

بهمن ۱۴۰۰

یازدهمین سمینار بین‌المللی

جسرخلی و کاربرد آن



پرتفوی مماس و بهینه در مدل مارکوویتز

سید علی محمد محسنی الحسینی

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

amah@vru.ac.ir; mohsenialhosseini@gmail.com

چکیده

مدل مارکوویتز^۱ از جمله مدل‌های ریاضی است که توانسته بهینه سازی پرتفوی را تحت تاثیر دهد. در اینجا نقش این مدل را در حالات حداقل واریانس پرتفوی، پرتفوی مماس، پرتفوی بهینه مورد بررسی قرار خواهیم داد. ضمناً با بکارگیری مدل مارکوویتز فرمول میانگین برای مرزهای کارآمد و نرخ بازدهی پرتفوی مورد انتظار را بدست می آوریم.

کلمات کلیدی: ضرائب لاگرانژ، مدل مارکوویتز، پرتفوی مماس، پرتفوی بهینه.
کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰] ۶۱C، ۱۱G

۱ مقدمه

در تئوری بهینه سازی سبد سهام، اندازه گیری ریسک انحراف استاندارد بسیار مشهور است. هری مارکوویتز در سال ۱۹۵۲ مدل اساسی پرتفوی که مشهور به تئوری مدرن پرتفوی است را ارائه کردو [۵]. جایی که او یک روش بهینه سازی برای سرمایه گذاران ریسک گریز را توضیح داد. وی به دلیل اهمیت این موضوع در سال ۱۹۹۰ جایزه نوبل را از آن خود کرد. لذا از آن زمان به بعد تجزیه و تحلیل واریانس میانگین وی در بسیاری از مقالات استفاده می شود. ایده اصلی مارکوویتز یافتن بهترین بازده مورد انتظار و ریسک برای هر سرمایه گذار است. در سال ۱۹۵۹ شارپ و لیتنر^۲ زمینه را برای مدل قیمت گذاری داراییهای سرمایه‌ای (CAPM)^۳ با استفاده از مدل هری مارکوویتز فراهم نمودند. التون، گروبر^۴ در سال ۱۹۸۱ نظریه مارکوویتز را مورد بررسی قرار داد [۴]. در سال ۲۰۰۱ براندت^۵ متغیرهای انتخابی در پرتفوی را مورد بررسی قرار داد [۳]. رضا راعی و سعید فلاح پوردر سال ۱۳۹۰ مدلی را برای مدیریت فعال پرتفوی با استفاده از ارزش در معرض ریسک والگوریتم ژنتیک طراحی نمودند [۱]. مریم کشتکاری در سال ۱۳۸۷ روش های انتخاب اوراق بهادر وتشکیل پرتفوی بهینه را مورد بررسی قرارداد [۲].

۲ مدل مارکوویتز

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}; \quad \bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}; \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

T : ترانهاد، θ_i : مبلغ سرمایه گذاری شده در دارایی i ، $\bar{1}^T \theta = C_0$: سرمایه اولیه، C_{end} : سرمایه نهایی r : نرخ بهره بانکی، μ : میانگین داراییها، $\mu_p = \mu^T \theta$: نرخ بازدهی پرتفوی مورد انتظار، Σ : ماتریس کواریانس از r است، σ_{ij} : کواریانس بازدهی

¹ Harry Markowitz

² Sharpe Linter

³ Capital Asset Pricing Model

⁴ Elton, Gruber

⁵ Brandt

پرتفوی دارایی بین i و j .
در این مدل برای محاسبه مرز کارآمد، باید خطر (انحراف استاندارد) را با توجه به بازده مورد انتظار به حداقل برسانیم. در این مدل تابع هدف زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^T \sum \theta \\ \text{s.t.} \quad & A^T \theta = B \end{aligned}$$

$$\text{که در آن } A = (\mu, \bar{\gamma}), B = \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix}$$

$$V(R_p) = \theta^T \sum \theta = \theta^T \sum \sum^{-1} A \lambda = (A^T \theta)^T H^{-1} B = B^T H^{-1} B$$

با توجه به اینکه H یک ماتریس متقارن است، فرض می‌کنیم به صورت زیر باشد:

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a &= \mu^T \sum \mu \\ b &= \mu^T \sum^{-1} \bar{\gamma} = \bar{\gamma}^T \sum^{-1} \mu \\ c &= \bar{\gamma}^{-1} \sum^{-1} \bar{\gamma} \\ d &= ac - b^2 \end{aligned} \quad \text{چون } H = A^T \sum^{-1} A \text{ واضح است که:}$$

با توجه به رابطه (۱) فرمول واریانس به صورت زیر در می‌آید:

$$V(R_p) = \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2)$$

این فرمول به ما میانگینی برای مرزهای کارآمد در یک چارچوب ریسک خنثی را می‌دهد. به عبارتی فرمول مرز کارآمد به صورت زیر است:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2) \quad (2)$$

با جذرگرفتن از رابطه (۲) انحراف استاندارد بدست می‌آید. بعد از انجام محاسبات لازم بر روی رابطه (۲) می‌توان به فرمول نرخ بازدهی پرتفوی مورد انتظار دست یافت.

$$\mu_p = \frac{b}{c} C_0 \pm \sqrt{\frac{d}{c}} \sigma_p$$

تخصیص پرتفویی θ_{EF} که از رابطه زیر بدست می‌آید متعلق به مرزهای کارآمدی است که سرمایه گذار باید در دارایی های منفرد سرمایه گذاری کند تا بازده و ریسک در مرز کارآمدرا بدست آورد.

$$\theta_{EF} = \sum^{-1} A \lambda = \frac{1}{d} ((a\bar{\gamma} - b\mu) C_0 - (c\mu - b\bar{\gamma}) \mu_p) \quad (3)$$

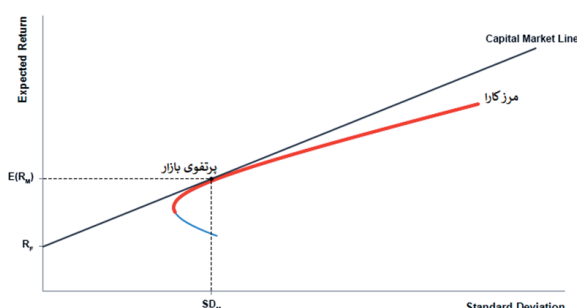
بنابراین برای هر مقدار دلخواه بازده پرتفوی می‌توان حداقل انحراف استاندارد و تخصیص مربوطه را به ترتیب با استفاده از (۲) و (۳) محاسبه کرد.

۳ پرتفوی مماس

فرض کنید یک سرمایه گذار ترجیحات دیگری غیر از کمترین میزان خطر پذیری و در نتیجه سرمایه گذاری در پرتفوی با حداقل واریانس داشته باشد.

نمونه ای از اولویت های دیگر سرمایه گذاری در پرتفوی با حداکثر نسبت شارپ (نسبت میانگین به انحراف استاندارد) است. نسبت شارپ به عنوان نسبت ریسک بازگشت تعریف می شود. این بازده مورد انتظار برای هر واحد ریسک را نشان می دهد، بنابراین پرتفوی با حداکثر نسبت شارپ بالاترین بازده مورد انتظار برای هر واحد ریسک را دارند و بنابراین کارآمدترین پرتفوی هستند. از لحاظ گرافیکی، پرتفوی مماس نسبت به فضای حاصل از میانگین و انحراف استاندارد، نقطه تقاطع خطی است که از مبدا شروع و با منحنی مرز کارآ مماس می شود، زیرا این نقطه از ویژگی مهمی برخوردار است که دارای بالاترین میانگین ممکن نسبت به انحراف استاندارد می باشد.

اما از نظر بازار سرمایه نسبت شارپ در نمودار (۱) نشان داده شده است. خط بازار سرمایه، تمام ترکیب های ممکن پرتفوی که شامل نسبت های متفاوت بین دارایی بدون ریسک و پرتفوی بازار است را نشان می دهد. از سوی دیگر، مرز کارآ نشان دهنده تمام ترکیب های ممکن پرتفوی های کارآ است. اما این پرتفوی ها فقط شامل نسبت های مختلف از دارایی های ریسکی می باشند و نه دارایی بدون ریسک.



۱. نمودار پرتفوی مماس (بازار)

نقطه تقاطع خط بازار سرمایه با منحنی مرز کارآ، پرتفوی بازار یا پرتفوی مماس نامیده می شود. اگر یک سرمایه گذار، منطقی و ریسک گریز باشد تنها زمانی ریسک بالاتر را می پذیرد که بازدهی متناسب با آن افزایش یابد. از این نقطه نظر، پرتفوی مماس بعنوان کارآمدترین پرتفوی می باشد. برای محاسبه پرتفوی مماس ما به فرمولی برای مرز کارآ نیاز داریم. با جذرگرفتن انحراف استاندارد رابطه (۲) داریم:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2)} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta\sigma_p}{\Delta\mu_p} = \frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2)} - \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2)}{\mu_{tg} - 0}$$

شیب مرز کارآ در نقطه مماس از مشتق مرز کارآ در آن نقطه بدست می آید:

$$\frac{\partial\sigma_p}{\partial\mu_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2) \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{d} (2c\mu_p - 2bC_0) \Big|_{\mu_p=\mu_{tg}} = \frac{c\mu_p - bC_0}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2)}}$$

با توجه به اینکه در نقطه مماس دو شیب برابراند، پس داریم:

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2)}}{\mu_{tg}} = \frac{c\mu_p - bC_0}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + ac_0^2)}} \Rightarrow \mu_{tg} = \frac{a}{b} C_0$$

با جانشین کردن μ_{tg} در فرمول مرز کارا فرمول انحراف استاندارد σ_{tg} متناظر با آن به صورت زیر بدست می آید:

$$\sigma_{tg} = \sqrt{\frac{1}{d}(c \frac{a^2}{c^2 C_0^2} - \frac{2ab}{b} C_0^2 + a C_0^2)} = \sqrt{\frac{a}{b}} C_0$$

بطوریکه $d = ac - b^2$ می باشد. تخصیص دارایی ها θ در مرحله مماس، با استفاده از فرمول (۳) به صورت زیر بدست می آید.

$$\theta_{tg} = \frac{c \frac{a}{b} C_0 - b C_0}{d} \sum^{-1} \mu + \frac{a C_0 - b \frac{a}{b} C_0}{d} \sum^{-1} \bar{1} = \sum^{-1} \mu \frac{C_0}{b}$$

بنابراین

$$\theta_{tg} = \sum^{-1} \mu \frac{C_0}{b} \quad (5)$$

۴ پرتفوی بهینه

تاکنون، شاهد دو اوراق بهادار هستیم که یک سرمایه گذار می تواند ترجیح دهد. اگر او خواهان حداقل میزان خطر باشد، حداقل پرتفوی واریانس را به عهده می گیرد. اگر هدف به حداکثر رساندن نسبت شارپ پرتفوی باشد، پرتفوی مماس در نظر گرفته میشود. با این حال، نظریه مارکوویتز نوع دیگری از اولویت را برای سرمایه گذار فرض میکند. در این مدل هدف سرمایه گذاران به حداکثر رساندن سود است، بطوریکه از رابطه زیر بدست می آید:

$$u = E(C_{end}) - \frac{1}{\gamma} \gamma var(C_{end}) \quad (6)$$

$$u = E(C_{end}) - \frac{1}{\gamma} (C_{end}) = E(E_0 + R_p) - \frac{1}{\gamma} \gamma var(E_0 + R_p) = C_0 + \mu_p - \frac{1}{\gamma} \gamma var(R_p) \quad (7)$$

$$= C_0 + \mu^T \theta - \frac{1}{\gamma} \gamma \sigma_p^2 = C_0 + \mu^T \theta - \frac{1}{\gamma} \gamma \theta^T \sum \theta$$

از لحاظ گرافیکی، پرتفوی با حداکثر سودآوری با حرکت دادن منحنی سودآوری در بالاترین حد ممکن به دست می آید. منحنی سودآوری منحنی است که ترکیبات احتمالی میانگین و انحراف معیار را نشان میدهد که نتیجه آن سودمندی یکسان است. بنا به رابطه (۷)، $\mu_p = u - C_0 + \frac{1}{\gamma} \gamma \sigma_p^2$ در فضای حاصل از میانگین و انحراف استاندارد یک سهمی است. برای محاسبه پرتفوی بهینه، ما باید حداکثر سودمندی را با محدودیت بودجه به حداکثر برسانیم. در این مدل هدف:

$$\max \quad C_0 + \mu^T \theta + \frac{1}{\gamma} \gamma \sigma_p^2$$

$$s.t \quad \bar{1}^T \theta = C_0$$

حال با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، مقدار بهینه تخصیص دارایی ها به صورت زیر بدست می آید:

$$\theta_{opt} = \frac{\sum^{-1} \mu}{\gamma} + \frac{\sum^{-1} \bar{1}}{\gamma} (\frac{\gamma C_0 - b}{c}) = \frac{1}{\gamma} \sum^{-1} + (\mu + \bar{1} (\frac{c - b}{c}))$$

اگر سرمایه گذار بخواهد سودمندی خود را به حداکثر برساند، وی بایست مبالغی را در هر دارایی سرمایه گذاری کند. ما می توانیم این عبارت را با استفاده از حداقل واریانس پرتفوی و پرتفوی مماس ساده کنیم. بابکارگیری آنها داریم:

$$\theta_{mv} = \sum^{-1} \bar{1} \frac{C_0}{b}, \quad \theta_{tg} = \sum^{-1} \mu \frac{C_0}{b}$$

$$\theta_{opt} = \frac{b}{C^* \gamma} \theta_{tg} + \frac{c}{C^*} \left(\frac{C^* - \frac{b}{\gamma}}{c} \right) \theta_{mv} = \frac{b}{C^* \gamma} \theta_{tg} + \left(1 + \frac{b}{C^* \gamma} \right) \theta_{mv} \quad (8)$$

ما می بینیم که پرتفوی بهینه ترکیبی از پرتفوی حداقل واریانس و پرتفوی مماس است. مقادیر مربوط به μ_p و σ_p^2 برابر است با:

$$\mu_{opt} = \frac{d}{c\gamma} + \mu_{mv}, \quad \sigma_{opt}^2 = \frac{d}{c\gamma^2} + \sigma_{mv}^2$$

بنابراین میانگین و واریانس پرتفوی بهینه با مقادیر حداقل واریانس پرتفوی به علاوه مبلغی که به ضریب ریسک پذیری (γ) بستگی دارد، تعیین می شود. هنگامی که یک سرمایه گذار از ریسک مطلق متنفر است، بنابراین نمی خواهد ریسکی را بپذیرد، (γ) به بی نهایت خواهد رفت و پرتفوی بهینه حداقل واریانس پرتفوی خواهد بود. بنابراین یک سرمایه گذار با پارامتر نامحدود ریسک گریزی با حداقل واریانس پرتفوی سرمایه گذاری خواهد کرد.

مراجع

- [۱] ر. راعی، و س. فلاح پور، طراحی مدلی برای مدیریت فعال پرتفوی با استفاده از ارزش در معرض ریسک، ۱۳۹۰.
- [۲] م. کشتکاری، راهبرهای مدیریت پرتفوی و روش های انتخاب اوراق بهادار و تشکیل پرتفوی بهینه، ۱۳۸۷.
- [3] Ait-Sahalia, Brandt "Variable Selection for Portfolio Choice" Journal of Finance no.4, 2001.
- [4] Elton. Gruber, Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, Publisher : John Wiley Sons Inc, 1981.
- [5] Markowitz, "Portfolio Selection" Journal of Finance no.7, 1952.
- [6] 4. Huy ên Sham, Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications, springer, 2009.