ایده سازی و ارائه یک روش تکراری برای محاسبه جواب یک دستگاه خطی مقید مبتنی بر روش تکرار نقطه ثابت

مجید ادیب[۱] * زهرا عبادی[۲,†]

دانشگاه زنجان

چکیده

یکی از مهم‌ترین و اساسی‌ترین مباحث ریاضیات، به دلیل کاربرد وسیع آن در اکثر شاخه‌های ریاضی و حتی علوم دیگر، دستگاه معادلات خطی هستند. به همین دلیل از دیرباز تاکنون محققان و پژوهشگران مطالعات خود را نه تنها در این زمینه متوقف نکرده‌اند بلکه همچنان این‌گونه پژوهش‌ها با هدف ارائه الگوریتم‌های کاراتر و کاربردی‌تر ادامه دارد. در این مقاله بر مبنای روش تکرار نقطه ثابت یک روش تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی معرفی و آن را به دستگاه معادلات خطی مقید نیز تعمیم می‌دهیم و شرایط لازم و کافی همگرایی آن را نیز بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات خطی، روش تکرار نقطه ثابت

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A09، 65F05، 65F015

۱ مقدمه

همان‌طور که میدانیم در روش تکرار نقطه ثابت برای حل یک معادله غیرخطی $f(x)=0$ ابتدا معادله با انتخاب یک تابع $g(x)$ مناسب، به فرم $x=g(x)$ تبدیل می‌شود و سپس در صورت مناسب بودن g دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ به نقطه ثابت g و یا به‌طور معادل به ریشه f همگرا خواهد شد [۳].

در این مقاله بر مبنای روش تکرار نقطه ثابت و با انتخاب $f(x)=Ax-b$ روشی تکراری و کارآمد که به جواب دستگاه مقید $Ax=b$، $x\in S$ که در آن S زیر فضایی از $\mathbb{C}^n$ همگرا گردد، معرفی می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که اگر A وارون‌پذیر باشد و $B=A^{-1}$، آنگاه $BA=I$ و یا به طور معادل $I=2I-BA$ و در نتیجه

$$B=B(2I-AB). \tag{۱}$$

روش تکرار نقطه ثابت و رابطه (۱) می‌تواند ایده‌ای برای تعریف یک دنباله تکراری با هدف محاسبه تقریبی از وارون ماتریس A به صورت زیر در اختیار ما قرار می‌دهد:

$$B_{k+1}=B_k(2I-AB_k), \tag{۲}$$

که در صورت یک انتخاب مناسب برای تقریب آغازین B_0 می‌تواند به دنباله‌ای همگرا تبدیل شود. بعلاوه می‌توان از این ایده برای محاسبه تقریب‌هایی از وارون‌های خاص ماتریس‌هایی که لزوما وارون طبیعی آن‌ها وجود ندارد نیز استفاده کرد.

همچنین توجه کنید که اگر A وارون پذیر باشد جواب دستگاه $Ax=b$ عبارت است از $x=Bb$ و لذا

$$x=x+B(b-Ax). \tag{۳}$$

با به‌کارگیری روش تکرار نقطه ثابت روی رابطه (۳) می‌توان دنباله تکراری زیر را برای محاسبه جواب دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ و یا تقریبی از آن، حتی در حالتی‌که A وارون پذیر نباشد، تعریف کرد:

$$x_{k+1}=x_k+B_{k+1}(b-Ax_k). \tag{۴}$$

* آدرس ایمیل: madib@znu.ac.ir

† سخنران. آدرس ایمیل: ebadizahra1112@gmail.com

۲ یک روش تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی مقید

دستگاه معادلات مقید زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad b \in \mathbb{C}^m, \quad x \in S \tag{۵}$$

با توجه به ایده و مقدمات مذکور در بخش قبل یک روش تکراری برای حل دستگاه معادلات مقید (۵) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_{k+1} = B_k(2I - AB_k), \tag{۶}$$

$$x_{k+1} = x_k + B_{k+1}(b - Ax_k). \tag{۷}$$

توجه داشته باشید که اگر A، $m \times n$ باشد، A دارای شبه وارون‌های مختلفی از جمله وارون مور پنروز و یا وارون درازین می‌باشد. همچنین توجه دارید که شبه وارون $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ که دارای خواص خاصی است و ما در این مقاله ماتریسی است مانند $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ قصد ورود به آن‌ها را نداریم، در این خصوص خواننده علاقه‌مند می‌تواند به مرجع [۲] رجوع کند. تنها این نکته را متذکر می‌شویم که در استفاده از رابطه (۶) در الگوریتم (۷)-(۶)، تقریب اولیه B_0 می‌بایست تقریبی از شبه وارون مورد نظر کاربر در مسئله استفاده گردد. قضیه زیر شرایط لازم و کافی برای همگرایی الگوریتم مذکور را فراهم می‌کند:

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $B_0 = \beta Y$ یک تقریب اولیه برای وارون ماتریس A باشد که در آن β یک عدد حقیقی غیر صفر و $Y \in \mathbb{C}^{n\times m}$ در رابطه‌ی $R(Y) \subseteq S$ صدق کنند(فضای بردY= $R(Y)$).*
الف)- اگر $b \in AS$ آنگاه دنباله تکراری حاصل از رابطه (۷) با تقریب اولیه $x_0 \in S$، به یک جواب دستگاه معادلات خطی (۵) همگراست اگر و تنها اگر $\rho(P_{AT} - \beta AY) < 1$ و بعلاوه داریم

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 + \beta Y(P_{(AS)^\perp} + \beta AY)^{-1}(b - Ax_0) \tag{۸}$$

که در آن P_{AS}، نشان دهنده ماتریس تصویر متعامد روی AS و $\rho(.)$ نمایانگر شعاع طیفی است

ب) اگر دستگاه دارای جواب منحصر بفرد باشد در این صورت الگوریتم فوق به جواب زیر همگراست:

$$x = \beta Y(P_{N(Y)} + \beta AY)^{-1}b,$$

که در آن $N(Y)$ نمایانگر فضای پوچ Y است. □

۳ کاربرد روش ارائه شده در خصوص حل مسئله کمترین مربعات

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. توجه کنید که اگر دستگاه معادلات $Ax = b$ ناسازگار باشد، در این صورت مسئله یافتن جواب کمترین مربعات دستگاه $Ax = b$ مطرح می‌شود. مسئله کمترین مربعات روشی است که بردار x، بردار باقیمانده را به حداقل می‌رساند. به عبارت دیگر مسئله کمترین مربعات یافتن جواب مسئله زیر است:

$$min\|Ax - b\|_2 \tag{۹}$$

که در آن $\|.\|$ نشان‌دهنده نرم اقلیدسی یک بردار است. همان‌طور که می‌دانیم حل مسئله (۹) معادل است با حل دستگاه خطی و سازگار:

$$A^*Ax = A^*b. \tag{۱۰}$$

بنابراین برای محاسبه جواب کمترین مربعات دستگاه

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad m \geq n, \quad b \in \mathbb{C}^n$$

می‌توان روش ارائه شده توسط روابط (۷)-(۶) را روی دستگاه سازگار و نامقید $A^*Ax = A^*b$ اعمال کرد.

۴ کاربرد روش ارئه شده در خصوص یافتن جواب با کمترین طول اقلیدسی یک دستگاه معادلات خطی

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $m \leq n$ و دستگاه $Ax = b$ سازگار باشد. در این صورت مسئله یافتن جواب با کمترین طول اقلیدسی دستگاه با حل مسئله زیر معادل است:

$$\begin{cases} min & \|x\|_{۲} \\ s.t & Ax = b \end{cases}$$

همان‌طور که می‌دانیم اگر جواب این مسئله را x_+ بنامیم این جواب در $R(A^*)$ قرار دارد [۱]. لذا برای محاسبه جواب با کمترین طول اقلیدسی یک دستگاه خطی با تعریف $S = R(A^*)$ می‌توان روش (۷)-(۶) را روی مسئله مقید زیر اعمال نمود.

$$Ax = b, \quad x \in S$$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا یک روش تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی ارائه شد و سپس به محاسبه جواب یک دستگاه معادله خطی روی یک زیر فضای دلخواه S تعمیم داده شد. بعلاوه در حالت خاص وقتی‌که $S = R(A^*)$ این الگوریتم در عمل مسئله جواب با کمترین طول اقلیدسی را حل می‌کند. لازم به ذکر است که می‌توان پارامتر β مذکور در قضیه ۱.۲ را چنان تعیین کرد که الگوریتم دارای سرعت همگرایی مطلوب باشد.

مراجع

[1] P.E. Gill, W. Murray, *Numerical linear algebra and optimization*, Avalon Publishing, 1991.

[2] K. Manjunatha Prasad, R. B. Bapat, The generalized moore-penrose inverse, *Elsevier Science Publishing Co.*, 655 (1992), 59-69.

[3] E. Popova, Generalization of a parametric fixed-point iteration , *Apple Math Mech.*, 4 (2004), 680-681.