یازدهمین سمینار بین‌المللی
جبر خطی و کاربردهای آن
بهمن ۱۴۰۰

بررسی چند جمله ای های روش $DGMRES$

فرنگیس کیانفر *

بخش ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده

یکی ازروشهای رایج برای پیداکردن جواب دستگاه خطی منفرد $Ax = b$ روش تکراری درازین مانده می نیمال $DGMRES$ است . این روش براساس فرایندمتعامدسازی آرنولدی برای بدست آوردن جواب معکوس درازین یک سیستم خطی منفرد سازگاریا ناسازگاراست. چند جمله ایهای مانده وچند جمله ایهای ایده ال این روش در این مقاله مورد بررسی قرار می گیرد. با استفاده از نرم این چند جمله ایها می توان کرانهایی برای نرم بردار باقی مانده بدست آورد.

واژه‌های کلیدی: کلید واژه : مقادیرریتز، مقادیرهارمونیک ریتز، معکوس درازین ، روش مانده می نیمال درازین
کد موضوع‌بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A06، 15A09، 65F10

۱ مقدمه

روش تکراری مانده مینیمال تعمیم یافته $(GMRES)$ یک روش زیرفضای کریلف است که برمبنای متعامدسازی آرنولدی ، تقریبی ازجواب دستگاه خطی $Ax = b$ رابدست می آورد که درآن ماتریس A یک ماتریس نامنفرداست [۵] . دراین روش بردار $x_\circ$ برداراولیه و $r_\circ = b - Ax_\circ$ بردارمانده اولیه می باشد. فضای کریلف مرتبه k نسبت به ماتریس A وبردار $r_\circ$ بصورت زیرتعریف می شود.

$$\mathbf{K}_k(A, r_\circ) = span\{r_\circ, Ar_\circ, A^{۲}r_\circ, \cdots, A^{k-۱}r_\circ\}.$$

جواب تقریبی x_k^G درمرحله k به صورت $x_k^G \in x_\circ + \mathbf{K}_k(A, r_\circ)$ بیان می شود، بطوریکه k –امین مانده ، r_k^G باشرط تعامد $r_k^G = b - Ax_k^G \perp A\mathcal{K}_k(A, r_\circ)$ مینیمم سازی شود. براساس روابط فوق می توان نرم بردارمانده مرحله $k-$ ام رابصورت معادله زیر نشان داد.

$$\|r_k^G\| = \min_{p \in \pi_k(\circ)} \|p(A)r_\circ\| = \min_{q \in \pi_{k-۱}} \|(I - Aq(A))r_\circ\|. \qquad (۱)$$

که درآن $\pi_k(\circ) = \{p(x) \in \pi_k : p(\circ) = ۱\}$ می باشد. بسهولت می توان نشا ن دادکه نرم بردارهای مانده درروش مانده مینیمال تعمیم یافته درشرط $r_\circ \geq r_۱ \geq r_۲ \geq \cdots r_{n-۱} \geq r_n = \circ$ صدق می کنند وروش فوق باحداکثر n تکراردرمرحله n به جواب دقیق دستگاه خطی دسترسی پیدا می کند. درواقع هدف تقریب درروش مانده مینیمال تعمیم یافته مشخص کردن چندجمله ای $p^G(z)$ که درآن سمت راست معادله فوق به مقدارمی نیمم می رسد. این چندجمله ای ، چندجمله ای مانده مینیمال تعمیم یافته نامیده می شود. بعلاوه اگر

$$\frac{\|r_k^G\|}{\|r_\circ\|} \leq \min_{p \in \pi_k(\circ)} \|p(A)\| = \min_{q \in \pi_{k-۱}} \|(I - Aq(A))r_\circ\|. \qquad (۲)$$

مسئله ایده ال روش مانده مینیمال تعمیم یافته ($GMRES$) حاصل می شود. به چندجمله ای که سمت راست معادله فوق را می نیمم می کند، چندجمله ای ایده ال مانده مینیمال تعمیم یافته نامیده می شود.

*آدرس ایمیل سخنران : kyanfar@uk.ac.ir

فرض کنید ماتریس A نامنفرد باشد، گرین باوم وترفتن درمقاله [۳] نشان دادند، اگر $\min_{p\in\pi_k(0)} \|p(A)\| > 0$. انگاه یک چندجمله ای $p^{IG}(x) \in \pi_k(0)$ ایده ال روش مانده مینیمال تعمیم یافته به صورت منحصربفرد وجودداردبطوریکه

$$\min_{p\in\pi_{k-1}} \|I - Ap(A)\| = \min_{p\in\pi_k(0)} \|p(A)\| = \|p^{IG}(A)\| \tag{۳}$$

برقراراست. بعلاوه اگر $\pi_k(1) = \{p(x) \in \pi_k : \; p \text{ is monic} \}$ باشد و $\min_{p\in\pi_k(1)} \|p(A)\| > 0$ آنگاه یک چندجمله ای منحصربفرد ایده ال آرنولدی $p^{IA}(x) \in \pi_k(1)$ وجوددارد بطوریکه دررابطه زیرصدق می کند.

$$\min_{p\in\pi_{k-1}} \|A^k - p(A)\| = \min_{p\in\pi_k(1)} \|p(A)\| = \|p^{IA}(A)\|. \tag{۴}$$

ریشه های این چندجمله ایها مقادیر ریتز و هارمونیک ریتز می باشند که در زیر تعاریف مربوطه ارایه می شوند.

تعریف ۱.۱. اگر $\mathcal{V}_k$ یک زیرفضایی ازفضای برداری $\mathbb{C}^n$ باشد، انگاه θ_k یک مقدار ریتز ماتریس A نسبت به $\mathcal{V}_k$ نامیده می شود اگر

$$Av_k - \theta_k v_k \perp \mathcal{V}_k, \quad for\ some\ v_k \in \mathcal{V}_k, \;\; v_k \neq 0.$$

تعریف ۲.۱. اگر $\mathcal{W}_k$ یک زیرفضایی ازفضای برداری $\mathbb{C}^n$ باشد، انگاه μ_k یک مقدار هارمونیک ریتز ماتریس A نسبت به $\mathcal{W}_k$ نامیده می شود اگر

$$A^{-1}w_k - \mu_k w_k \perp \mathcal{W}_k, \quad for\ some\ w_k \in \mathcal{W}_k, \;\; w_k \neq 0.$$

کیم–چن توی درپایان نامه دکتری خودریشه های چندجمله ایهای ایده ال ارنولدی و ایده ال مانده مینیمال راموردبررسی قراردادند.

قضیه ۳.۱. *[۷، قضیه۱۰.۵] فرض کنید A یک ماتریس نامنفردباشد و چندجمله ای ایده ال آرنولدی ماتریس A بصورت $p^{IA}(x) \in \pi_k(1)$ بیان شده باشد. آنگاه اگر $\|p^{IA}(A)\| > 0$ آنگاه ریشه های چندجمله ای ایده ال آرنولدی $\|p^{IA}(x)\|$ مقادیرریتزماتریس A هستندکه درمحدوده بردعددی ماتریس A قراردارند*

$$\{x \;:\; p^{IA}(x) = 0\} \subset \mathcal{F}(A).$$

قضیه ۴.۱. *[۷، قضیه۱۱.۵] فرض کنید چندجمله ای $k-$ ام ایده ال $GMRES$ ماتریس A $p^{IG}(x) \in \pi_k(0)$ باشدو A یک ماتریس نامنفردباشد. آنگاه اگر $\|p^{IG}(A)\| > 0$ آنگاه ریشه های چندجمله ای ایده ال آرنولدی $\|p^{IG}(x)\|$ مقادیرریتزماتریس A هستندکه درمحدوده بردعددی ماتریس A^{-1} قراردارند*

$$\{1/x \;:\; p^{IG}(x) = 0\} \subset \mathcal{F}(A^{-1}).$$

۲ نتایج اصلی

در این بخش در صدد هستیم چندجمله ایهای $DGMRES$ و $DArnoldi$ را موردمطالعه قراردهیم. فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس منفردباانديس α باشد. ماتریس یکانی Q وجوددارد بطوریکه تجزیه ماتریس A براساس فضای پوچ $\mathcal{N}(A^\alpha)$ وبرد $\mathcal{R}(A^\alpha)$ بصورت زیر می باشد [۲].

$$A = Q \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & N \end{bmatrix} Q^*, \tag{۵}$$

که درآن ماتریس $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ یک ماتریس معکوس پذیراست و ماتریس $N \in \mathbb{C}^{n-m\times n-m}$ یک ماتریس پوچ توان باانديس α می باشد. فرض کنید بردار x_0 یک حدس اولیه ازجواب دستگاه خطی $Ax = b$ داده شده باشد وبردار $r_0 = b - Ax_0$ بردارمانده اولیه باشد. درروش $DGMRES$ بردارجواب تقریبی x_k^D در مرحله $k-$ ام بصورت زیر بیان می شود [۶].

$$x_k^D \in \; x_0 + span\{A^\alpha r_0, \ldots, A^{k-1} r_0\}, \quad k = \alpha + 1, \ldots, n$$

بطوریکه نرم بردارمانده درمرحله $k-$ام ، $r_k^D = b - Ax_k^D$ درروش فوق بایددرمعادله زیر صدق کند.

$$\|A^\alpha r_k\| = \min_{p\in\pi_k^\alpha(0)} \left\| Q \begin{bmatrix} p(B) & * \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} Q^* A^\alpha r_0 \right\|, \tag{۶}$$

نتیجه می گیریم که k–امین مانده روش مینمال تعمیم یافته درازین بصورت

$$\varphi_k^D = \|A^\alpha r_k\| = \min_{p\in\pi_k^\alpha(\circ)}\|p(A)A^\alpha r_\circ\| \tag{۷}$$

که درآن $\pi_k^\alpha(\circ) = \{p \in \pi_k(\circ)\ :\ p^{(i)}(\circ) = \circ,\ \ ۱ \leq i \leq \alpha\}$ می باشد. $p^D(z)$، k –امین چندجمله ای مینمال تعمیم یافته درازین نامیده می شود که سمت راست معادله فوق رامی نیمم می کند. وجود و یکتایی این چند جمله ای در قضایای زیر بیان می شود.

با استفاده از قضیه زیر می توان نشان داد که k –امین چندجمله ای مینمال تعمیم یافته درازین وجود دارد.

قضیه ۱.۲. *[۴، قضیه ۳.۲] فرض کنید $B \in \mathbb{C}^{J\times J}$ ماتریس نامنفرد داده شده باشد، $m \geq \circ$ و $l \geq \circ$ اعدادصحیح باشند. اگرعبارت $\min_{p\in\Omega_{l,m}}\|p(B)\| > \circ$، آنگاه مسئله دارای جواب یکتاکمینه است. بطوریکه*

$$\Omega_{\ l,m}\ :=\ \{z^{m+۱}q + ۱\ :\ q \in \pi_l\}.$$

فرض کنید $l = k - \alpha - ۱ \geq \circ$ و $m = \alpha$ ، دراین صورت $\Omega_{\ l,m}\ =\ \pi_k^\alpha(\circ)$

چون $Q^*A^\alpha r_\circ = (\tilde{r}_\circ, \circ)^t$ لذا با استفاده از (۶) و (۷)

$$\|A^\alpha r_k\| = \min_{p\in\pi_k^\alpha(\circ)}\|p(B)\tilde{r}_\circ\| \tag{۸}$$

قضیه ۲.۲. *فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ با اندیس $\alpha = ind(A) > \circ$ همانند رابطه (۵) و (۸) بیان شده باشد. اگرمعادله $\min_{p\in\pi_k^\alpha(\circ)}\|p(B)\| > \circ$ انگاه یک چندجمله ای یکتا $p^*(z) \in \pi_k^\alpha(\circ)$ وجوددارد بطوریکه*

$$\min_{p\in\pi_k^\alpha(\circ)}\|p(B)\| = \|p^*(B)\| \tag{۹}$$

تعریف ۳.۲. بااستفاده ازقضیه ۲. ۲ ، اگر $\min_{p\in\pi_k^\alpha(\circ)}\|p(B)\| > \circ$ k –امین ایده ال مینمال تعمیم یافته درازین برای دستگاه منفرد $Ax = b$ به صورت زیرتعریف می شود.

$$\varphi_k^{ID} = \min_{p\in\pi_k^\alpha(\circ)}\max_{\|r\|=۱, r\in\mathcal{R}(A^\alpha)}\|p(A)r\|. \tag{۱۰}$$

تعریف ۴.۲. k– امین مینمال تعمیم یافته درازین دربدترین حالت برای دستگاه منفرد $Ax = b$ به صورت زیرتعریف می شود.

$$\varphi_k^{WD} = \max_{\|r\|=۱, r\in\mathcal{R}(A^\alpha)}\min_{p\in\pi_k^\alpha(\circ)}\|p(A)r\|. \tag{۱۱}$$

گزاره ۵.۲. *فرض کنید ϕ_k^D, φ_k^{WD} و ϕ_k^{ID} , به ترتیب مقادیرتعریف شده درروابط (۷) ، (۱۰) و (۱۱) باشند ، آنگاه*

$$\varphi_k^D \leq \varphi_k^{WD} \leq \varphi_k^{ID}.$$

بعبارت دیگرایده ال روش مانده می نیمال درازین کرانی برای بدترین حالت مانده می نیمال درازین می باشد.

درروش درازین آرنولدی $(DArnoldi)$ هدف پیداکردن تقریبی است که بتواند عبارت زیررابه می نیمم برساند

$$\min_{p\in\pi_{k-۱}}\|(A^k - p(A))A^\alpha r_\circ\| = \min_{p\in\pi_k(۱)}\ \|p(A)A^\alpha r_\circ\|.$$

بااستفاده ازرابطه (۶)

$$\min_{p\in\pi_k(۱)}\ \|p(A)A^\alpha r_\circ\| = \min_{p\in\pi_k(۱)}\left\|Q\begin{bmatrix} p(B) & * \\ \circ & p(N)\end{bmatrix}Q^*A^\alpha r_\circ\right\|,$$

ازانجاکه $Q^*A^\alpha r_\circ = (\tilde{r}_\circ, \circ)^t$ ،رابطه زیربدست می آید

$$\begin{aligned}\|p^{DArnoldi}(A)A^\alpha r_\circ\| &= \min_{p\in\pi_k(۱)}\ \|p(A)A^\alpha r_\circ\| \\ &= \min_{p\in\pi_k(۱)}\ \|p(B)\tilde{r}_\circ\| \leq \min_{p\in\pi_k(۱)}\ \|p(B)\|\|\tilde{r}_\circ\|\end{aligned}$$

چون $\|A^\alpha r_\circ\| = \|\tilde{r}_\circ\|$ بنابراین

$$\min_{p\in\pi_k(۱)}\frac{\|p(A)A^\alpha r_\circ\|}{\|A^\alpha r_\circ\|} \leq \min_{p\in\pi_k(۱)}\ \|p(B)\| = \|p^{IDA}(B)\|$$

چندجمله ای $p^{IDA}(z)$ چندجمله ای ایده ال درازین آرنولدی نامیده می شود. بنابراین چندجمله ای ایده ال درازین ماتریس A با چندجمله ای ایده ال آرنولدی برای بخش نامنفرد ماتریس A باهم برابرهستند.

مراجع

[1] R. Carden and M. Embree, *Ritz value localization for non-Hermitian matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **33** (2012), pp. 1320-1338.

[2] A. Greenbaum, F. Kyanfar and A. Salemi *On the Convergence Rate of DGMRES*, Lin. Alg. Appl. **552** (2018), pp. 219-238.

[3] A. Greenbaum and L. N. Trefethen, *GMRES/CR and Arnoldi/Lanczos as matrix approximation problems*, SIAM J. Sci. Comput. **15** (1994), pp. 359-368.

[4] J. Liesen and P. Tichý, *On Best approximation of polynomials in matrices in the matrix 2-norm*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **31-2** (2009) 853-863.

[5] Y. Saad and M.H. Schultz, GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 1986; **7**: 856-869.

[6] A. Sidi, *DGMRES: A GMRES-type algorithm for Drazin-inverse solution of singular nonsymmetric linear systems*, Lin. Alg. Appl. **335** (2001), pp. 189-204.

[7] K. C. Toh, *Matrix approximation problems and nonsymmetric iterative methods*, PhD dissertation, Cornell University, Ithaca, NY, 1996.