



بهمن ۱۴۰۰

یازدهمین سمینار بین‌المللی

جسرخلی و کاربرد آن



برخی از ویژگی‌های مجموعه‌ی $M_n(B)$

لیلا فضل‌پور^{۱*} و علی آرمنندژاد^۲

^۱گروه ریاضی، دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

^۲گروه ریاضی، دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

چکیده

فرض کنید B نیم‌حلقه‌ی بولی دوتایی باشد. به عبارت دیگر $B = \{0, 1\}$ به‌طوری‌که $1 + 1 = 1$ و سایر عملیات جمع و ضرب در آن مشابه اعداد حقیقی است. فرض کنیم $M_n(B)$ مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ را نشان دهد به‌طوری‌که درایه‌های آن متعلق به B باشد. در این مقاله، ماتریس‌های معکوس‌پذیر متعلق به $M_n(B)$ را شناسایی و معرفی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: نیم‌حلقه‌ی بولی، ماتریس‌های معکوس‌پذیر.

کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A09, 16Y60.

۱ مقدمه

این مقاله به ماتریس‌های متعلق به مجموعه‌ی $M_n(B)$ می‌پردازد. این قبیل ماتریس‌ها دارای کاربرد مهمی در نظریه‌ی مدار الکتریکی هستند. اکنون تعدادی از تعاریف اولیه و مورد نیاز در مقاله را معرفی می‌کنیم.

یک نیم‌حلقه‌ی سه‌تایی $(S, +, \cdot)$ است به‌طوری‌که $(S, +)$ و $(S, \cdot)$ نیم‌گروه باشند و برای هر $x, y, z \in S$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (1)$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad (2)$$

یک نیم‌حلقه‌ی $(S, +, \cdot)$ به ترتیب تعویض‌پذیر جمعی و یا ضربی نامیده می‌شود، اگر

$$x + y = y + x \quad \text{or}$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$1 \in S$ همانی سه‌تایی $(S, +, \cdot)$ نامیده می‌شود اگر

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in S$$

عضو صفر و عضو یک نیم‌حلقه منحصراً به فرد هستند.

عنصر $x \in S$ به ترتیب وارون‌پذیر جمعی و یا ضربی نامیده می‌شود اگر $y \in S$ وجود داشته باشد که

$$x + y = y + x = 0 \quad \text{or}$$

$$xy = yx = 1.$$

در این مقاله نیم‌حلقه‌ی بولی $B = \{0, 1\}$ را تعریف کرده و ماتریس‌های معکوس‌پذیر $M_n(B)$ را معرفی خواهیم کرد.

*سخنران. آدرس ایمیل: fazlparleila65@gmail.com

۲ قضایا و مثال‌ها

تعریف ۱.۰.۲. نیم‌حلقه‌ی بولی یک نیم‌حلقه‌ی جابه‌جایی دارای صفر است به‌طوری‌که

$$x^2 = x, \quad \forall x \in S.$$

مثال ۲.۰.۲. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تعریف می‌کنیم

$$A \oplus B = A \cup B, \quad A \cdot B = A \cap B, \quad \forall A, B \in P(X)$$

پس $(P(X), \oplus, \cdot)$ یک نیم‌حلقه‌ی بولی است و $\emptyset$ به عنوان صفر و X به عنوان عضو همانی آن می‌باشد و $\emptyset$ تنها عضو وارون‌پذیر جمعی $(P(X), \oplus, \cdot)$ و $A \oplus A = A$.

مثال ۳.۰.۲. فرض کنید

$$S = \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right],$$

و تعریف می‌کنیم

$$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x, \quad \forall x \in S$$

$$x \oplus y = \frac{1}{2}, \quad \forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$x \circ y = \min\{x, y\}, \quad \forall x, y \in S$$

$(S, \oplus, \cdot)$ یک نیم‌حلقه‌ی بولی با عضو خنثی 0 و عضو همانی 1 می‌باشد و 0 تنها عضو وارون‌پذیری جمعی برای $(S, \oplus, \cdot)$ می‌باشد.

یکی از ساختارهای جبری روی $\{0, 1\}$ به صورت زیر است:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

که در مرجع [۶]، نیم‌حلقه‌ی بولی نامیده می‌شود و با نماد B نمایش داده می‌شود. نیم‌حلقه‌ی B معادل با جبر بولی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی تک عضوی $\{a\}$ است و $\emptyset = 0$ و $\{a\} = 1$ و $+$ اجتماع و $\times$ اشتراک است.

توجه: فرض کنیم $M_n(B)$ مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ را نشان می‌دهد به‌طوری‌که درایه‌های آن‌ها از مجموعه‌ی B باشد.

قضیه ۴.۰.۲. (لوس). یک ماتریس بولی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر متعامد باشد.

قضیه ۵.۰.۲. (رادرفورد). اگر یک ماتریس بولی وارون یک طرفه داشته باشد در این صورت وارون دو طرفه خواهد داشت. به علاوه این وارون در صورت وجود منحصر به فرد است و برابر B^T می‌باشد.

قضیه ۶.۰.۲. $B \in M_n(B)$ یک ماتریس معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر B یک ماتریس جایگشت باشد.

اثبات. فرض کنیم B یک ماتریس جایگشت باشد. چون هر ماتریس جایگشت یک ماتریس متعامد است پس وارون‌پذیر است و $B^T = B^{-1}$.

اکنون فرض کنیم که B یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم B یک ماتریس جایگشت است. چون B معکوس‌پذیر است پس در هر سطر یک درایه‌ی غیر صفر دارد. فرض کنیم که درایه‌ی $(1, 1)$ ماتریس B ناصفر باشد، این فرض با استفاده از ماتریس جایگشت P ، قابل توجیه است. فرض کنیم

$$A = [a_{ij}] = PB,$$

و نشان می‌دهیم که A یک ماتریس جایگشت است. در این صورت داریم

$$A = PB \implies B = P^{-1}A,$$

پس B یک ماتریس جایگشت است. پس بدون از دست رفتن کلیت فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]$ ماتریس معکوس‌پذیر است و $a_{11} \neq 0$. نشان می‌دهیم که

$$\begin{cases} a_{12} = \dots = a_{1n} = 0 \\ a_{21} = \dots = a_{n1} = 0 \end{cases}$$

چون طبق قضیه ۲، $A^{-1} = A^T$ پس داریم $AA^T = I$.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$(AA^T)_{12} = 0 \implies a_{21} + \dots = 0 \implies a_{21} = 0,$$

$$(AA^T)_{13} = 0 \implies a_{31} + \dots = 0 \implies a_{31} = 0,$$

$\vdots$

$$(AA^T)_{1n} = 0 \implies a_{n1} + \dots = 0 \implies a_{n1} = 0.$$

به‌طور مشابه چون $A^T A = I$ داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$(A^T A)_{12} = 0 \implies a_{12} + \dots = 0 \implies a_{12} = 0,$$

$\vdots$

$$(A^T A)_{1n} = 0 \implies a_{1n} + \dots = 0 \implies a_{1n} = 0.$$

اکنون با استفاده از استقرا حکم را اثبات می‌کنیم.

فرض قضیه برای $M_2(B)$ برقرار است. فرض کنیم قضیه برای ماتریس‌های $(n-1) \times (n-1)$ برقرار باشد. اکنون حکم را برای ماتریس‌های $n \times n$ ثابت می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad A = 1 \oplus C,$$

□

ماتریس C یک ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ است و درایه‌های آن متعلق به B است پس طبق فرض استقرا ماتریس جایگشت است و $A = 1 \oplus C$ و چون جمع مستقیم ماتریس‌های جایگشت ماتریس جایگشت است پس A یک ماتریس جایگشت است.

۳ نتیجه‌گیری

ماتریس‌های بولی کاربرد مهمی در نظریه‌ی مدارهای الکتریکی دارند یک زیر مجموعه خاص از این ماتریس‌ها مجموعه‌ی $M_2(B)$ است و ماتریس‌های متعلق به این مجموعه در صورت وارون‌پذیری ماتریس‌های جایگشت هستند.

مراجع

- [1] F. Fazlpar and A. Armandnejad, *Some notes on $M_n(B)$* , (preprint).
- [2] F. Guzman, The variety of Boolean semirings, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 78 (1992), 253–270.
- [3] R. D. Luce, A note on Boolean matrix theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1952), 382–388.
- [4] W. Kuich and A. Salomaa, *Semirings, Automata, languages*, Springer, Berlin, 1986.
- [5] D. E. Rutherford, Inverses of Boolean matrices, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 6 (1963), 49–53.
- [6] N. Sirasuntorn, S. Sombatboriboon, N. Udomsub, Inversion of Matrices over boolean semirings, *Thai Journal of Mathematics* 7(2009), 105–113.