



معکوس ماتریس‌های ساختار یافته مختلط

فاطمه رضائیان *

استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز، اهواز

چکیده

ماتریس‌هایی با ساختار خاص و کاربردهای فراوان آن در علوم مختلف، ریاضیدانان و صاحب نظران سایر علوم را مایل به ارائه الگوریتم‌هایی نموده تا معکوس آن‌ها را از روش‌های متعدد محاسبه نمایند. در این مقاله الگوریتمی را ارائه می‌دهیم تا معکوس بعضی از ماتریس‌های ساختار یافته نامتقارن را محاسبه نماییم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس‌های ساختار یافته، معکوس، ماتریس‌های نامتقارن
کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15B36, 15A23, 15A03

۱ مقدمه

در جبر خطی ماتریس‌های توپلیتز و هنکل ماتریس‌های ساختار یافته‌ای هستند که دارای نظم خاصی در درایه‌های روی قطر اصلی، بالا و پایین قطر اصلی می‌باشند. نویسندگان متفاوتی بر روی معکوس این ماتریس‌ها کار کرده‌اند و پایداری آن‌ها را بررسی کرده‌اند [۲-۸] به طوری که در [۱] معکوس ماتریس‌های توپلیتز متقارن بدست آمده است. ما این روش را برای ماتریس‌های نامتقارن تعمیم می‌دهیم و همچنین ثابت می‌کنیم می‌توانیم با این روش معکوس ماتریس‌های هنکل متقارن و نامتقارن را بدست بیاوریم و در ادامه خوش وضع بودن روش را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. ماتریس T یک ماتریس توپلیتز $n \times n$ است.

$$T = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{1-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{2-n} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{3-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

جایی که $a_{-(n-1)}, \dots, a_{n-1}$ اعداد مختلط هستند ما از فرم کوتاه شده زیر برای نمایش T استفاده می‌کنیم.

$$T = \begin{pmatrix} a \\ p - q \end{pmatrix}_{p,q=1}^n. \quad (2)$$

در [۱] برای ماتریس‌های توپلیتز متقارن داریم.

$$KT - TK = f e_n^T - e_1 f^T J. \quad (3)$$

*سخنران. آدرس ایمیل: Rezaeianf@ymail.com

جایی که

$$K = \begin{bmatrix} \circ & & & & 1 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \circ \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}, \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}, \quad e_n = \begin{bmatrix} \circ \\ \vdots \\ \circ \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \circ \\ a_{n-1} - a_{-1} \\ \vdots \\ a_2 - a_{-n+2} \\ a_1 - a_{-n+1} \end{bmatrix}.$$

بوضوح مشخص است که معادله (۱) برای ماتریس‌های توپلیتز نامتقارن صحیح نیست می‌توان با یک مثال نقض عدم صحت آن را برای ماتریس‌های اشاره شده را بررسی نمود.

۲ نتایج اصلی

در این بخش الگوریتم اصلاح شده‌ی مقاله‌ی [۱] را برای محاسبه‌ی T^{-1} در ماتریس‌های توپلیتز متقارن و نامتقارن را بیان می‌کنیم و سپس این روش را برای محاسبه‌ی معکوس ماتریس‌های هنکل متقارن و نامتقارن بسط می‌دهیم.

گزاره ۱.۲. فرض کنید T و K و J مانند قبل باشند و f نیز به صورت زیر تعریف شود.

$$f = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n]^T.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$KT = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{2-n} & a_{1-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{3-n} & a_{2-n} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{4-n} & a_{3-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_0 & a_{-1} \end{bmatrix}, \quad TK = \begin{bmatrix} a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots & a_{1-n} & a_0 \\ a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{2-n} & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{3-n} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_0 & a_{-1} \end{bmatrix}$$

$$KT - TK = \begin{bmatrix} a_{n-1} - a_{-1} & a_{n-2} - a_{-2} & a_{n-3} - a_{-3} & \dots & a_1 - a_{1-n} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & a_{1-n} - a_1 \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & a_{2-n} - a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & a_{-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

از طرفی:

$$f e_n^T - e_1 f^T J = \begin{bmatrix} -f_n & -f_{n-1} & -f_{n-2} & \dots & -f_2 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & f_2 \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & f_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & f_n \end{bmatrix}.$$

$$.f = \begin{bmatrix} f_1 \\ a_{1-n} - a_1 \\ \vdots \\ a_{-2} - a_{n-2} \\ a_{-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{بوضوح}$$

هم‌اکنون می‌توانیم الگوریتم اصلاح شده را بیان کنیم.

لم ۲.۲. فرض کنید T ماتریس توپلیتز $n \times n$ مانند (۱) باشد آنگاه معادله‌ی (۳) برای بدست آوردن معکوس ماتریس توپلیتز متقارن و نامتقارن استفاده می‌شود هرگاه:

$$f = \begin{bmatrix} \circ \\ a_{1-n} - a_1 \\ \vdots \\ a_{-2} - a_{n-2} \\ a_{-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

قضیه ۳.۲. فرض کنید T یک ماتریس توپلیتز است که مشابه (۲) تعریف می‌شود، اگر هر یک از معادلات $Tx = f$ و $Ty = e_1$ معکوس پذیر باشند به طوری که $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ آنگاه:

الف- T معکوس پذیر است.

$$\text{ب- } T^{-1} = T_1 U_1 + T_2 U_2.$$

جایی که

$$T_1 = \begin{bmatrix} y_1 & y_n & \cdots & y_2 \\ y_2 & y_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & y_n \\ y_n & \cdots & y_2 & y_1 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & -x_n & \cdots & -x_2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -x_n \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_n & \cdots & x_2 \\ x_2 & x_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_n \\ x_n & \cdots & x_2 & x_1 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \circ & y_n & \cdots & y_2 \\ & \circ & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_n \\ & & & \circ \end{bmatrix}.$$

لم ۴.۲. فرض کنید H یک ماتریس هنکل $n \times n$ باشد.

$$H = \begin{bmatrix} a_{1-n} & a_{2-n} & \cdots & a_{-1} & a_{\circ} \\ a_{2-n} & a_{3-n} & \cdots & a_{\circ} & a_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{-1} & a_{\circ} & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{\circ} & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

بنابراین بوضوح مشابه لم ۲.۲ ثابت می‌شود:

$$KH - HK^T = f e_n^T - e_1 f^T. \quad (4)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} KT - TK &= f e_n^T - e_1 f^T J \Rightarrow KTJ - TKJ = f e_n^T J - e_1 f^T J J \\ &\Rightarrow KTJ - TJK^T = f e_1^T - e_1 f^T \Rightarrow KT - HK^T = f e_n^T - e_1 f^T. \end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۲. فرض کنید H یک ماتریس هنکل باشد $x, y \in C^n$ و $Hx = f$ و $Hy = e_1$ به طوری که

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

آنگاه

الف- H معکوس پذیر است.

$$\text{ب- } H^T = H_1 U_1 + H_2 U_2 \text{ جایی که:}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} y_1 & & y_{n-1} & y_n \\ & \ddots & \ddots & y_1 \\ y_{n-1} & y_n & \ddots & \\ y_n & y_1 & & y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & \cdots & -x_{n-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -x_1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} x_1 & & x_{n-1} & x_n \\ & \ddots & \ddots & x_1 \\ x_{n-1} & x_n & \ddots & \\ x_n & x_1 & & x_{n-1} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \circ & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ & \circ & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_1 \\ & & & \circ \end{bmatrix}.$$

اثبات. الف-

$$Hx = f \Leftrightarrow HJJx = f \Leftrightarrow TJx = f.$$

ب- طبق قضیه ۳.۲ ما داریم:

$$T_{\setminus} = \begin{bmatrix} s_{\setminus} & s_n & \cdots & s_{\setminus} \\ s_{\setminus} & s_{\setminus} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & s_n \\ s_n & \cdots & s_{\setminus} & s_{\setminus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n & y_{\setminus} & \cdots & y_{n-\setminus} \\ y_{n-\setminus} & y_n & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & y_{\setminus} \\ y_{\setminus} & \cdots & y_{n-\setminus} & y_n \end{bmatrix}, \quad U_{\setminus} = \begin{bmatrix} \setminus & -r_n & \cdots & -r_{\setminus} \\ \setminus & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -r_n \\ \setminus & \vdots & \ddots & \setminus \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \setminus & -x_{\setminus} & \cdots & -x_{n-\setminus} \\ \setminus & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x_{\setminus} \\ \setminus & \vdots & \ddots & \setminus \end{bmatrix},$$

$$T_{\setminus} = \begin{bmatrix} r_{\setminus} & r_n & \cdots & r_{\setminus} \\ r_{\setminus} & r_{\setminus} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_n \\ r_n & \cdots & r_{\setminus} & r_{\setminus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n & x_{\setminus} & \cdots & x_{n-\setminus} \\ x_{n-\setminus} & x_n & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{\setminus} \\ x_{\setminus} & \cdots & x_{n-\setminus} & x_n \end{bmatrix}, \quad U_{\setminus} = \begin{bmatrix} \circ & s_n & \cdots & s_{\setminus} \\ \circ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & s_n \\ \circ & \vdots & \ddots & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & y_{\setminus} & \cdots & y_{n-\setminus} \\ \circ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y_{\setminus} \\ \circ & \vdots & \ddots & \circ \end{bmatrix}.$$

$$T^{-\setminus} = T_{\setminus}U_{\setminus} + T_{\setminus}U_{\setminus} \xrightarrow{(TJ=H \Rightarrow H^{-\setminus}=JT^{-\setminus})} JT^{-\setminus} = JT_{\setminus}U_{\setminus} + JT_{\setminus}U_{\setminus} \\ \Rightarrow H^{-\setminus} = JT_{\setminus}U_{\setminus} + JT_{\setminus}U_{\setminus} = H_{\setminus}U_{\setminus} + H_{\setminus}U_{\setminus}.$$

$$JT_{\setminus} = H_{\setminus} = \begin{bmatrix} y_{\setminus} & y_{n-\setminus} & y_n \\ & \ddots & \ddots & y_{\setminus} \\ y_{n-\setminus} & y_n & \ddots & \\ y_n & y_{\setminus} & y_{n-\setminus} \end{bmatrix}.$$

□

۳ تحلیل پایداری ماتریس‌های هنکل

در این بخش ما پایداری معکوس ماتریس‌های هنکل نامتقارن در بخش ۲ را بررسی می‌کنیم. ما می‌دانیم الگوریتمی پایدار نامیده می‌شود که برای همه‌ی راه حل‌های x به جواب $\tilde{x}$ نزدیک باشد و رابطه‌ی $\frac{\|x-\tilde{x}\|_2}{\|x\|}$ کوچک است.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\tilde{e}$ و $\tilde{y}$ ، $\tilde{x}$ به ترتیب خطای ماشین و خطای محاسباتی قضیه ۵.۲ باشند آنگاه:

$$\|\tilde{x}\|_2 \leq \|x\|_2(1 + \tilde{e}), \quad \|\tilde{y}\|_2 \leq \|y\|_2(1 + \tilde{e}), \quad \|H_{\setminus}\|_F = \sqrt{n}\|y\|_2, \quad \|H_{\setminus}\|_F = \sqrt{n}\|x\|_2 \\ \|U_{\setminus}\|_F \leq \sqrt{n}\sqrt{1 + \|x\|_2^2}, \quad \|U_{\setminus}\|_F \leq \sqrt{n}\|y\|_2.$$

خواهیم داشت:

$$\tilde{H}^{-\setminus} = fl(\tilde{H}\tilde{U}_{\setminus} + \tilde{H}_{\setminus}\tilde{U}_{\setminus}) \\ = fl((H_{\setminus} + \Delta H_{\setminus})(U_{\setminus} + \Delta U_{\setminus}) + (H_{\setminus} + \Delta H_{\setminus})(U_{\setminus} + \Delta U_{\setminus})) \\ = H^{-\setminus} + \Delta H_{\setminus}U_{\setminus} + H_{\setminus}\Delta U_{\setminus} + \Delta H_{\setminus}U_{\setminus} + H_{\setminus}\Delta U_{\setminus} + E + F.$$

از راه حل‌های $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ در فرمول‌های معکوس قضیه‌ی گفته شده استفاده می‌کنیم E خطای ماتریس و F خطای تفریق است.

$$\|\Delta H_{\setminus}\|_F = \tilde{e}\|H_{\setminus}\|_F \leq \tilde{e}\|H_{\setminus}\|_F = \tilde{e}\sqrt{n}\|y\|_2, \quad \|\Delta H_{\setminus}\|_F = \tilde{e}\|H_{\setminus}\|_F \leq \tilde{e}\|H_{\setminus}\|_F = \tilde{e}\sqrt{n}\|x\|_2, \\ \|\Delta U_{\setminus}\|_F = \tilde{e}\|U_{\setminus}\|_F \leq \tilde{e}\sqrt{1 + \|x\|_2^2}, \quad \|\Delta U_{\setminus}\|_F = \tilde{e}\|U_{\setminus}\|_F \leq \tilde{e}\sqrt{n}\|y\|_2.$$

به طوری که:

$$\begin{aligned}\|E\|_2 &\leq \|E\|_F \\ &\leq \varepsilon n \left(\|H_{\setminus}\|_F \|U_{\setminus}\|_F + \|H_{\setminus}\|_F \|U_{\setminus}\|_F \right) \\ &\leq \varepsilon n^2 \|y\|_2 \left(\sqrt{1 + \|x\|_2^2} + \|x\|_2 \right) \\ &\leq \varepsilon n \|y\|_2 (1 + 2\|x\|_2), \quad \|F\|_2 \leq \varepsilon \sqrt{n} \|H^{-1}\|_2.\end{aligned}$$

آنگاه:

$$\|\tilde{H}^{-1} - H^{-1}\|_2 \leq n(2\tilde{\varepsilon} + n\varepsilon) \|y\|_2 (1 + 2\|x\|_2) + \varepsilon \sqrt{n} \|H^{-1}\|_2.$$

با در نظر گرفتن $Hy = e_{\setminus}$ و $Hx = f$ داریم:

$$\|y\|_2 \leq \|H^{-1}\|_2, \quad \|x\|_2 \leq \|H^{-1}\|_2 \|f\|_2.$$

بنابراین:

$$\frac{\|\tilde{H}^{-1} - H^{-1}\|_2}{\|H^{-1}\|_2} \leq n(2\tilde{\varepsilon} + n\varepsilon) (1 + 2\|H^{-1}\|_2) \|f\|_2 + \varepsilon \sqrt{n}.$$

ما نتیجه می‌گیریم که H خوش وضع است و جایی که $\|H^{-1}\|_2$ متناهی آنگاه $\|f\|_2$ متناهی. بنابراین معکوس ماتریس‌های متقارن، نامتقارن توپلیتز و هنکل پایدار پیشرو است.

مراجع

- [1] L.V. Xiao-Guang and T.Z. Huang, A note on inversion of Toeplitz matrices, *Applied Mathematics Letters*, 20 (2007), 1189–1193.
- [2] K. Ye and L.H. Lim, Every Matrix is a Product of Toeplitz Matrices, *Found Comput Math.*, (2016), 16, 577–598.
- [3] W.F. Trench, An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrix, *J. SIAM.*, 13 (3) (1964), 515–522.
- [4] I. Gohberg and A. Semencul, On the inversion of finite Toeplitz matrices and their continuous analogues, *Mat. Issled.*, 7 (1972), 201–223 (in Russian).
- [5] I. Gohberg and N. Krupnik, A formula for the inversion of finite Toeplitz matrices, *Mat. Issled.*, 7 (12) (1972), 272–283 (in Russian).
- [6] G. Heinig and K. Rost, Algebraic methods for Toeplitz-like matrices and operators, in: *Operator Theory: Advances and Applications*, 13, *Birkhuser, Basel.*, (1984).
- [7] M.K. Ng, K. Rost and Y.-W. Wen, On inversion of Toeplitz matrices, *Linear Algebra Appl.*, 348 (2002), 145–151.
- [8] A. Ben-Artzi and T. Shalom, On inversion of Toeplitz and close to Toepaz matrices, *Linear Algebra Appl.*, 75 (1986), 173–192.