمام رسیده و برای نقطه‌ی هم‌جوار که بدیهی است تغییر فاز در آن شروع شده است، آغاز می‌شود. هم‌چنین مقدار کسر مایع برای نقطه‌ای که در این گام، تغییر فاز آن به پایان می‌رسد، باید برابر با یک گردد. ضرائب معادله انرژی می‌بایست مجدداً به حالت اولیه‌ی خود بازگردند و پس از به‌روزرسانی معادله انرژی، اکنون باید در نظرگرفت که در انتهای فرآیند ذوب، بخشی از گرمای داده شده به نقطه صرف اتمام فرآیند و بخشی از آن، صرف افزایش دمای نقطه می‌گردد. بدین ترتیب دمای نقطه‌ای که در این لحظه تغییر فاز آن به اتمام رسیده است، با اصلاح رابطه‌ی (۷) بدست می‌آید.

$$T^{n+1}=T^{n}+\left[\frac{\Delta_x+\Delta_y}{\rho C_p}\right]-\frac{L}{C_p}\left(f^{n+1}-f^{n}\right) \tag{10}$$

۳-۲ نانوذرات

به منظور محاسبه چگالی، ظرفیت حرارتی ویژه و گرمای نهان از روابط نادر پورمحمد و همکاران [۲۱] و برای محاسبه ضریب هدایت حرارتی نانوسیال از روابط زوان و روتزل [۲۲] استفاده شده است.

$$\rho_{npcm}=\phi\rho_{np}+(1-\phi)\rho_{pcm} \tag{11}$$

در این رابطه npcm نماد نانوسیال، np نماد نانوذرات، pcm نماد سیال پایه و φ غلظت نانوذرات (درصد حجمی) است. در این بررسی نانوذرات با کسر حجمی ۱ الی ۴ درصد استفاده شده است. ظرفیت حرارتی ویژه و گرمای نهان برای نانوسیال نیز از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

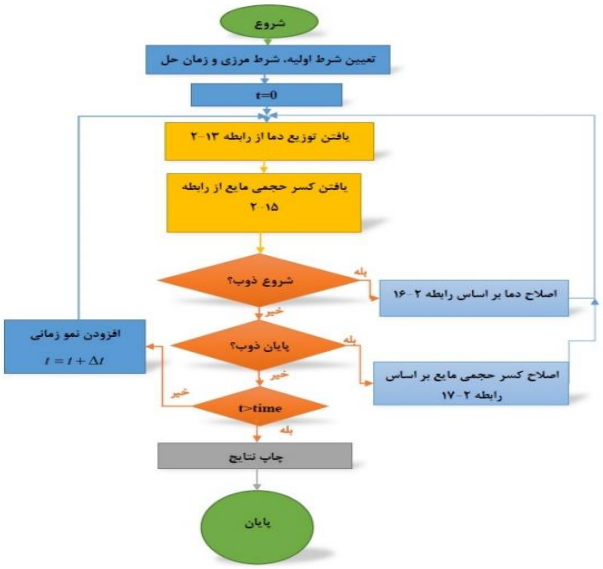
$$c_{p,npcm} = \frac{\phi\left(\rho c_p\right)_{np} + (1-\phi)\left(\rho c_p\right)_{pcm}}{\rho_{npcm}} \tag{12}$$

$$L_{npcm} = \frac{(1-\phi)\left(\rho L\right)_{pcm}}{\rho_{n,pcm}} \tag{13}$$

به منظور محاسبه‌ی ضریب هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال از رابطه ماکسول استفاده شده است.

$$k_{eff} = \frac{\left[k_{np} + 2k_{pcm} + 2\phi\left(k_{np} - k_{pcm}\right)\right]}{\left[k_{np} + 2k_{pcm} - \phi\left(k_{np} - k_{pcm}\right)\right]} k_{pcm} \tag{14}$$

شکل ۲ شمای کلی حل مسئله را نشان می‌دهد.

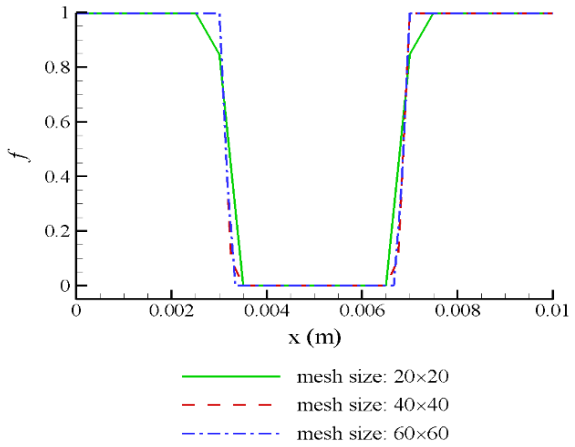


شکل ۲ روند حل مسئله در یک شمای کلی

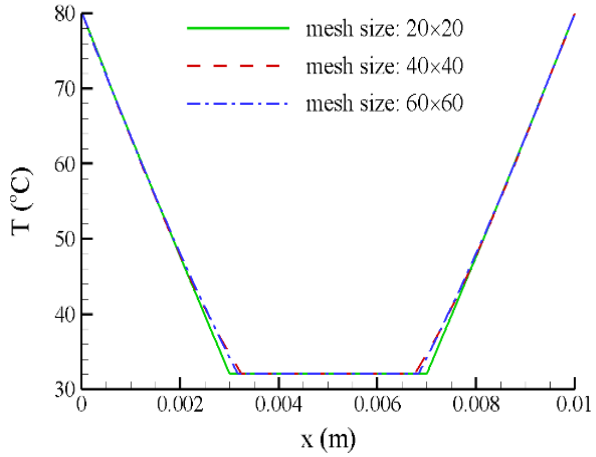
۴- نتایج

۴-۱ اعتبارسنجی

بر اساس شکل‌های ۳ و ۴ نتایج حاصل از بررسی سه شبکه با ابعاد ۲۰×۲۰، ۴۰×۴۰ و ۶۰×۶۰ میلی‌متری و مقایسه‌ی کسر مایع و دمای مخزن بر روی خط میانی افقی، نشان می‌دهد که مسئله در حالت عدم حضور پره از ابعاد شبکه مستقل است.

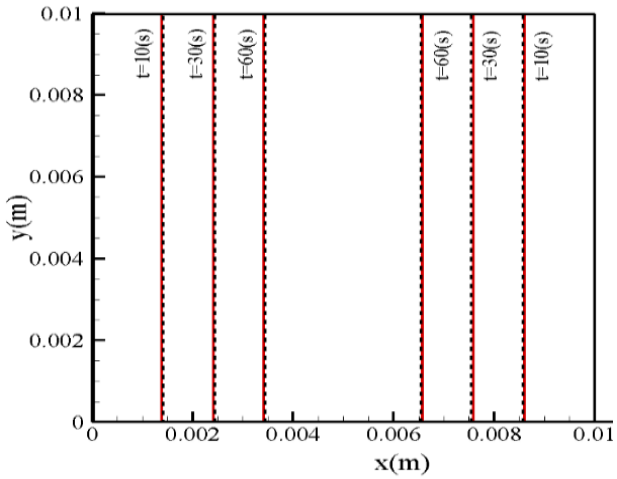


شکل ۳ کسر مایع بر روی خط میانی افقی مخزن در حالت بدون پره برای ابعاد شبکه‌ی مختلف



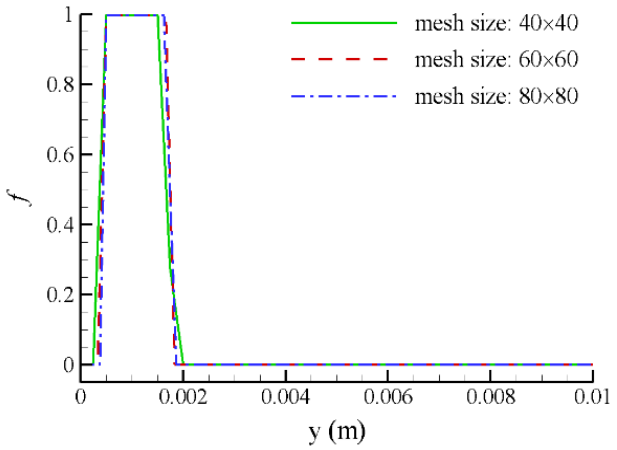
شکل ۴ نمودار دما بر روی خط میانی افقی مخزن در حالت بدون پره برای ابعاد شبکه‌ی مختلف

پس از انتخاب اندازه شبکه به صورت ۴۰ ×۴۰ نتایج حل عددی برای پیش‌بینی جبهه‌ی ذوب در سه زمان مختلف با حل تحلیلی (مرجع) اعتبارسنجی می‌شوند. در شکل ۵ خطوط پیوسته نمایان‌گر حل عددی و خط‌چین‌ها بازگوی حل تحلیلی می‌باشند.



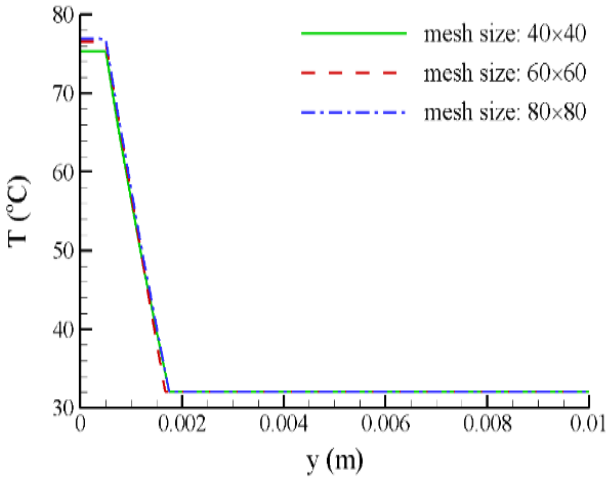
شکل ۵ اعتبارسنجی نتایج حل عددی با حل تحلیلی در سه زمان مختلف

هنگامی‌که مخزن دارای پره است، می‌بایست ابعاد شبکه کوچک‌تر انتخاب شود. بدین ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ با حضور پره افقی، کسر حجمی مایع و دما بر روی خط میانی عمودی مخزن برای سه شبکه با ابعاد متفاوت بررسی شده و نتایج حاصل، استقلال مسئله از شبکه را نشان می‌دهند.



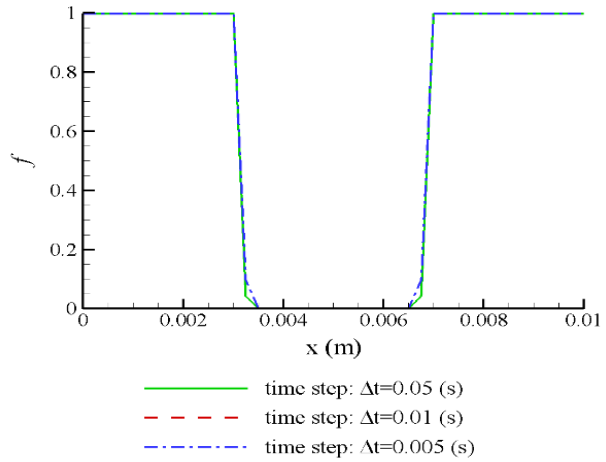
شکل ۶ کسر حجمی مایع بر روی خط میانی عمودی مخزن با حضور پره

شایان ذکر است که کسر حجمی مایع دقیقاً بر روی پره برابر با صفر و در اطراف آن مخالف صفر می‌باشد.

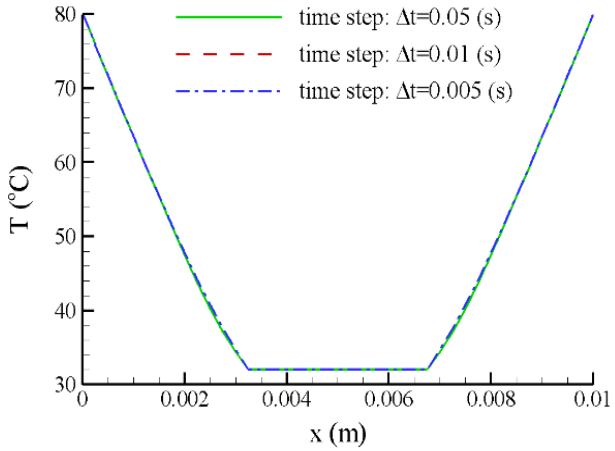


شکل ۷ نمودار دما بر روی خط میانی عمودی مخزن با حضور پره

در شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب کسر حجمی مایع داخل مخزن و دما بر روی خط میانی افقی در گام‌های زمانی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. این مهم نشان از استقلال زمانی مسئله دارد.

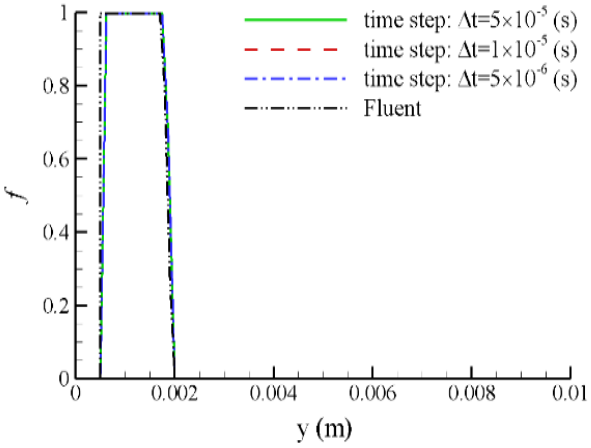


شکل ۸ کسر حجمی مایع بر روی خط افقی میانی در حالت بدون پره

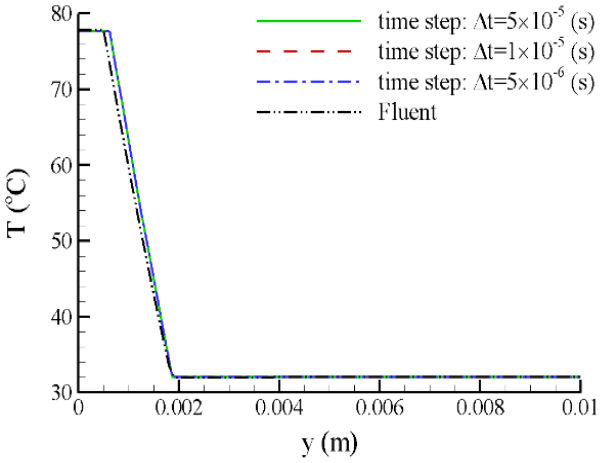


شکل ۹ نمودار دما بر روی خط افقی میانی در حالت بدون پره

نتایج بررسی مسئله در گام‌های زمانی مختلف با حضور پره، با نتایج حل نرم افزار فلوئنت نیز مورد مقایسه قرار گرفته است. شکل‌های ۱۰ و ۱۱ کسر حجمی مایع و دمای روی خط میانی عمودی را با حضور پره نشان می‌دهند. نتایج حاکی از استقلال زمانی مسئله است.



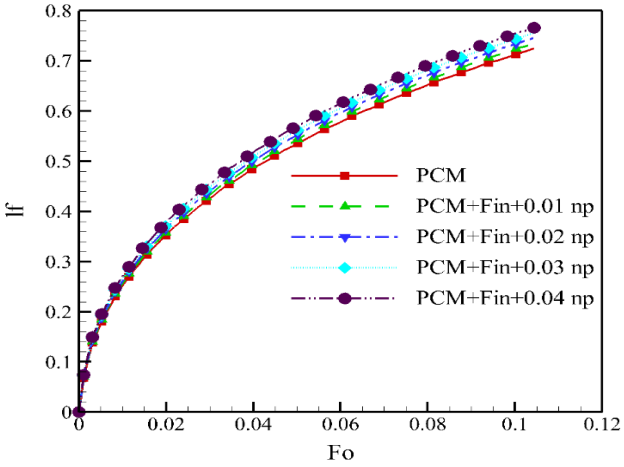
شکل ۱۰ کسر حجمی مایع بر روی خط عمودی میانی در حضور پره



شکل ۱۱ نمودار دما بر روی خط عمودی میانی در حضور پره

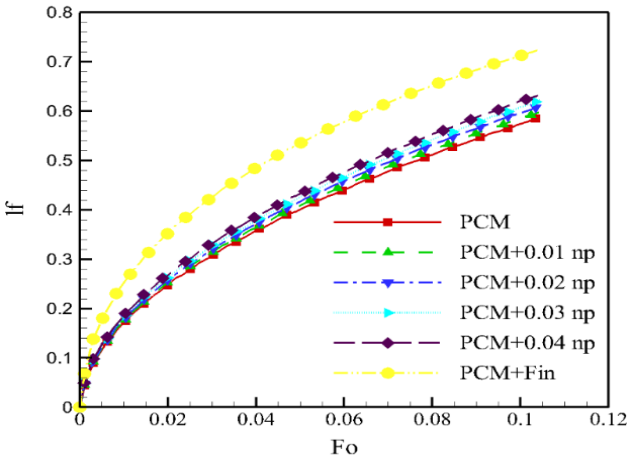
۴-۲ اثرات نانوذرات

ابتدا اثر افزودن نانوذرات مس به PCM با درصد حجمی‌های متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۱۲ کسر حجمی مایع بر حسب زمان بی‌بُعد $Fo = \frac{k}{\rho C_p}\frac{t}{L^2}$ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که با افزودن نانوذرات از جنس مس به پارافین، سرعت ذوب و مقدار کسر حجمی مایع تا زمان بی بعد ۰/۱۰۴۴ برای ماده تغییر فاز دهنده در حضور نانوذرات افزایش پیدا کرده است. درصدهای متفاوت نانوذرات مس به ترتیب افزایش درصد حجمی عبارت اند از: ۰/۵۸۷، ۰/۵۹۷، ۰/۶۰۹، ۰/۶۲۲ و ۰/۶۳۲ که هرچه درصد حجمی نانوذرات افزوده شده بالا می‌رود، سرعت ذوب نیز متناظر با آن زیاد می‌شود.



شکل ۱۲ کسر حجمی مایع بر حسب زمان بی‌بعد در حضور نانوذرات مس بدون پره

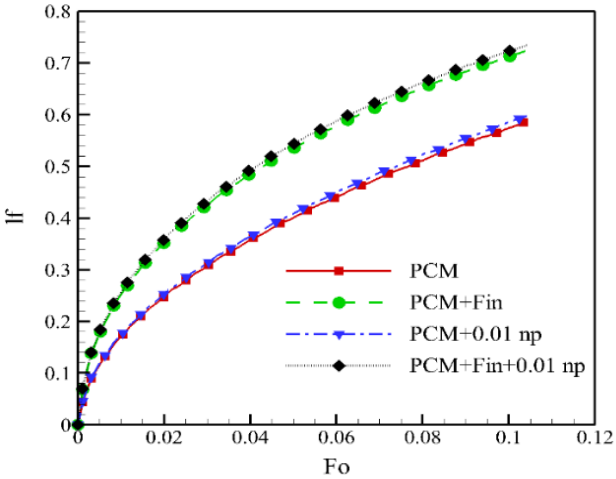
در شکل ۱۳ اثر پره با اثر حضور نانوذرات مس مورد مقایسه قرار گرفته است. مقدار کسر حجمی مایع در حضور پره و بدون نانوذرات برای نقطه ۰/۱۰۴۴ بی‌بعد، عدد ۰/۷۲۵ می‌باشد که نسبت به بالاترین درصد حجمی نانوذرات افزوده شده، یعنی ۴ درصد حجمی، ۱۴/۷۱ درصد بیشتر است. نتیجه چنین حاصل می‌شود که اثر پره در بهبود و تسریع ذوب ماده تغییر فاز دهنده بیشتر از نانوذرات می‌باشد. البته شایان ذکر است که اضافه نمودن پره به مسئله، در ابتدای فرآیند ذوب به صورت مقاومت عمل کرده و اثر منفی دارد.



شکل ۱۳ کسر حجمی مایع بر حسب زمان بی‌بعد در حضور پره و نانوذرات مس

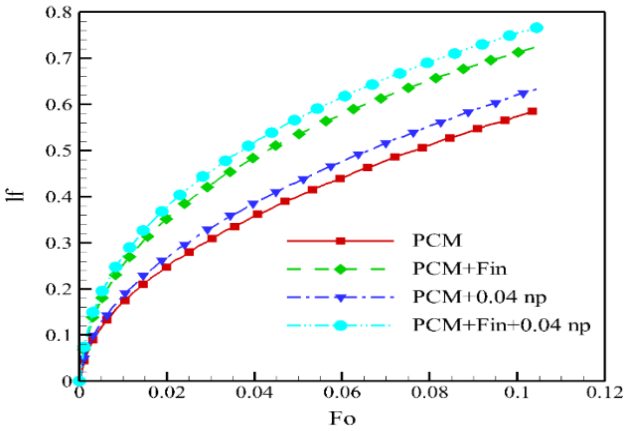
در شکل ۱۴ نانوذرات با ۱ درصد حجمی به همراه پره در داخل مخزن مورد استفاده قرار گرفته است. در نقطه انتهایی محور افقی، ۰/۱۰۴۴، مقدار کسر حجمی مایع در حضور نانوذرات و ماده تغییر فاز دهنده ۰/۵۹۷ و مقدار این کمیت در حضور پره و ماده تغییر فاز دهنده ۰/۷۲۵ می‌باشد که درحالت

ترکیبی به ۰/۷۳۴ افزایش می‌یابد.



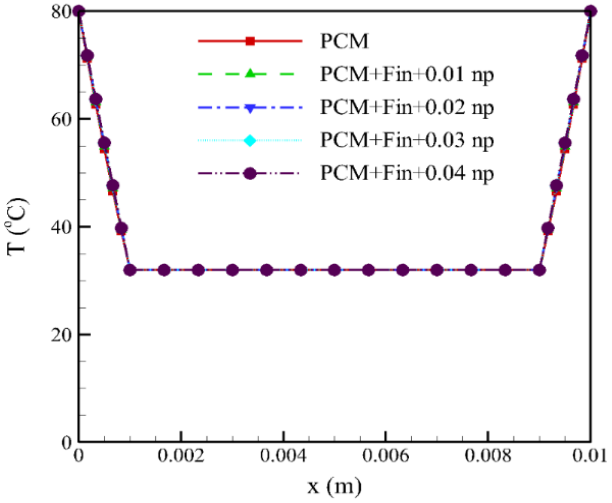
شکل ۱۴ کسر حجمی مایع بر حسب زمان بی‌بعد در حضور پره و نانوذرات و حالت ترکیبی آن‌ها

در شکل ۱۵ با افزایش درصد حجمی نانوذرات مس از ۱ درصد حجمی به ۴ درصد حجمی، نتیجه حاصل تعمیم داده می‌شود. مطابق انتظار مقدار کسر حجمی مایع افزایش یافته و مقادیر به‌دست آمده در حضور پره و نانوذرات ۰/۶۳۲ و در حالت ترکیبی ۰/۷۶۶ است.



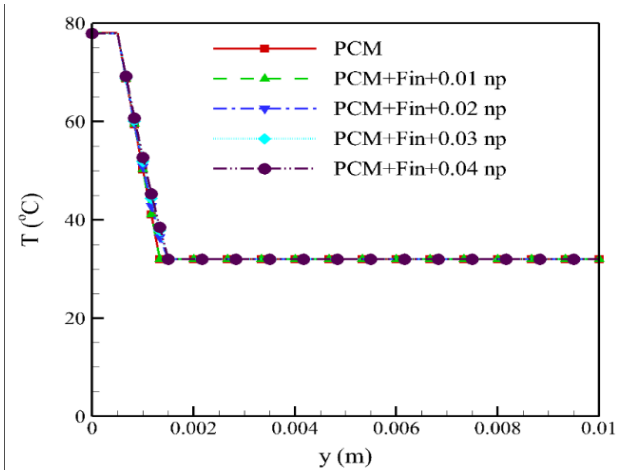
شکل ۱۵ تعمیم نتیجه شکل ۱۳ با افزایش درصد حجمی نانوذرات از ۱ درصد حجمی به ۴ درصد

در شکل ۱۶ مشاهده می‌شود که در هر دو طرف محفظه، دما از شرط مرزی ۸۰ درجه سلسیوس متأثر شده و به تدریج در طول محفظه از آن کاسته شده و نهایتاً به ۳۲ درجه که شرط اولیه است، رسیده و ثابت می‌ماند.



شکل ۱۶ نمودار دمای افقی ماده تغییر فاز دهنده در حضور نانوذرات و پره

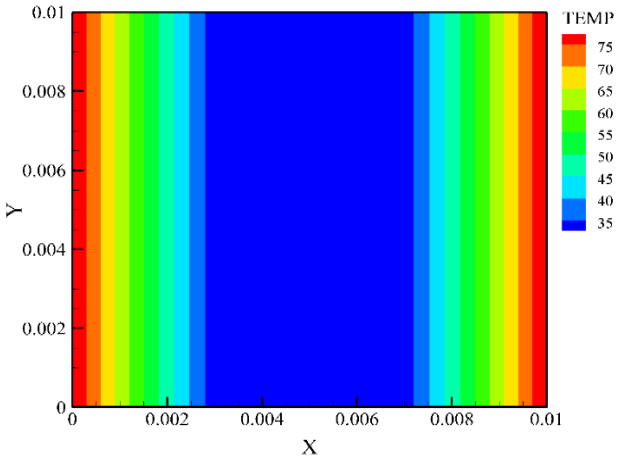
افزودن پره تأثیری در بهبود مقادیر دمای افقی ندارد. اثر حضور پره در دمای عمودی به مراتب بیشتر از اثر افزودن نانوذرات است. هنگامی که محفظه بدون پره است، هر خط عمودی یک خط دما ثابت است. با حضور پره در شکل ۱۷ مشاهده می‌شود که دما بر روی خط عمودی میانی محفظه افزایش می‌یابد. پره به طور محسوسی دمای عمودی را افزایش داده و نسبت به حالت بدون پره، در نقطه ۰/۰۰۰۵ متر عمودی، مقدار دما از ۳۲ درجه به ۷۷/۸۸ درجه افزایش یافته است. با این حال درنقطه مبدأ، دما از ۳۲ درجه به ۷۷/۹۰ درجه افزایش یافته که اختلاف بسیار کمی با شرط مرزی داده شده، یعنی ۸۰ درجه را دارد. حضوره پره افزایش ۱۴۳ درصدی را تأیید می‌کند. البته می‌توان با تغییر جنس پره، مقادیر متفاوتی را به دست آورد؛ اما در افزایش دمای عمودی شکی نیست. هم‌چنین شرط تقارن در پایین پره، موارد یاد شده را ارضا می‌کند.



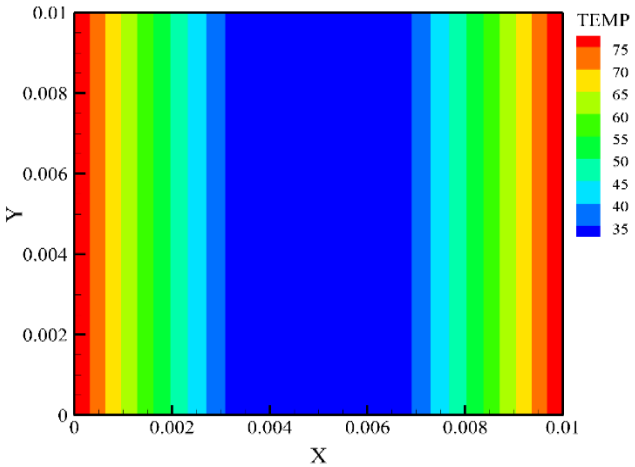
شکل ۱۷ نمودار دمای عمودی ماده تغییر فاز دهنده در حضور نانو ذرات و پره

خالی از لطف نیست که تمام مطالب گفته شده، به صورت خلاصه در نمودارهای پیشروی جبهه ذوب بررسی شود. چندین حالت مختلف پیشروی

جبهه ذوب اعم از ماده تغییر فازدهنده به تنهایی، همراه با نانو ذرات، همراه با پره و نیز حالت ترکیبی استفاده از آن‌ها در زیر گردآوری شده و با یکدیگر مقایسه می‌شود. چنان‌چه در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ مشاهده می‌شود با افزودن نانو ذرات با بیشترین درصد حجمی، سرعت پیشروی جبهه ذوب افزایش و هم‌چنین به عمق بیشتری نفوذ می‌کند.

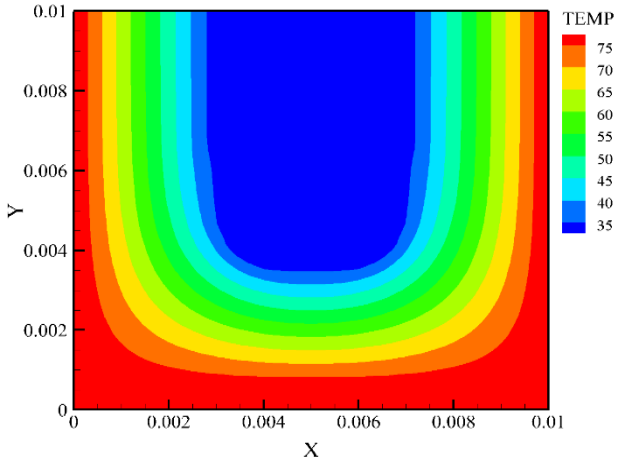


شکل ۱۸ نمودار پیشروی جبهه ذوب ماده تغییر فاز دهنده

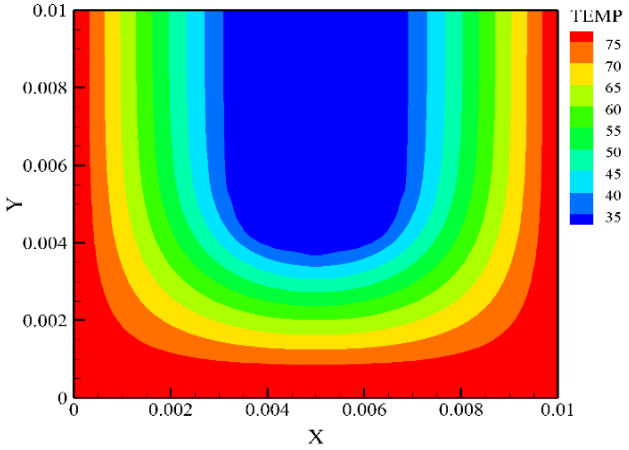


شکل ۱۹ نمودار پیشروی جبهه ذوب ماده تغییر فاز دهنده به همراه نانو ذرات مس با درصد حجمی ۴ درصد

مطابق با شکل‌های ۲۰ و ۲۱ با افزودن پره جبهه ذوب شکل متفاوتی به خود گرفته و از سمت بالا و پایین پره به شکل متقارن در حال پیشروی است. حالت ترکیبی پره و نانوذرات نیز می‌بایست بررسی گردد. با توجه به مطالب بالا، انتظار می‌رود علاوه بر تغییر شکل ناشی از افزودن پره در پیشروی جبهه ذوب، سرعت و عمق نفوذ نیز بهبود یابد. کانتورهای دما نیز متراکم‌تر شده و فرآیند ذوب تسریع می‌یابد. صحت گفته‌های فوق را می‌توان در نمودار زیر تحقیق کرد.

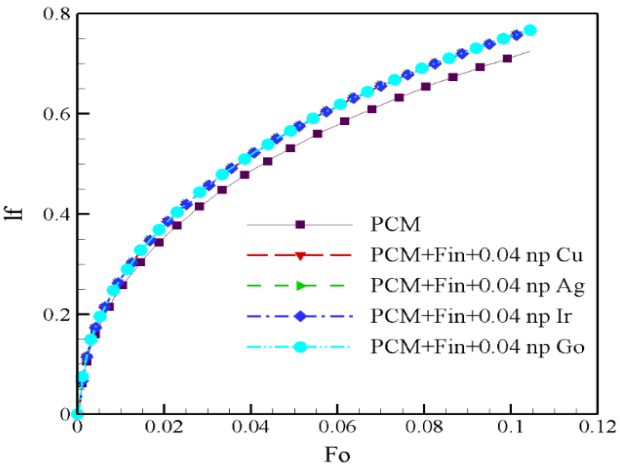


شکل ۲۰ نمودار پیشروی جبهه ذوب ماده تغییر فاز دهنده به همراه پره



شکل ۲۱ نمودار پیشروی جبهه ذوب ماده تغییر فاز دهنده به همراه نانوذرات مس با درصد حجمی ۴ درصد و به همراه پره

در تمام حالات ذکر شده، پس از گذشت زمان پایه برای حل، جبهه ذوب فراتر نمی‌رود. بدیهی است که هر لایه از جامد که در حال تغییر فاز و تبدیل شدن به مایع است، به عنوان مقاومتی برای نفوذ حرارت به لایه‌های داخلی عمل کند. استفاده از دیگر نانوذرات در مقایسه با مس، تأثیر محسوسی در افزایش کسر حجمی مایع داخل محفظه ندارد. همان‌طور که در شکل ۲۲ دیده می‌شود، نانوذرات مس، نقره، آهن و طلا در بالاترین درصد حجمی تأثیر یکسانی در تغییر فاز داخل محفظه دارند.



شکل ۲۲ نمودار مقایسه‌ای کسر حجمی مایع، میان نانوذرات متفاوت با ۴ درصد حجمی در حضور پره

۵- جمع‌بندی و نتیجه گیری

در پروژه حاضر، فرآیند ذوب یک ماده تغییر فاز دهنده با استفاده از روش اختلاف محدود و بر اساس فرمول‌بندی آنتالپی شبیه‌سازی شده است. هدف اصلی این پروژه، توسعه روش زیوکوویچ به مسائل دو بعدی بوده است. بدین منظور پس از استخراج معادله‌ی دو بعدی انرژی و اعمال اثرات تغییر فاز، معادله صریح برای محاسبه دما و کسر مایع بدست آمد. معادلات گسسته‌شده بدست آمده، نسبت به شروع و پایان فرآیند ذوب در هر نقطه حساس می‌باشند. نتایج بدست آمده از روش عددی حاضر، با نتایج دقیق حجم محدود مقایسه گردید که حاصل آن تایید روش توسعه‌داده شده است. هم‌چنین اثرات استفاده از پره و نانوذرات از جنس‌های متفاوت نشان داده شد. مشاهده گردید که با اضافه نمودن این عناصر در حالت ترکیبی با یکدیگر، به مراتب کارآیی بیشتری نسبت به حالت استفاده از تک‌تک آن‌ها را به دنبال دارد.

۶- پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی

- حل پروژه حاضر به روش تفاضل محدود، در دستگاه مختصات قطبی می‌تواند مکمل خوبی برای مسئله طرح شده باشد.
- به منظور عدم وابستگی مسئله به بررسی شرط پایداری، می‌توان از روش ضمنی برای حل معادلات بهره برد. این روش موضوع پایداری را بی قید و شرط ارضا می‌کند و تنها ایراد آن، حل دستگاه معادلات و پیچیدگی مربوط به حل آن است که می‌توان از روش جهت متناوب ضمنی[1] (ADI) به منظور تسریع در روند حل دستگاه معادلات استفاده نمود.
- با توجه به کاربردهای وسیع ماده تغییر فاز دهنده، جنس پره و نانوذرات نیز متناسب با کاربرد مورد نظر انتخاب شوند تا بیشترین کارآیی حاصل گردد.

۷- مراجع

[1] H. Mehling, L.F. Cabeza, Heat and cold storage with PCM, *Springer*, 2008.
[2] V. Alexiades, Mathematical modeling of melting and freezing processes, Routledge, 2017.
[3] L. Rubinšteĭn, The stefan problem, American Mathematical Soc., 2000.
[4] A. Solomon, D. Wilson, V. Alexiades, The quasi-stationary approximation for the Stefan problem with a convective boundary condition, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 7(3) (1984) 549-563.
[5] S.M. Vakilaltojjar, W. Saman, Analysis and modelling of a phase change storage system for air conditioning applications, *Applied Thermal Engineering*, 21(3) (2001) 249-263.
[6] N. Yuksel, A. Avci, M. Kilic, A model for latent heat energy storage systems, *International Journal of energy research*, 30(14) (2006) 1146-1157.
[7] S. Kalaiselvam, M. Veerappan, A.A. Aaron, S. Iniyan, Experimental and analytical investigation of solidification and melting characteristics of PCMs inside cylindrical encapsulation, *International Journal of Thermal Sciences*, 47(7) (2008) 858-874.
[8] S.Y. Reutskiy, The method of approximate fundamental solutions (MAFS) for Stefan problems for the sphere, *Applied Mathematics and Computation*, 227 (2014) 648-655.
[9] M. Bechiri, K. Mansouri, Exact solution of thermal energy storage system using PCM flat slabs configuration, *Energy conversion and management*, 76 (2013) 588-598.
[10] D. Mazzeo, G. Oliveti, M. De Simone, N. Arcuri, Analytical model for solidification and melting in a finite PCM in steady periodic regime, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 88 (2015) 844-861.
[11] C. Hsu, E.M. Sparrow, S. Patankar, Numerical solution of moving boundary problems by boundary immobilization and a control-volume-based finite-difference scheme, *International journal of heat and mass transfer*, 24(8) (1981) 1335-1343.
[12] B. Zivkovic, I. Fujii, An analysis of isothermal phase change of phase change material within rectangular and cylindrical containers, *Solar energy*, 70(1) (2001) 51-61.
[13] B.Nedjar, An enthalpy-based finite element method for nonlinear heat problems involving phase change, Computers & structures, 80(1) (2002) 9-21.
[14] E. Halawa, W. Saman, F. Bruno, A phase change processor method for solving a one-dimensional phase change problem with convection boundary, *Renewable Energy*, 35(8) (2010) 1688-1695.
[15] N. Sharifi, T.L. Bergman, A. Faghri, Enhancement of PCM melting in enclosures with horizontally-finned internal surfaces, *International journal of heat and mass transfer*, 54(19-20) (2011) 4182-4192.
[16] J.M. Mahdi, E.C. Nsofor, Solidification of a PCM with nanoparticles in triplex-tube thermal energy storage system, *Applied Thermal Engineering*, 108 (2016) 596-604.
[17] M. Bashar, K. Siddiqui, Experimental investigation of transient melting and heat transfer behavior of nanoparticle-enriched PCM in a rectangular enclosure, *Journal of Energy Storage*, 18 (2018) 485-497.
[18] J.M. Mahdi, E.C. Nsofor, Solidification enhancement of PCM in a triplex-tube thermal energy storage system with nanoparticles and fins, *Applied energy*, 211 (2018) 975-986.
[19] J.M. Mahdi, S. Lohrasbi, D.D. Ganji, E.C. Nsofor, Simultaneous energy storage and recovery in the triplex-tube heat exchanger with PCM, copper fins and Al2O3 nanoparticles, *Energy conversion and management*, 180 (2019) 949-961.
[20] M. Sheikholeslami, A. Zareei, M. Jafaryar, A. Shafee, Z. Li, A. Smida, I. Tlili, Heat transfer simulation during charging of nanoparticle enhanced PCM within a channel, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 525 (2019) 557-565.
[21] N. Pormohammad, N. Mostafavinia, A.Hassanzadeh, Numerical analysis of melting process of compounds containing nanoparticles for the development of phase change process , *journal of simulation and analysis of novel technologies in mechanical*

[1] Alternating Direction Implicit

engineering (journal of solid mechanics in engineering),7(2) (2014) 13-29.

[22] Y. Xuan, W. Roetzel, Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids, *International Journal of heat and Mass transfer*, 43(19) (2000) 3701-3707.