مدل‌سازی تحلیلی پنل استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری فشاری به کمک سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی

ساناز جعفری[1]

1 - استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بجنورد، بجنورد
* بجنورد، صندوق پستی 94531-55111، s.jafari@ub.ac.ir

چکیده

تجهیزات مهندسی هم چون پنل‌های استوانه‌ای جدار نازک اغلب در تماس با سطوحی هستند که باعث ایجاد تنش‌های تماسی بالایی در آن‌ها خواهد شد. بنابراین طراحی آن‌ها بر مبنای استحکام در برابر تنش‌های ناشی از این برخوردها از مهمترین نیازهای مهندسی می‌باشد. در این مقاله تاثیر بارگذاری فشاری بر روی سطح خارجی پنل استوانه‌ای جدار نازک با استفاده از ارائه مدلی تحلیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل‌سازی تحلیلی با استفاده از تئوری کلی در بردارنده هر دو کرنش‌های خمشی و غشایی انجام می‌گیرد. معادلات تعادل حاکم بر پنل استوانه‌ای بر اساس تئوری فلوگه در روابط تنش-کرنش به فرم ناویر استخراج می‌شوند و در ادامه دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست آمده توسط سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی حل خواهد شد. برای تقریب بهتر بارگذاری بر سطح خارجی پنل توسط سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی بخ خصوص در نواحی مرزی بارگذاری، از تاثیر پدیده گیبس در روابط استفاده می‌شود. جنس پنل استوانه‌ای در هماهنگی با کاربرد واقعی این پنل‌ها در محیط‌های کاری، آلمینیوم 2024-T351 در نظر گرفته شده است. راستی آزمایی نتایج حل معادلات دیفرانسیلی تعادل حاکم بر پنل با استفاده از شبیه‌سازی المان محدود در نرم افزار انسیس انجام می‌شود. مقایسه نتایج سازگاری خوبی را بین حل به روش سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی و روش المان محدود نشان می‌دهد. از نتایج این مقاله می‌توان برای مدل‌سازی تحلیلی پنل‌های استوانه‌ای تحت هر فرمی دلخواهی از بارگذاری و هم چنین سطح توزیع این بارگذاری استفاده کرد. از دیگر کاربردهای این مدل می‌توان به تخمین عمر لوله‌های استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری خارجی اشاره کرد.

کلیدواژگان

مدل‌سازی تحلیلی، پنل استوانه‌ای جدار نازک، سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی، پدیده گیبس، روش المان محدود

Analytical modeling of thin-walled cylindrical panel under pressure loading using infinite double Fourier series

S. Jafari[1]

1- Faculty of Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran.
* P.O.B. 94531-55111, Bojnord, Iran, s.jafari@ub.ac.ir

Abstract

Engineering equipment, such as thin-walled cylindrical panels, are often in contact with surfaces that will cause high contact stresses. Therefore, their design based on the strength one of the most important engineering needs. In this article, the effect of pressure loading on the outer surface of the thin-walled cylindrical panel is investigated using an analytical model. The governing equilibrium equations of the cylindrical panel are derived in the Navier form based on the general strain relations (bending and membrane) and the Flugge shell theory in the stress-strain relationships. These differential equations will be solved by the infinite double Fourier series. In order to get better approximation of the loading on the outer surface of the panel especially in the loading border by the infinite double Fourier series, the influence of the Gibbs phenomenon is used. The cylindrical panel material is considered aluminum 2024-T351 in accordance with the use of these panels in actual work environments. Verification of the results is done using finite element simulation in Ansys software. The comparison of the results shows a good agreement between the solution by the infinite double Fourier series method and the finite element method. The results of this paper can be used for analytical modeling of cylindrical panels under any desired form of loading and also the distribution area. The estimation of the life of thin-walled cylindrical pipe under external loading is other applications of this model.

Keywords

Analytical modeling, Thin-walled cylindrical panel, Infinite double Fourier series, Gibbs phenomenon, Finite element method.

۱- مقدمه

تجهیزات مهندسی اغلب در تماس با دیگر سطوح هستند. بارهای ناشی از این تماس‌ها اغلب بر روی سطح کوچکی از این اجزا اعمال می‌شوند که در نهایت منجر به فشارها و تنش‌های تماسی بالا خواهد شد. طراحی اجزا برای مقاومت در برابر این تنش‌های تماسی جزو مهمترین نیازهای مهندسی است [1]. در زمینه مسائل تماسی تا امروز مقالات مختلف [2-7] به همراه کتاب‌های معتبری مانند کتاب‌های گوریاچوا[1] [8] و جانسون[2] [9] ارائه شده است. پنل‌های استوانه‌ای[3] زیر مجموعه‌ای از پوسته‌های استوانه‌ای هستند که در امتداد محیطی محدود شده‌اند و در نتیجه بر اساس روابط حاکم بر پوسته‌ها تحلیل می‌شوند.

مسائل پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری خارجی به دلیل کاربرد گسترده آن‌ها در مهندسی عمران، مکانیک، معماری، هوانوردی و دریایی در گذشته به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است[9]. از دیدگاه مهندسی، اگر نسبت ضخامت به شعاع سطح میانی پوسته (h/R) کم باشد،

[1] Goryacheva

[2] Johnson

[3] Cylindrical panel

پوسته می‌تواند نازک در نظر گرفته شود. از جمله مهمترین تئوری‌های حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک که قابل استفاده برای پنل‌های استوانه‌ای نیز هستند می‌توان به ساندرز [11]، فلوگه [12]، لاو-تیموشنکو [13]، نیوردسون [14] اشاره کرد. در الاستیسیته خطی، این نظریه‌ها با استفاده از قانون هوک تغییر شکل‌ها و تنش‌های الاستیک را در پوسته‌ها پیش‌بینی می‌کنند. در این تئوری‌ها، با در نظر گرفتن یک سری فرضیات ساده کننده سیستم سه بعدی به یک سیستم دو بعدی کاهش می‌یابد [15]. تئوری‌های پوسته‌های جدار نازک خطی بسته به میزان ساده سازی معادلات الاستیسیته دارای درجه‌های دقت متفاوتی هستند و بر همین اساس به دو گروه تقسیم می‌شوند: تئوری‌هایی با تقریب مرتبه اول و تئوری‌هایی با تقریب مراتب بالاتر. فلوگه به طور مستقل تئوری تقریب مرتبه دوم پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک را توسعه داده است [12]. روابط و معادلات کلی این تئوری نتیجه مستقیم به کارگیری فرضیه‌های کیرشهف[1] به همراه فرض تغییر شکل‌های کوچک در معادلات سه بعدی الاستیسیته است. تئوری فلوگه ترم $\left({z}/{R_i}\right)$ را در روابط کرنش-جابجایی و معادلات حاصل از تنش حفظ می‌کند که در آن $R_i. i = 1..2$ شعاع‌های انحنای سطوح میانی پوسته است.

در این مقاله، یک مدل تحلیلی سه بعدی برای تجزیه و تحلیل تاثیر بارگذاری فشاری بر روی سطح خارجی پنل استوانه‌ای جدار نازک با استفاده از تئوری فلوگه توسعه داده شده است. این مدل قابل کاربرد برای هر فرمی از توزیع فشار (یکنواخت و غیریکنواخت) بر روی هر سطح توزیع خاصی (مستطیلی، بیضوی و ...) از پنل استوانه‌ای است. از روش حل سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی برای حل معادلات تعادل حاکم بر پنل در فرم ناویر استفاده شده است. ضرایب بار در این سری‌ها، توابع انتگرالی دوگانه هستند و برای تقریب دقیق‌تر بارگذاری در نواحی مرزی از روابط پدیده گیبس در بیان سری فوریه دوگانه نامتناهی بارگذاری استفاده شده است. شرایط مرزی پنل، تکیه گاه ساده در امتداد طولی و تکیه گاه گیردار در امتداد محیطی در نظر گرفته می‌شود. فرض بر این است که پنل از آلیاژ آلمینیوم T351-2024 ساخته شده است که خواص مکانیکی آن در جدول 1 آورده شده است. رفتار ماده الاستیک-کرنش سختی خطی تعریف می‌شود و برای جلوگیری از آغاز تغییر شکل‌های پلاستیک معیار تسلیم فون مایزز در نظر گرفته شده است. نتایج به دست آمده از مدل‌سازی تحلیلی با نتایج به دست آمده از روش شبیه‌سازی اجزای محدود به کمک نرم افزار انسیس[2] [16] مقایسه می‌شود.

جدول ۱ خواص مکانیکی آلمینیوم T351-2024

Table 1 Mechanical properties of T351-2024 Aluminum

جنس	تنش تسلیم (MPa)	ضریب پواسان	مدول یانگ (GPa)	مدول تانژانت (GPa)
آلمینیوم 2024-T351	300	0.3	200	35

۲-مدل سازی تحلیلی پنل استوانه‌ای جدار نازک

پنل استوانه‌ای جدار نازک مورد بررسی دارای ضخامت h، شعاع متوسط R، طول محوری L، نسبت پواسون υ، چگالی ρ و مدول الاستیسیته E است. پنل استوانه‌ای در صورتی جدار نازک در نظر گرفته می‌شود که نسبت $\left(\frac{h}{R} \ll 1\right)$ باشد. هندسه پنل مطابق با شکل 1، در سیستم مختصات استوانه در نظر گرفته شده است $(x. \emptyset. z)$، در حالیکه x و $\emptyset$ مختصات در جهات محوری و محیطی و z در راستای شعاعی، عمود بر سطح میانی و به سمت خارج پنل مثبت است $\left(-{h}/{2} \le z \le {h}/{2}\right)$. مبدا سیستم مختصاتی مطابق با شکل 1 در یک انتهای پنل در نظر گرفته شده است. از آنجائیکه پنل جدار نازک است، شرایط تنش صفحه‌ای بر آن حاکم است و می‌توان مولفه تنش در جهت ضخامت پوسته را صفر در نظر گرفت.

$$\sigma_x. \sigma_\emptyset. \tau_{x\emptyset} \neq 0. \quad \varepsilon_x. \varepsilon_\emptyset. \varepsilon_z. \gamma_{x\emptyset} \neq 0 \tag{1}$$

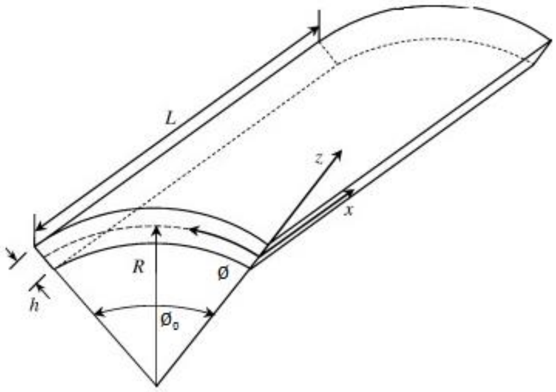


Fig. 1 Geometric characteristics of thin-walled cylindrical shell

شکل ۱ مشخصات هندسی پوسته استوانه ای جدار نازک

۲-۱- معادلات تعادل حاکم

در این مقاله مدل‌سازی پنل‌های جدار نازک تحت باگذاری خارجی بر اساس معادلات تعادل حاکم در بر دارنده تمامی مولفه‌های مربوط به تنش‌های خمشی و برشی تحت عنوان تئوری عمومی انجام می‌شود [12]. به دلیل تاثیر زیاد تنش‌های خمشی در تحلیل پنل‌ها، تخمین صحیح میدان تنش-کرنش ناشی از این تنش‌های خمشی به منظور رسیدن به طراحی قابل اطمینان دارای اهمیت فراوان است. معادلات تعادل حاکم بر پنل‌ها بر اساس برآیندهای نیرویی و گشتاوری در میان صفحه نوشته می‌شوند. این برآیندهای نیرویی و گشتاوری بایستی شش معادله تعادل مربوط به نیروها و گشتاورها را ارضاء نمایند. در این مجموعه معادلات، 3 معادله مربوط به نیروها و 3 معادله دیگر مربوط به گشتاورها هستند. در نهایت با حذف مولفه تنش‌های برشی عرضی، معادلات تعادل حاکم بر این پنل‌های استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری فشاری خارجی $(P_z(x. \emptyset))$ به صورت زیر بیان می‌شوند [14-11]:

$$R\frac{\partial N_x(x. \emptyset)}{\partial x} + \frac{\partial N_{\emptyset x}(x. \emptyset)}{\partial \emptyset} = 0 \tag{2}$$

1 Kirchhoffs hypothesis

2 Ansys

$$R^2\frac{\partial N_{x\emptyset}(x.\emptyset)}{\partial x}+R\frac{\partial N_{\emptyset}(x.\emptyset)}{\partial \emptyset}-\frac{\partial M_{\emptyset}(x.\emptyset)}{\partial \emptyset}-R\frac{\partial M_{x\emptyset}(x.\emptyset)}{\partial \emptyset}=0 \tag{3}$$

$$R\frac{\partial^2 M_{x\emptyset}(x.\emptyset)}{\partial x\partial \emptyset}+R\frac{\partial^2 M_{\emptyset x}(x.\emptyset)}{\partial x\partial \emptyset}+\frac{\partial^2 M_{\emptyset}(x.\emptyset)}{\partial^2 \emptyset}+\frac{\partial^2 M_{x}(x.\emptyset)}{\partial^2 x}+RN_{\emptyset}(x.\emptyset)+R^2P_z(x.\emptyset)=0 \tag{4}$$

$$RN_x(x.\emptyset)-RN_{\emptyset}(x.\emptyset)+M_{\emptyset x}(x.\emptyset)=0 \tag{5}$$

در این روابط ($N_x.N_{\emptyset}.N_{x\emptyset}.N_{\emptyset x}$) برآیندهای نیرویی و ($M_x.M_{\emptyset}.M_{x\emptyset}.M_{\emptyset x}$) برآیندهای گشتاوری در کل ضخامت پنل به ترتیب در امتدادهای محوری و محیطی و برشی می‌باشند. برای پنل استوانه‌ای در حالت کلی $N_{x\emptyset}\neq N_{\emptyset x}$ و $M_{x\emptyset}\neq M_{\emptyset x}$ است. با جایگزینی روابط کرنش-جابجایی در روابط تنش-کرنش، معادلات تعادل حاکم بر پوسته به فرم ناویر (بر اساس تغییر شکل‌ها) به دست می‌آیند. این مجموعه از معادلات تنش دارای 6 بر آیند تنشی مجهول است و مسئله مورد بررسی از نظر استاتیکی نامعین می‌باشد. لذا در ادامه برای حل مسئله باید تغییر شکل و تعییر مکان‌های پوسته بررسی شوند.

۲-۲- برآیند نیروها و گشتاورهای خمشی

در این مقاله از تئوری فلوگه برای پوسته‌های جدار نازک با تقریب مرتبه دوم برای مدل‌سازی تحلیلی پنل استوانه‌ای استفاده می‌شود. در این تئوری، ترم بدون بعد z/R_i در محاسبات مربوط به انتگرال‌های برآیندهای نیرویی و گشتاوری و هم چنین روابط کرنش-تغییر مکان حفظ می‌شود. از آنجایی که مولفه‌های تنش به صورت خطی در طول ضخامت پوسته تغییر می‌کنند، می‌توان این برآیندهای نیرویی و گشتاورهای خمشی را در حالت تنش صفحه‌ای با کمک روابط زیر محاسبه نمود [12]:

$$\begin{Bmatrix} N_x(x.\emptyset)\\ N_{x\emptyset}(x.\emptyset)\\ M_x(x.\emptyset)\\ M_{x\emptyset}(x.\emptyset)\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix} \sigma_x(x.\emptyset)\\ \tau_{x\emptyset}(x.\emptyset)\\ -z\sigma_x(x.\emptyset)\\ -z\tau_{x\emptyset}(x.\emptyset)\end{Bmatrix}(1+\frac{z}{R})dz \tag{6}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\emptyset}(x.\emptyset)\\ N_{\emptyset x}(x.\emptyset)\\ M_{\emptyset}(x.\emptyset)\\ M_{\emptyset x}(x.\emptyset)\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix} \sigma_{\emptyset}(x.\emptyset)\\ \tau_{x\emptyset}(x.\emptyset)\\ -z\sigma_{\emptyset}(x.\emptyset)\\ -z\tau_{x\emptyset}(x.\emptyset)\end{Bmatrix}dz \tag{7}$$

که در آن σ_x و $\sigma_{\emptyset}$ تنش‌های محوری و محیطی و $\tau_{x\emptyset}$ تنش برشی است. با انجام این انتگرال‌ها، تغییرات نسبت به z کاملاً از معادلات حذف می‌شود و نهایتا مسئله پنل استوانه‌ای سه بعدی به مسئله دو بعدی بر اساس مولفه‌های تغییر شکل سطح میانی پوسته کاهش می‌یابد.

۲-۳- روابط تنش-کرنش

توصیف روابط تنش-کرنش در جسم وابسته به نوع تغییر شکل آن است. در ناحیه تغییر شکل‌های الاستیک، رابطه تنش- کرنش بر اساس قانون هوک بیان می‌شود [11-15]. روابط تنش-کرنش در یک ماده الاستیک همسانگرد را می-توان با استفاده از دو ثابت ماده به نام‌های مدول الاستیک و ضریب پواسان توصیف نمود. برای پنل استوانه‌ای جدار نازک، رابطه بین تنش- کرنش در حالت تنش صفحه‌ای و برای مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_x(x.\emptyset)=\frac{E}{(1-v^2)}[\varepsilon_x(x.\emptyset)+v\varepsilon_{\emptyset}(x.\emptyset)] \tag{8}$$

$$\sigma_{\emptyset}(x.\emptyset)=\frac{E}{(1-v^2)}[\varepsilon_{\emptyset}(x.\emptyset)+v\varepsilon_x(x.\emptyset)] \tag{9}$$

$$\tau_{x\emptyset}(x.\emptyset)=\frac{E}{(1+2v)}\gamma_{x\emptyset}(x.\emptyset) \tag{10}$$

در این رابطه ε_x و $\varepsilon_{\emptyset}$ کرنش های کلی محوری و محیطی و $\gamma_{x\emptyset}$ مولفه برشی کرنش می‌باشد.

۲-۴- روابط کرنش-تغییر مکان

کرنش کلی در هر المانی از پوسته استوانه‌ای جدار نازک به فاصله z از میان صفحه دارای دو مولفه غشایی و خمشی است. مولفه غشایی کرنش در سرتاسر ضخامت پوسته دارای مقداری ثابت است، اما مولفه خمشی کرنش به شکل خطی از سطح داخلی تا سطح خارجی پوسته تغییر می‌کند. با در نظر گرفتن $w(x.\emptyset).u(x.\emptyset).v(x.\emptyset)$ به عنوان مولفه‌های تغییر مکانی میان صفحه پوسته در راستاهای شعاعی، محوری و محیطی، پارامترهای شعاع انحنای پنل استوانه‌ای ($R_1=\infty.R_2=R$) و تئوری کلاسیک برشی، کرنش‌های کلی به صورت زیر بیان می‌شوند [12].

$$\varepsilon_x(x.\emptyset)=[\bar{\varepsilon_x}(x.\emptyset)+z\chi_x(x.\emptyset)] \tag{11}$$

$$\varepsilon_{\emptyset}(x.\emptyset)=\frac{1}{(1+\frac{z}{R})}[\bar{\varepsilon_{\emptyset}}(x.\emptyset)+z\chi_{\emptyset}(x.\emptyset)] \tag{12}$$

$$\gamma_{x\emptyset}(x.\emptyset)=\frac{1}{(1+\frac{z}{R})}[\bar{\gamma}_{x\emptyset}(x.\emptyset)+2z\chi_{x\emptyset}(x.\emptyset)(1-\frac{z}{2R})] \tag{13}$$

در این روابط $\bar{\varepsilon_x}$ و $\bar{\varepsilon_{\emptyset}}$ کرنش‌های کلی محوری و محیطی و $\bar{\gamma}_{x\emptyset}$ کرنش برشی در میان صفحه لوله و یا در واقع همان کرنش‌های غشایی می‌باشند و χ_x، $\chi_{\emptyset}$ و $\chi_{x\emptyset}$ روابط مربوط به انحناها در امتدادهای محوری، محیطی و برشی هستند که به کمک آنها کرنش های خمشی محاسبه می‌شوند. در فرمول بندی فلوگه روابط کرنش‌های غشایی و خمشی بر اساس تغییر مکان‌ها در میان صفحه لوله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

کرنش‌های غشایی:

$$\bar{\varepsilon_x}(x.\emptyset)=\frac{\partial u(x.\emptyset)}{\partial x} \tag{14}$$

$$\bar{\varepsilon_{\emptyset}}(x.\emptyset)=\frac{1}{R}\frac{\partial v(x.\emptyset)}{\partial \emptyset}+\frac{w(x.\emptyset)}{R} \tag{15}$$

$$\bar{\gamma}_{x\emptyset}(x.\emptyset)=\frac{1}{R}\frac{\partial u(x.\emptyset)}{\partial \emptyset}+\frac{\partial v(x.\emptyset)}{\partial x} \tag{16}$$

کرنش‌های خمشی:

$$\chi_x(x.\emptyset)=-\frac{\partial^2 w(x.\emptyset)}{\partial^2 x} \tag{17}$$

$$\chi_{\emptyset}(x.\emptyset)=-\frac{1}{R^2}(\frac{\partial^2 w(x.\emptyset)}{\partial^2 \emptyset}-2\frac{\partial v(x.\emptyset)}{\partial \emptyset}+w(x.\emptyset)) \tag{18}$$

$$\chi_{x\emptyset}(x.\emptyset)=-\frac{1}{R}(\frac{\partial^2 w(x.\emptyset)}{\partial x\partial \emptyset}-\frac{1}{2}\frac{\partial v(x.\emptyset)}{\partial x}) \tag{19}$$

۲-۵- فرمول بندی ناویر معادلات تعادل

در این مقاله حل معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای در محدوده تغییر شکل-های الاستیک با استفاده از روش فرمول بندی ناویر انجام می‌گیرد. در روش

ناویر معادلات تعادل بر اساس مولفه‌های تغییر مکان و مشتقات آنها بازنویسی می‌شوند. مولفه‌های تغییر مکانی به دست آمده از روش حل ناویر به خوبی شرایط سازگاری کرنش را ارضاء می‌نمایند.

در ابتدا روابط مربوط به کرنش های غشایی و خمشی (14-16) و (19-17)در روابط تعریف شده برای کرنش-تغییر مکان (11-13) جایگذاری می‌شوند. نتیجه این کار در روابط تنش-کرنش مربوطه وارد خواهد شد. برآیندهای نیرویی و گشتاوری به کمک روابط انتگرالی (6-7) محاسبه می‌شوند و روابط به دست آمده وارد معادلات تعادل خواهند شد. نهایتاً به دستگاه معادلات دیفرانسیلی خطی بر اساس تغییر مکان‌های مجهول در دو راستای x و$\emptyset$ خواهیم رسید که بایستی حل همزمان شوند. فرم ناویر معادلات تعادل در حالت تغییر شکل‌های الاستیک بر اساس فرمول بندی فلوگه در زیر آورده شده است:

$$-\frac{Eh}{12(1-v^2)}\left[-\frac{\partial^2 w(x.\emptyset)}{\partial^2 x}+12\frac{\partial^2 u(x.\emptyset)}{\partial^2 x}+12v\frac{\partial^2 \mathrm{v}(x.\emptyset)}{\partial x\partial\emptyset}+12v\frac{\partial w(x.\emptyset)}{\partial x}\right]+\frac{E}{(1+v)}\left[\frac{\partial^3 w(x.\emptyset)}{\partial x\partial^2\emptyset}RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)+\frac{\partial^2 u(x.\emptyset)}{\partial^2\emptyset}Ln\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)+h\frac{\partial^2 \mathrm{v}(x.\emptyset)}{\partial x\partial\emptyset}-h\frac{\partial^3 w(x.\emptyset)}{\partial x\partial^2\emptyset}\right]=0 \tag{20}$$

$$\frac{Eh}{24(1-v^2)}\left[\frac{\partial^3 w(x.\emptyset)}{\partial^2 x\partial\emptyset}(h^2v-3h^2)-12\frac{\partial^2 \mathrm{v}(x.\emptyset)}{\partial^2 x}\left(R^2v+\frac{1}{4}h^2v-R^2-\frac{1}{4}h^2\right)+12\frac{\partial^2 u(x.\emptyset)}{\partial x\partial\emptyset}R(1+v)+24\frac{\partial^2 \mathrm{v}(x.\emptyset)}{\partial^2\emptyset}+24\frac{\partial \mathrm{w}(x.\emptyset)}{\partial\emptyset}\right]=0 \tag{21}$$

$$\frac{E}{24(1+v)}\left[12\frac{\partial^4 w(x.\emptyset)}{\partial^2 x\partial^2\emptyset}\left(R^3Ln\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-12R^2h+\frac{1}{12}h^3+\frac{1}{6}h^3\right)+12\frac{\partial^3 u(x.\emptyset)}{\partial x\partial^2\emptyset}\left(R^2Ln\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-Rh\right)-3\frac{\partial^3 \mathrm{v}(x.\emptyset)}{\partial^2 x\partial\emptyset}\right]+\frac{E}{(1-v^2)}\left[\frac{\partial u(x.\emptyset)}{\partial x}Rhv-\frac{\partial \mathrm{v}(x.\emptyset)}{\partial\emptyset}\left(RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-2h\right)+w(x.\emptyset)\left(2RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-h\right)+\left(\frac{\partial^2 w(x.\emptyset)}{\partial^2\emptyset}+\frac{\partial^3 \mathrm{v}(x.\emptyset)}{\partial^3\emptyset}-\frac{\partial^4 w(x.\emptyset)}{\partial^4\emptyset}\right)\left(RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-h\right)-\frac{\partial^2 w(x.\emptyset)}{\partial^2\emptyset}\left(2RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-2h\right)-\frac{1}{12}\frac{\partial^4 \mathrm{w}(x.\emptyset)}{\partial^2 x\partial^2\emptyset}h^2v\right]-\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}\left[-\frac{\partial^4 w(x.\emptyset)}{\partial^4 x}R^2+\frac{\partial^3 u(x.\emptyset)}{\partial^3 x}R+2\frac{\partial^3 \mathrm{v}(x.\emptyset)}{\partial^2 x\partial\emptyset}v-\frac{\partial^2 w(x.\emptyset)}{\partial^2 x}v-\frac{\partial^4 \mathrm{w}(x.\emptyset)}{\partial^2 x\partial^2\emptyset}v\right]+P_z(x.\emptyset)R^2=0 \tag{22}$$

$$0=0 \tag{23}$$

همان طور که مشخص است معادله تعادل چهارم به ازاء روابط تنش-کرنش و کرنش-تغییر مکان در نظر گرفته شده در حالت الاستیک به خودی خود برقرار است. بنابراین تعداد معادلات دیفرانسیلی حاکم بر پنل استوانه‌ای جدار نازک به سیستمی از دو معادله با مشتقات مرتبه دوم و یک معادله با مشتقات مرتبه چهارم در بردارنده سه مولفه تغییر مکانی مجهول $w(x.\emptyset).u(x.\emptyset).v(x.\emptyset)$ کاهش می یابد. در ادامه با در نظر گرفتن شرایط مرزی پوسته، معادلات بالا به کمک روش سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی حل خواهند شد.

۲-۶- شرایط مرزی

شرایط مرزی استاتیکی و سینماتیکی حاکم بر پنل‌های استوانه‌ای جدار نازک را می‌توان به کمک روابط (6-7) بر حسب تغییر مکان‌های مجهول$w(x.\emptyset).u(x.\emptyset).v(x.\emptyset)$ بیان کرد. در این مقاله فرض بر این است که شرایط مرزی در امتداد محوری پنل ($x=0.x=L$) ساده و در امتداد لبه‌های محیطی پنل ($\emptyset=0.\emptyset=\emptyset_0$) گیردار است.

- اگر لبه $x=0$ دارای شرط مرزی ساده باشد روابط حاکم بر آن به صورت زیر نوشته می شود:

$$w(0.\emptyset)=0.u(0.\emptyset)=0.\mathrm{v}(0.\emptyset)=0.M_x(0.\emptyset)=0 \tag{24}$$

با توجه به رابطه انتگرالی (۶) و استفاده از روابط مورد نیاز، شکل نهایی شرط مرزی $M_x(0.\emptyset)$ با در نظر گرفتن این نکته که در طول لبه x ثابت است و در نتیجه مشتقات نسبت به $\emptyset$ حذف می‌شوند، بر اساس جابجایی‌های مجهول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_x(0.\emptyset)=\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}\left[\frac{\partial^2 w(0.\emptyset)}{\partial^2 x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u(0.\emptyset)}{\partial x}\right]=0 \tag{25}$$

- اگر لبه $x=L$ دارای شرط مرزی ساده باشد روابط حاکم بر آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(L.\emptyset)=0.u(L.\emptyset)=0.\mathrm{v}(L.\emptyset)=0.M_x(L.\emptyset)=0 \tag{26}$$

در حالیکه،

$$M_x(L.\emptyset)=\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}\left[\frac{\partial^2 w(L.\emptyset)}{\partial^2 x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u(L.\emptyset)}{\partial x}\right]=0 \tag{27}$$

- اگر لبه $\emptyset=0$ دارای شرط مرزی گیردار باشد روابط حاکم بر آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x.0)=0.u(x.0)=0.\mathrm{v}(x.0)=0.\frac{\partial \mathrm{w}(x.0)}{\partial\emptyset}=0 \tag{28}$$

- اگر لبه $\emptyset=\emptyset_0$ دارای شرط مرزی گیردار باشد روابط حاکم بر آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$w(x.\emptyset_0)=0.u(x.\emptyset_0)=0.\mathrm{v}(x.\emptyset_0)=0.\frac{\partial \mathrm{w}(x.\emptyset_0)}{\partial\emptyset}=0 \tag{29}$$

۳-سری فوریه دوگانه نامتناهی

یک روش برای حل معادلات دیفرانسیلی جزئی استفاده از سری‌های نامتناهی است. در این روش متغیرهای مجهول به شکل سری‌های نامتناهی تعریف می-شوند و این کار به نحوی انجام می‌گیرد که شرایط مرزی مسئله برآورده شوند. با انجام این کار معادلات با دیفرانسیل جزئی به دستگاهی از معادلات جبری خطی تبدیل خواهد شد. در میان سری‌های نامتناهی، روش بسط سری فوریه دوگانه نامتناهی، روشی قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با انواع بارگذاری‌های شعاعی، محیطی و محوری است. در این روش تمامی مجهولات

و معلومات مسئله بر اساس بسط سری فوریه دوگانه بیان می‌شوند و نهایتاً می‌توان تغییر مکان‌های مجهول در مسئله را به دست آورد. در این مقاله بسط سری فوریه دوگانه میدان‌های تغییر مکانی و بارگذاری فشاری در امتداد شعاعی z بر روی پنل، بر اساس متغیرهای محوری x و محیطی $\emptyset$ تعریف شده است. شکل کلی این سری‌های دوگانه با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده-گیردار به صورت زیر است [12, 18-17]:

$$\begin{bmatrix} w \\ u \\ v \\ P_z \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} w_{mn}\cos(n\emptyset)\sin(\lambda x) \\ u_{mn}\cos(n\emptyset)\cos(\lambda x) \\ v_{mn}\sin(n\emptyset)\sin(\lambda x) \\ P_{mn}\cos(n\emptyset)\sin(\lambda x) \end{bmatrix} \quad (30)$$

در این رابطه $\lambda = \frac{m\pi}{L}$ است. برای دستگاه مختصات استوانه‌ای انتخاب شده بر روی پنل، تمامی جملات موجود در بسط‌های فوریه و مشتقات آن‌ها شامل عبارت $\sin(\lambda x)$ در انتهای پوسته حذف می‌شوند که مطابق با شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای آن است. با جایگزین نمودن روابط (30) در دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم، دستگاه معادلات جبری خطی شامل ضرایب فوریه تغییر مکان‌ها $((w_{mn}.u_{mn}.v_{mn}))$ و بارگذاری به دست می‌آید. با حل نمودن این دستگاه معادلات جبری خطی ضرایب فوریه مجهول برای تغییر مکان‌ها بر اساس ضریب فوریه بارگذاری $\boldsymbol{P_{mn}}$ محاسبه می‌شوند.

۳-۱-فشار تماسی در فرم سری فوریه دوگانه نامتناهی

به منظور اعمال بارگذاری از نوع فشار تماسی در امتداد شعاعی پنل با هر فرم دلخواه می توان از سری فوریه دوگانه نامتناهی استفاده کرد. تابع توزیع فشار تماسی به صورت یک سری فوریه دوگانه نامتناهی در نظر گرفته می‌شود و در محدوده بارگذاری اعمال می‌گردد. این روش اعمال فشار تماسی برای حل به کمک سری‌های فوریه نامتناهی مناسب است. سری فوریه دوگانه بارگذاری بر روی پنل استوانه‌ای جدار نازک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(x.\emptyset) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_{mn}\cos(n\emptyset)\sin(\lambda x) \quad (31)$$

ضرایب فوریه P_{mn} با محاسبه انتگرال دوگانه زیر در محدوده بارگذاری اعمالی و هم چنین محدوده خود جسم محاسبه می‌شوند:

$$P_{mn} = \frac{4}{ab}\int_{\zeta-\frac{c}{2}}^{\zeta+\frac{c}{2}}\int_{\eta-\frac{d}{2}}^{\eta+\frac{d}{2}} P_z(x.\emptyset)\cos(n\emptyset)\sin(\lambda x)dxd\emptyset \quad (32)$$

مطابق با شکل 2، در این رابطه $(\zeta.\eta)$ مختصات مرکز بارگذاری است و $(c.d)$ به ترتیب ابعاد بارگذاری در امتداد محوری و محیطی پوسته می باشند. خطاهای به وجود آمده در تبدیل تابع توزیع فشار به سری فوریه بارگذاری در نقاط مرزی را به عنوان پدیده گیبس تعریف می‌کنند و برای حذف آن از روش تقریبی سیگما استفاده می‌شود. در این روش تقریبی، سری فوریه بارگذاری با اعمال ضریب جدیدی بازنویسی می‌شود. این ضرایب جدید در واقع همان ترم $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\frac{sins(\beta)}{\beta}$ در رابطه (33) هستند که مقادیر ثوابت آن‌ها برابر با $\alpha = \frac{n\pi}{N}.\beta = \frac{m\pi}{M}.n = [1..N].m = [1..M]$ است. در این مقاله بارگذاری فشاری یکنواخت بر روی سطح خارجی پوسته در یک محدوده مستطیلی اعمال می‌شود و این روش تقریبی برای اصلاح بارگذاری‌ها با توزیع یکنواخت در محدوده بارگذاری بسیار مفید است.

$$P(x.\emptyset) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_{mn}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\frac{sin(\beta)}{\beta}\cos(n\emptyset)\sin(\lambda x) \quad (33)$$

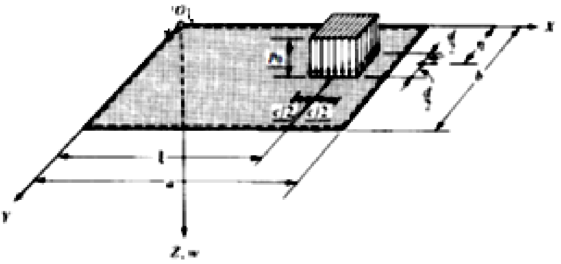


Fig. 2 Pressure loading characteristics on the outer surface of the panel

شکل ۲ مشخصات بارگذاری فشاری بر روی سطح خارجی پوسته

در نتیجه برای یک پنل استوانه‌ای تحت بارگذاری در سطح خارجی پوسته با در نظر گرفتن $a = L.b = \emptyset_0 R$ در رابطه (33) سری فوری بارگذاری به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_z(x.\emptyset) = \sum_{m=0}^{M}\frac{P_{m0}}{2}\frac{\sin(\beta)}{\beta}\sin(\lambda x) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} P_{mn}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\frac{sins(\beta)}{\beta}\cos(n\emptyset)\sin(\lambda x) \quad (34)$$

که ضرایب فوریه آن برابر است با:

$$P_{m0} = \frac{2}{ab}\int_{\zeta-\frac{c}{2}}^{\zeta+\frac{c}{2}}\int_{\eta-\frac{d}{2}}^{\eta+\frac{d}{2}} P_z(x.\emptyset)\sin(\lambda x)dxd\emptyset \quad (35)$$

$$P_{mn} = \frac{4}{ab}\int_{\zeta-\frac{c}{2}}^{\zeta+\frac{c}{2}}\int_{\eta-\frac{d}{2}}^{\eta+\frac{d}{2}} P_z(x.\emptyset)\cos(n\emptyset)\sin(\lambda x)dxd\emptyset$$

تاثیر پدیده گیبس در تقریب صحیح سری فوریه برای بارگذاری‌های فشاری در قسمت ارائه نتایج نشان داده خواهد شد.

۴- مدل سازی المان محدود

در این مقاله از روش المان محدود برای راستی آزمایی نتایج به دست آمده از حل معادلات ناویر حاکم بر پنل‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری خارجی استفاده شده است. برای رسیدن به این هدف مدل الاستیک-پلاستیکی از پنل استوانه-ای سه بعدی غیرخطی در نرم افزار انسیس ایجاد شد. از آنجاییکه فرض بر این است که تغییر شکل‌ها در پنل الاستیک باشند، معیار تسلیم فون مایزز برای شناسایی تسلیم ماده در نظر گرفته شد و رفتار مواد به صورت الاستیک-کرنش سختی خطی تعریف گردید. مدل المان محدود پنل استوانه‌ای با استفاده از شعاع میان صفحه، ضخامت دیواره و مختصه زاویه‌ای پنل ایجاد شد. پنل با استفاده از المان پوسته 4 گره ای SHELL181 با شش درجه آزادی در هر گره (سه تا انتقالی و سه تا دورانی) مدل‌سازی شد. این نوع از المان برای کاربردهای غیرخطی و کرنش‌های بزرگ مناسب است. منحنی رفتار ماده بر اساس کرنش سختی خطی مطابق با شکل 3 توسط دستور TB، BISO در نرم افزار انسیس تعریف شده است. بارگذاری به صورت فشار خارجی یکنواخت بر

شعاع میانی پنل استوانه‌ای مدل شد. بارگذاری بر روی سطح خارجی پنل با دستور بارگذاری سطحی در مجموعه انسیس اجرا می‌گردد.

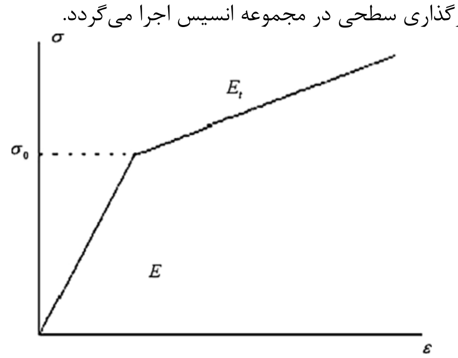


Fig.3 Idealized stress–strain curve for a linear hardening material

شکل ۳ منحنی تنش-کرنش ایده آل برای یک ماده با رفتار کرنش سختی خطی

با توجه به تقارن در هندسه و بارگذاری پنل استوانه‌ای، مطلوب است که فقط یک چهارم از پنل مدل سازی شود تا هم اندازه مدل و هم زمان حل آن کاهش یابد. نمونه‌ای از مدل ایجاد شده به همراه شرایط مرزی، تقارنی و مش-بندی المان محدود برای پنل استوانه‌ای با ابعاد دلخواه در شکل 4 نشان داده شده است. لازم به ذکر است برای به دست آوردن تعداد بهینه المان‌ها تست همگرایی پاسخ‌ها انجام شده است.

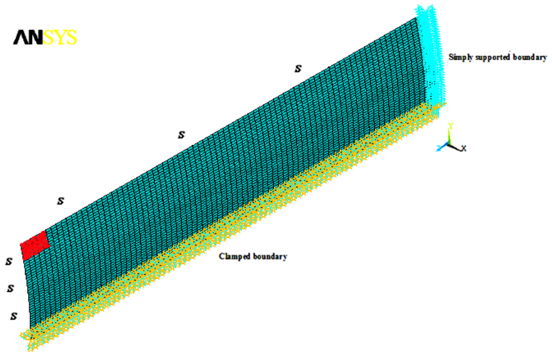


Fig. 4 Boundary and symmetry condition, Finite element mesh and loading for quarter model of cylindrical panel

شکل ۴ شرایط مرزی، تقارنی، مش بندی المان محدود و بارگذاری فشاری برای مدل یک چهارم پنل استوانه‌ای

۵- آنالیز عددی

مدل تحلیلی ارائه شده در این مقاله قادر به پیش‌بینی تغییر مکان در پنل‌های استوانه‌ای تحت هر فرمی از بارگذاری فشاری (یکنواخت و غیر یکنواخت) و ناحیه اعمال بار (مستطیلی، بیضوی و ...) در سطح خارجی پنل است. زیرا در این مدل، توزیع فشار به صورت سری فوریه دوگانه نامتناهی بیان می‌شود و انواع توابع قابل بیان به صورت سری‌های فوریه نامتناهی هستند.

ابعاد پنل شامل شعاع میان صفحه، زاویه پنل و ضخامت دیوار در جدول 2 نشان داده شده است. به علاوه مشخصات سه مدل متفاوت بر اساس زاویه پنل و شرایط بارگذاری در جدول 3 آورده شده است. از این مدل‌ها برای راستی آزمایی نتایج و هم چنین مطالعه پارامتریک استفاده می‌شود. همان طور که قبلا بیان شد میزان بارگذاری به حدی است که پنل دچار تغییر شکل‌های پلاستیک نگردد و برای تشخیص آن از معیار فون مایزز استفاده شده است. به

علاوه تمامی مدل‌ها دارای شرایط مرزی ساده-گیردار در لبه‌های مخالف هم هستند.

جدول ۲ ابعاد هندسی پنل استوانه‌ای

Table 2 Geometric dimensions of cylindrical panel

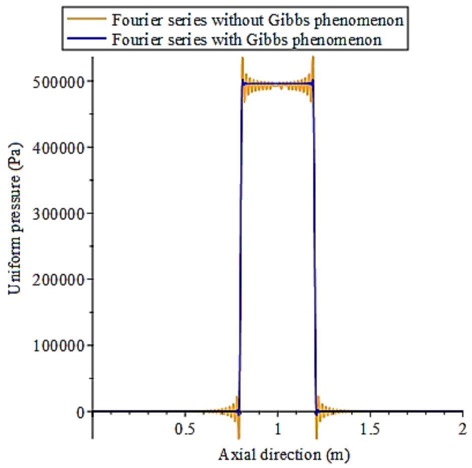
$\hat{S}=R\emptyset_0$	$\emptyset_0$	R (m)	h (m)	h/R	L (m)
1.168	180°	0.37225	0.015	0.04	2

جدول ۳ مدل های پنل استوانه ای بر اساس زاویه پنل و شرایط بارگذاری متفاوت

Table 3 cylindrical panel models based on panel angle and different loading conditions

مدل	$P_z(x.\emptyset)=P_0$	a	b	ζ	η	c	d
P_1	0.5 Mpa	2	$\frac{\pi}{2}*R$	1	$\pi/4$	0.4	$\pi/6$
P_2	0.5 Mpa	2	$\pi*R$	1	$\pi/2$	0.4	$\pi/6$
P_3	0.5 Mpa	2	$3\frac{\pi}{2}*R$	1	$3\pi/4$	0.4	$\pi/6$

در ابتدا تاثیر پدیده گیبس در تبدیل بارگذاری یکنواخت فشاری به سری فوریه دوگانه نامتناهی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل 5 تفاوت سری دوگانه متناهی برای اعمال بارگذاری یکنواخت فشاری با و بدون در نظر گرفتن پدیده گیبس بر اساس مدل P_2 نشان داده شده است. همان طور که مشخص است زمانی که پدیده گیبس در معادلات وجود ندارد مقدار فشار یکنواخت در مرزهای بارگذاری به شدت نوسانی است و سری فوریه تقریب مناسبی از بارگذاری یکنواخت را پیش بینی نمی‌کند. بر همین اساس در ادامه روابط پدیده گیبس در مدل‌سازی تحلیلی در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۵ سری فوریه دوگانه نا متناهی تابع بارگذاری فشاری با و بدون در نظر گرفتن پدیده گیبس

Fig. 5 Dual infinite Fourier series of pressure loading function with and without Gibbs phenomenon

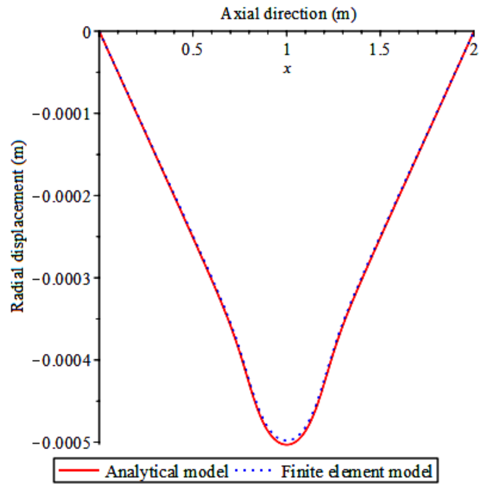
با جایگذاری تغییر مکان‌های مجهول به فرم سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی در معادلات تعادل، نهایتا به دستگاه معادله خطی بر حسب ضرایب $(w_{mn}.u_{mn}.v_{mn})$ خواهیم رسید. با حل این دستگاه معادلات ضرایب فوریه در توابع مجهولات محاسبه می شوند و به این ترتیب می‌توان نتایج مدل ارائه شده را با نتایج شبیه سازی المان محدود توسط نرم افزار انسیس مقایسه کرد. بر همین اساس این ضرایب به صورت محاسبه شدند:

$$
\begin{aligned}
w_{mn} = {} & (12R^4\left(R^4\lambda^2 + \left(\frac{h^2\lambda^2}{24} + n^2\right)R^2 - \frac{h^2\lambda^2}{24}\right)(R^2\lambda^2 + n^2) \\
& (v^2 - 1)P_{mn}) \\
& /(\left(1 - \frac{h^4\lambda^4 - 48n^2\lambda^2(v+1)h^2 + 288v^2 - 288)}{24R^2\lambda^4h^2}\right. \\
& - \frac{(h^4\lambda^4 + 48\left(n^2 + \frac{v}{2}\right)h^2\lambda^2 + (-1152v - 576)n^4)}{288R^4\lambda^4} \\
& - \frac{(576v^2 - 576)n^2 + 432(576v^2 - 576) - 144)}{288R^4\lambda^4} \\
& - \frac{\left(v\lambda^4(1+n^2)h^4 + 24\left(\begin{gathered}(v^2+2v)n^4 + \\ \left(\frac{3}{2}v^2 + 2v - \frac{3}{2}\right)n^2 + \frac{v^2}{2}\end{gathered}\right)h^2\lambda^2\right)}{288R^6\lambda^6} \\
& - \frac{(v - 576(-1 + (1+v)n^4)n^2)}{288R^6\lambda^6} \\
& + \frac{\left(\lambda^4(n^2 - v^2 + 1)h^4 - 48\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)vh^2\lambda^2n^2 + 288n^6 - 288n^2\right)n^2}{288R^8\lambda^8} \\
& \left. + \frac{h^2n^4(n^2+1)(h^2\lambda^2v - 12n^2 + 12)}{288R^{10}\lambda^8}\right)hE)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

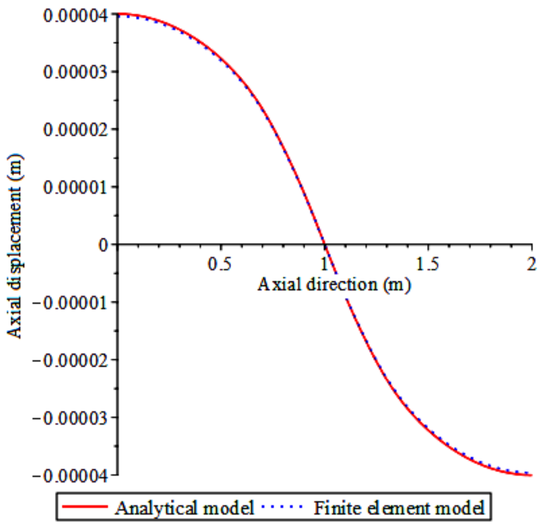
$$
\begin{aligned}
u_{mn} & \\
= {} & ((v^2 \\
& - 1)P_{mn}R^3\lambda\left(\begin{gathered}\left(\frac{R^4\lambda^4}{24} + \frac{R^2\lambda^2v}{24} - \frac{n^2(n^2+1)}{24}\right)h^4 \\ + \left(R^4\lambda^4 + \left((v+2)n^2 + \frac{3}{2}v\right)R^2\lambda^2 - \frac{3}{2}n^2\right)R^2h^2 \\ +12R^6\lambda^2v - 12R^4n^2\end{gathered}\right)) \\
& /((- \frac{\lambda^2(R^2\lambda^2 + n^2v)(R^4\lambda^4 + R^2\lambda^2v - n^4 - n^2)h^6}{288} \\
& +h^4\left(\begin{gathered}-\frac{R^8\lambda^8}{24} - \frac{\left(n^2 + \frac{1}{2}v\right)R^6\lambda^6}{6} - \\ \frac{R^4\lambda^4\left((v^2+2v)n^4 + \left(\frac{3}{2}v^2 + 2v - \frac{3}{2}\right)n^2 + \frac{1}{2}v^2\right)}{12} \\ -\frac{vn^4R^2\lambda^2\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)}{6} - \frac{n^8}{24} + \frac{n^4}{24}\end{gathered}\right) \\
& + \left(\begin{gathered}R^8\lambda^8 + 2n^2\lambda^6R^6(1+v) + 4\lambda^2\left(\begin{gathered}\left(v + \frac{1}{2}\right)n^4 + \\ \left(-\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\right)n^2 \\ -\frac{3}{8}v^2 + \frac{1}{8}\end{gathered}\right)R^4 \\ +2n^2\lambda^2(-1 + (v+1)n^4)R^2 + n^8 - n^4\end{gathered}\right)R^2h^2 \\
& +(-12v^2 + 12)R^8\lambda^4)hE)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{v}_{mn} = {} & (-12\left(\begin{gathered}\left(\frac{R^4\lambda^4 + R^2\lambda^2v + n^2(n^2+1)}{288}\right)h^4 + \\ \frac{R^2h^2\left(\lambda^2\left((v+2)n^2 + \frac{3}{2}v + 2\right)R^2 + n^4 + \frac{1}{2}n^2\right)}{12} + \\ R^4(\lambda^2(v+2)R^2 + n^2)\end{gathered}\right) \\
& R^2P_{mn}(v^2 - 1)n) \\
& /(- \frac{\lambda^2(R^4\lambda^4 + R^2\lambda^2v - n^4 - n^2)(R^2\lambda^2 + n^2v)h^6}{288} \\
& \qquad -\frac{R^8\lambda^8}{24} - \frac{R^6\lambda^6\left(n^2 + \frac{1}{2}v\right)}{6} \\
& +(-\frac{\lambda^4\left((v^2+2v)n^4 + \left(\frac{3}{2}v^2 + 2v - \frac{3}{2}\right)n^2 + \frac{1}{2}v^2\right)R^4}{12})h^4 \\
& \qquad -\frac{\lambda^2\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)vn^4R^2}{6} - \frac{n^8}{24} + \frac{n^4}{24} \\
& +R^2(R^8\lambda^8 + 2n^2R^6\lambda^6(v+1)4\lambda^4 \\
& \left(\left(v + \frac{1}{2}\right)n^4 + \frac{1}{2}(1 - v^2)n^2 - \frac{3}{8}v^2 + \frac{1}{8}\right)R^4)h^2 \\
& +2h^2\lambda^2n^2(-1 + (v+1)n^4)R^2 + n^8 - n^4 \\
& +(-12v^2 + 12)R^8\lambda^4)hE)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

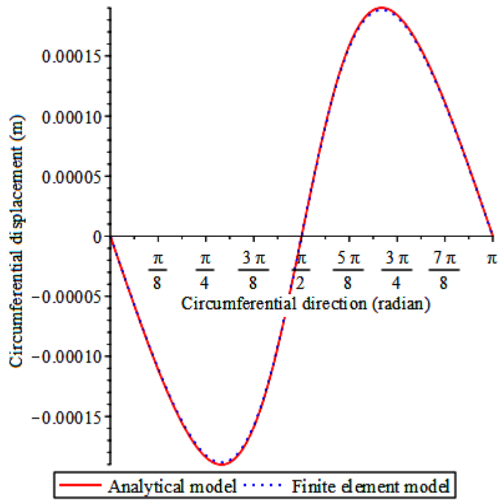
در شکل6 مقایسه‌ای از نتایج به دست آمده از حل تحلیلی با نتایج شبیه سازی المان محدود برای تغییر مکان‌ها در سه راستای شعاعی، محیطی و محوری پنل استوانه‌ای مطابق با مدل P_2 در جدول 3 آورده شده است. نتایج برای تغییر مکان‌های شعاعی و محوری در امتداد مسیر ($0 \le x \le L.\emptyset = \emptyset_0/2$) و برای تغییر مکان محیطی در امتداد مسیر ($x = L/2.0 \le \emptyset \le \emptyset_0$) رسم شده است. همان طور که مشخص است هر دو روش سازگاری خوبی با هم دارند و می‌توان نتایج مدل تحلیلی ارائه شده را تایید کرد. شرایط مرزی پنل مطابق با روابط (24-29) کاملا برآورده شده است. تغییر مکان شعاعی ماکزیمم مقدار خود را در طول میانی پنل دارد و این در حالی است که تغییر مکان محوری در این طول میانی برابر با صفر است و در طول ابتدایی و میانی پنل ماکزیمم مقدار خود را دارد. در مورد تغییر مکان محیطی نیز در زاویه میانی پنل مقدار صفر را دارد.



الف: تغییر مکان شعاعی



ب: تغییر مکان محوری

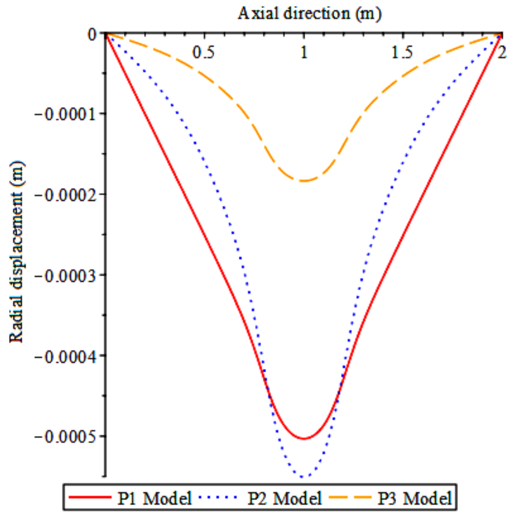


ج: تغییر مکان محیطی

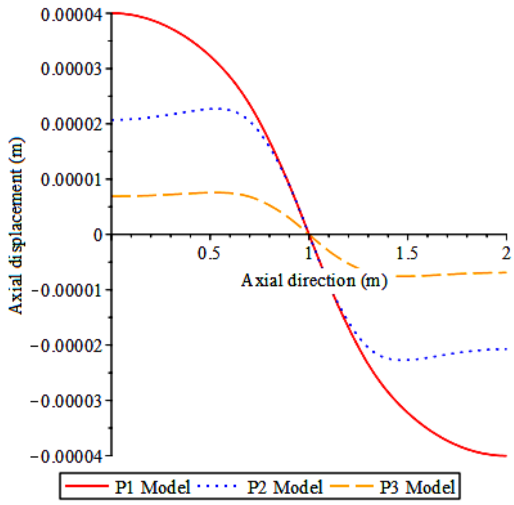
شکل ۶ مقایسه نتایج مدل تحلیلی با شبیه سازی المان محدود بر اساس تغییر مکان های شعاعی، محیطی و محوری

Fig. 6 Comparison of analytical model results with finite element simulation based on the radial, circumferential and axial displacements

در ادامه مطالعه پارامتریک بر اساس مدل‌های P_1 تا P_3 در جدول 3 انجام شده است. نتایج برای تغییر مکان‌های شعاعی و محوری در شکل 7 نشان داده شده است. همان طور که از جدول 3 مشخص است زمانی که مدل‌ها از P_1 تا P_3 تغییر می‌کنند ناحیه تحت بارگذاری فشاری و مقدار باگذاری ثابت است اما زوایه پنل تغییر می‌کند. بر اساس نتایج شکل 7، در تغییر مکان شعاعی با تغییر زاویه پنل، مدل P_2 ماکزیمم تغییر مکان در راستای شعاعی را در طول میانی خود دارد و بعد از آن مدل‌های P_1 و P_3 قرار دارند. در مدل P_2 زاویه پنل برابر با 180° است و شرایط هندسی پنل باعث می‌شود تا نسبت به پنل‌هایی با زاویه 90° و 270° تغییر مکان شعاعی بیشتری را تحمل نماید. اما در مورد تغییر مکان محوری این شرایط صادق نیست. مدل P_1 بیشترین تغییر مکان محوری و مدل P_3 کمترین را دارا است. دلیل آن هم این است که در طول میانی لوله مقدار تغییر مکان محوری صفر است و به نوعی نقطه عطف تغییرات در تغییر مکان محوری به شما می‌آید.



الف: تغییر مکان شعاعی



ب: تغییر مکان محوری

شکل ۷ مطالعه پارامتریک برای پنل های مدل P_1 تا P_3

Fig. 7 Parametric study for panel models P_1 to P_3

۶- نتیجه گیری

در این مقاله مدل تحلیلی برای تجزیه و تحلیل رفتار الاستیک پنل استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری فشاری در سطح خارجی ارائه شد. از روش ناویر برای بازنویسی معادلات تعادل حاکم به فرم تغییر مکان‌ها استفاده شد. پنل استوانه‌ای با استفاده از تئوری فلوگه حاکم بر پوسته‌های جدار نازک مدل‌سازی شد. توزیع یکنواخت فشاری در ناحیه مستطیلی به عنوان بارگذاری خارجی بر روی پنل استوانه‌ای در نظر گرفته شد. معادلات دیفرانسلی تعادل در فرم ناویر به کمک روش سری‌های فوریه دوگانه نامتناهی حل شدند. به منظور پیش بینی دقیق بارگذاری در حل فوریه، روابط پدیده گیبس به معادلات اضافه شدند. مدل تحلیلی ارائه شده به کمک نتایج شبیه‌سازی المان محدود راستی آزمایی گردید. با توجه به شرایط تقارنی در شرایط مرزی و بارگذاری پنل استوانه‌ای، برای کاهش موثر حجم و زمان شبیه سازی المان محدود در نرم افزار انسیس،

یک چهارم پنل مدل گردید. نتایج هر دو روش سازگاری بسیار خوبی را با هم داشتند. مدل ارائه شده توانایی کاربرد برای پنل‌های استوانه‌ای با ابعاد هندسی گوناگون (زاویه پنل، شعاع میان صفحه) و هم چنین شرایط بارگذاری مختلف را دارد. بر همین اساس می‌توان لوله‌ها ($\emptyset_0 = 360^{\circ}$) را تحت شرایط بارگذاری ناشی از تماس اجسام سخت مدل‌سازی تحلیلی نمود و میدان‌های تغییر مکان-تنش را در نواحی برخورد به دست آورد.

۷- مراجع

[1] Tribological Design Data, Part 3: Contact Mechanics, The Tribology Group Secretary, *The Institution of Mechanical Engineers*, 1 Birdcage Walk, London, SW1H 9JJ.

[2] A. Sohouli, A. Goudarzi and R. Akbari Alashti, Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Contact Mechanic Considering the Effect of Contact Geometry and Material Properties, Journal of Surface *Engineered Materials and Advanced Technology*, pp. 125-129, 2011.

[3] G. Pugliese, S. M. O. Tavares, E. Ciulli and L. A. Ferreir, Rough Contacts between Actual Engineering Surfaces Part II. Contact Mechanics, *Wear*, Vol. 264, pp. 1116-1128, 2008.

[4] A. Perez-Gonzalez, C. Fenollosa-Esteve, F. Sanchez-Marın and M. Vergara, A modified elastic foundation contact model for application in 3D models of the prosthetic knee, *Medical Engineering & Physics*, Vol. 30, pp. 387–398. 2008/

[5] S. B. Peyronnelb, A. Wanga and Q. J. Keera, An extension of the Hertz theory for three dimensional coated bodies. *Tribology Letters*, Vol. 18, pp. 303-314, (2005).

[6] R. Akbari Alashti, S. Jafari, Analytical Hertz Model of Indentation on Pipes by Rigid Spherical Indenters, *21st Annual International Conference on Mechanical Engineering-ISME2013*.

[7] S. Jafari, An investigation of stress-strain distribution of an elastic thin cylindrical panel under lateral pressure, *Journal of Scientific and Engineering Research*, Vol. 4, pp. 342-359, 2017.

[8] I. G, Goryacheva, Contact Mechanics in Tribology. *Springer*, 1988.

[9] K. L. Johnson, Contact Mechanics. *Cambridge University Press*, 1985.

[10] E. ventsel, T. krouthammer, Thin plates and shells: theory, analysis and applications, *CRC Press*, 2001.

[11] J. L. Sanders, An Improved First Approximation Theory for Thin Shells, *NASA TR-R24*, 1959.

[12] W. Flugge, Stresses in Shells, *2nd editon, Springer-Verlag*, Berlin, 1962.

[13] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, *McGraw-Hill*, New York, 1959.

[14] F. Niordson, Shell theory, *Elsevier Science Publication*, Amsterdam, 1985.

[15] T. KANT, M. P. MENON, Estimation of inter laminar stresses in fiber reinforced composite cylindrical shells, *computer and structure*, pp. 131-1471, 1991.

[16] Ansys engineering analysis system, ver. 12, *ANSYS, Inc*.

[17] A. Tooth and A. Motashar, Radial Loading of a Cylindrical Vessel through a Rectangular Rigid Attachment, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 37, pp. 345- 363, 1989.

[18] K. Weicker, R. Salahifar, and M. Mohareb, M, Shell analysis of thin-walled pipes. Part I: Field equations and solution, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 87, pp. 402-413, 2010.