

انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با بهینه‌سازی چندهدفه

سید مرتضی امینی^۱، ساجده جوادی^۲، مجید سلیمانی دامنه^۳

^۱عضو هیات علمی، دانشگاه تهران؛ morteza.amini@ut.ac.ir

^۲دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران؛ sajedehjavadi3@gmail.com

^۳عضو هیات علمی، دانشگاه تهران؛ soleimani@khayam.ut.ac.ir

چکیده

انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری یکی از مسایل مهم در ریاضیات کاربردی، اقتصاد و مالی است. این زمینه به چگونگی تخصیص بهینه سرمایه (انتخاب مناسب موقعیت‌های سرمایه‌گذاری) با در نظر گرفتن دو شاخص مخاطره و بازده می‌پردازد. با توجه به اهمیت تابع مخاطره در مساله انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری، در این مقاله ضمن مطالعه و مقایسه دو تابع مهم مخاطره، به نقش آنها در سبد نهایی با استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه می‌پردازیم و نتایج بدست آمده از پیاده‌سازی بر روی داده‌های بازار بورس تهران را مورد تحلیل قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: سبد سرمایه‌گذاری؛ بهینه‌سازی چند هدفه؛ مرز کارا؛ مخاطره.

1- مقدمه

نخستین گام‌ها در مدل‌سازی ریاضی مساله انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری را مارکویتز (Markowitz) در دهه پنجم قرن 19 میلادی برداشت. وی، که در سال 1990 برنده جایزه نوبل اقتصاد گردید، یک مدل بهینه‌سازی تحت عنوان مدل میانگین-واریانس را معرفی نمود. در این مدل، بازده مورد انتظار بر اساس عملگر امید ریاضی و مخاطره بر پایه عملگر واریانس تعریف شده است. اگرچه مدل مارکویتز و مطالعات وی نقطه آغاز بسیار کلیدی و مهمی در زمینه بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری بود، ولی در عمل ضعف‌هایی داشت. این ضعف‌ها محققان را به سمت معرفی توابع مخاطره بیشتر رهنمون کرد. توابع مخاطره متعددی در ادبیات موضوع معرفی گردیده است. در این مقاله، دو مورد از آنها را مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهیم. مدل‌های بدست آمده از به‌کارگیری این توابع مخاطره را با ابزارهای بهینه‌سازی چندهدفه مورد کنکاش قرار می‌دهیم. در پایان، نتایج بدست آمده از پیاده‌سازی مدل‌ها روی داده‌های بازار بورس تهران را تحلیل می‌کنیم. مقاله حاضر دنبال‌کننده و تکمیل‌کننده مطالعه ما در مراجع [1,4] است.

2- مدل مارکویتز از دیدگاه بهینه‌سازی چند هدفه

فرض کنید یک سرمایه‌گذار به دنبال انتخاب تعدادی موقعیت سرمایه‌گذاری از بین N موقعیت مخاطره آمیز است. هدف در این مساله، بیشینه کردن بازده (مورد انتظار) و در عین حال کمینه کردن مخاطره سرمایه‌گذاری است. متغیرهای تصمیم، کسری از سرمایه هستند که باید به هر یک از موقعیت‌های سرمایه‌گذاری اختصاص یابد. این متغیرها را با $x_1, x_2, \dots, x_N$ نمایش می‌دهیم. می‌توان محدودیت‌های متعددی را، با توجه به سلیقه و شرایط سرمایه‌گذار، روی این متغیرها اعمال کرد. پایه‌ای‌ترین آنها، قید

است. شرط دیگر، نامنفی بودن متغیرهاست، که در اینجا به معنای مجاز نبودن فروش استقراضی است [1,2,4,5,7]. یکی از سوالات کلیدی پیرامون مساله انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری، چگونگی تعریف و محاسبه (برآورد) بازده و مخاطره است. برای برآورد این دو شاخص، از داده‌های گذشته کمک می‌گیریم. به عبارتی دیگر، اطلاعات بازده شرکت‌ها در یک بازه زمانی را استخراج نموده و متغیر تصادفی متناظر با آن‌ها را به عنوان متغیر تصادفی بازده (برای هر شرکت) در نظر می‌گیریم. فرض کنید متغیر تصادفی R_j با امید ریاضی r_j بیان‌گر متغیر تصادفی بازده مربوط به موقعیت j است. با توجه به فرضیه‌های بالا، متغیر تصادفی $\sum_{j=1}^N R_j x_j$ متناظر با سبد سرمایه‌گذاری مورد نظر است. بازده مورد انتظار برای این سبد سرمایه‌گذاری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j\right) = \sum_{j=1}^N E(R_j) x_j = \sum_{j=1}^N r_j x_j$$

برخلاف بازده که در عمده مدل‌های بهینه‌سازی سهام به صورت بالا تعریف شده، مخاطره با رویکردهای گوناگونی در ادبیات موضوع در نظر گرفته شده است. مارکوویتز [5] واریانس این متغیر به صورت زیر را به عنوان مخاطره سرمایه‌گذاری در نظر گرفت:

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j\right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \sigma_{ij} x_j$$

که در آن، σ_{ij} کواریانس R_i و R_j است. حال با توجه به دو رابطه بالا، می‌توان مدل انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری را به یکی از سه صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \sigma_{ij} x_j \quad & \max \sum_{j=1}^N r_j x_j \quad \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \sigma_{ij} x_j - \lambda \sum_{j=1}^N r_j x_j \\ \sum_{j=1}^N r_j x_j \geq \rho, \quad & \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \sigma_{ij} x_j \leq L, \text{s.t.} \quad x \in X \quad \text{s.t.} \\ x \in X \quad & x \in X \end{aligned}$$

در مدل اول، ρ حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار، و در مدل دوم، L حداکثر مخاطره قابل تحمل است. در مدل سوم، هر دو شاخص مخاطره و بازده مورد انتظار در تابع هدف گنجانده شده‌اند و λ یک پارامتر تنظیم‌کننده میان نقش و اهمیت این دو شاخص است. در هر سه مدل، X مجموعه سبدهای شدنی است. با توجه به توضیحاتی که در ابتدای همین بخش دادیم، معمولاً

$$X = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_N) \in R^N \mid \sum_{j=1}^N x_j = 1, x_j \geq 0, j=1, 2, \dots, N \right\}. \quad (1)$$

از بین این سه مدل، مارکوویتز مدل اول را، که به مدل میانگین- واریانس معروف شده است، در نظر گرفت. او برای بدست آوردن همه سبدهای سرمایه‌گذاری بهینه، مرز کارا در سرمایه‌گذاری را تعریف کرد و یک روشی هندسی، با بررسی همه حالت‌های ممکن، برای محاسبه آن معرفی نمود. همانطور که در [1,4] بیان شده است، این روش هندسی ایرادهایی در اجرا دارد و فقط برای مواردی کارآمد است که تعداد موقعیت‌های سرمایه‌گذاری کم باشد. یکی از راه‌های غلبه بر این مشکل، پرداختن به مدل مارکوویتز، از منظر بهینه‌سازی چندهدفه، با در نظر گرفتن مخاطره و بازده مورد انتظار به عنوان دو تابع هدف جداگانه، است. توجه کنید که این دو تابع هدف با یکدیگر



در تعارض هستند، چرا که بهبود یکی منجر به بدتر شدن دیگری می‌شود. بنابراین، مساله در پایه‌ای‌ترین فرض مدل‌سازی‌های چندهدفه، یعنی تعارض توابع هدف، صدق می‌کند. این نوع نگاه به مدل انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری، مزایای متعددی دارد. از جمله اینکه، بدست آوردن و ترسیم مرز کارا را آسان می‌نماید. مزیت دیگر این است که می‌توان با تغییر مخروط ترتیب، ارجحیت‌ها و سطح مخاطره‌پذیری سرمایه‌گذار را در مدل اعمال کرد [6]. همچنین، می‌توان عدم قطعیت و استواری را نیز در مدل در نظر گرفت [6]. با اعمال رویکرد بهینه‌سازی چندهدفه، به مساله دوهدفه زیر می‌رسیم:

$$\min \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \sigma_{ij} x_j, - \sum_{j=1}^N r_j x_j \right) \quad (2)$$

$$\text{s.t. } x \in X$$

تعریف زیر به معرفی مفهوم جواب کارا در بهینه‌سازی چندهدفه می‌پردازد. جواب‌های کارای مساله دوهدفه بالا، متناظر با سبدهای سرمایه‌گذاری کارا هستند.

تعریف 1. مساله بهینه‌سازی چند هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\min(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$$

$$x \in S \quad \text{s.t.}$$

بردار $\bar{x} \in S$ را یک نقطه کارا برای مساله بهینه‌سازی چند هدفه بالا می‌گویند هرگاه:

$$x \in S, f_j(x) \leq f_j(\bar{x}), j=1,2,\dots,p \implies f_j(x) = f_j(\bar{x}), j=1,2,\dots,p$$

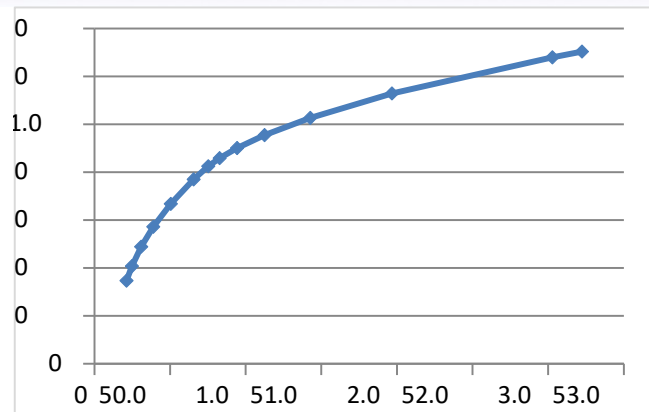
با توجه به روش مجموع وزن‌دار در بهینه‌سازی چندهدفه، قضیه زیر را داریم.

قضیه 1. فرض کنید مجموعه X محدب است. یک سبد سرمایه‌گذاری برای مساله (2) کارا است، اگر و تنها اگر اسکالر $\theta \in (0,1)$ وجود داشته باشد، به طوری که این سبد، برای مساله زیر بهینه باشد

$$\min \left[\theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \sigma_{ij} x_j + (1-\theta) \left(- \sum_{j=1}^N r_j x_j \right) \right]$$

$$x \in X \quad \text{s.t.}$$

تحت شرایطی، سبدهای سرمایه‌گذاری کارا، کارای سره نیز خواهند بود و لذا بده-بستان بین مخاطره و بازده مورد انتظار کران‌دار خواهد شد. به علاوه، با توجه به مفهوم کارایی سره به بیان هنیگ [3]، کارایی سبدها در مقابل تغییرهای کوچک در ارجحیت‌های سرمایه‌گذار حفظ خواهد شد و لذا نوعی از پایداری در جواب‌ها وجود دارد. به ترسیم مرز کارا برمی‌گردیم. داده‌های مربوط به قیمت پایانی سهام 10 شرکت از بورس اوراق بهادار تهران را در نظر می‌گیریم. افرادی که با تحلیل تکنیکال در بازار سرمایه آشنایی دارند، می‌دانند که نمودارهای قیمت سهام در هر روز چهار قیمت آغازین، پایانی، بالاترین و پایین‌ترین را نمایش می‌دهند. در اینجا، ما به داده‌های مربوط به قیمت پایانی در بازه‌های زمانی سه ماهه به مدت 5 سال، از فروردین 1393 تا مهر 1397، پرداخته‌ایم. با استفاده از داده‌های خام، تغییرات نسبی قیمت‌های پایانی را بدست آورده‌ایم. سپس با حل مساله دوهدفه، مبتنی بر داده‌های اشاره شده، مرز کارا را محاسبه و بررسی کرده‌ایم. مجموعه شدنی سهام را به صورت (1) در نظر گرفته‌ایم. مرز کارای بدست آمده در شکل 1 دیده می‌شود. این نتیجه با تغییر پارامتر اسکالر θ به صورت 05/0، 1/0، 15/0، ...، 95/0 بدست آمده است. توجه کنید که بدست آوردن مرز کارا با رویکرد بهینه‌سازی چندهدفه با حل تنها چند مساله برنامه‌ریزی ریاضی انجام می‌شود و به مراتب ساده‌تر از روش مارکویتز است (مراجع [1,4] را برای جزئیات بیشتر ببینید و شکل 1 این مقاله را با شکل 1 در [1] مقایسه نمایید).



شکل 1: مرز کارای مدل دوهدفه میانگین-واریانس

3- مدل مبتنی بر مخاطره احتمالی

در این بخش، مخاطره احتمالی بر اساس رابطه

$$\min_{1 \leq j \leq N} P(\tilde{R}_j x_j - r_j x_j \leq \Theta \varepsilon)$$

تعریف می‌شود، که در آن $P(\cdot)$ تابع احتمال، Θ ثابتی برای تنظیم سطح مخاطره و ε

متوسط مخاطره کل سبد سرمایه‌گذاری است و از رابطه $\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sigma_j$ بدست می‌آید]

[7]. مسأله دوهدفه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\max \tilde{R}_j x_j$$

$$x \in X, \quad \text{s.t.}$$

که در آن $f_j(z) = P(\tilde{R}_j z - r_j z \leq \Theta \varepsilon)$ با اضافه کردن متغیر y و N محدودیت، مساله بالا به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$(\max \tilde{R}_j x_j)$$

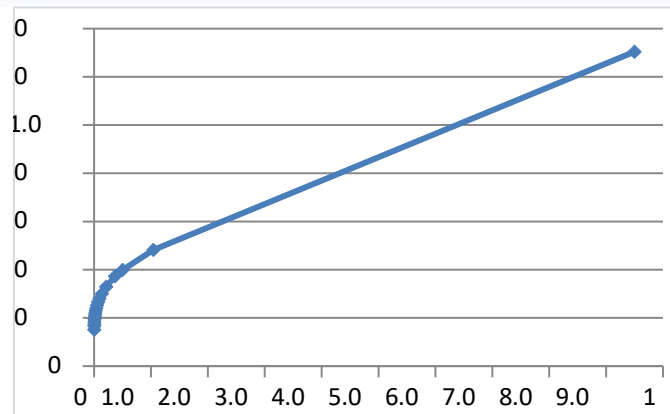
$$y \leq f_j(x_j), j=1, 2, \dots, N \quad \text{s.t.}$$

$$x \in X,$$

که $y \leq f_j(x_j)$ محدودیت احتمالی زام است. با در نظر گرفتن توزیع نرمال برای R_j داریم:

$$f_j(x_j) = 2 \int_0^{\frac{\Theta \varepsilon}{x_j}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_j} e^{-\frac{p_j^2}{2\sigma_j^2}} dp_j$$

با حل مساله دوهدفه بالا به کمک رویکرد اسکالرسازی در بهینه‌سازی چندهدفه و اجرای مدل روی داده‌های بیان شده در بخش قبل مرز کارا را بدست آورده و در شکل 2 نمایش داده‌ایم.



شکل ۲: مرز کارایی مدل دوهدفه احتمالی

۴- بحث و نتیجه گیری

نتیجه‌های این مقاله نشان می‌دهد که با توجه به تعارض موجود بین مخاطره و بازده، بهینه‌سازی چندهدفه رویکرد مناسب‌تری برای بررسی مساله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، نسبت به مدل‌سازی تک‌هدفه، است. این رویکرد بدست آوردن و ترسیم مرز کارا را آسان‌تر می‌نماید، قابلیت اعمال ارجحیت‌ها و سطح مخاطره‌پذیری سرمایه‌گذار با تغییر مخروط ترتیب را دارد و می‌توان عدم قطعیت و استواری را نیز در مدل در نظر گرفت.

از بین دو تابع مخاطره بررسی شده، تابع احتمالی، بر روی داده‌های بررسی شده، از منظر متنوع بودن سبدها نتایج بهتری می‌دهد (نتایج و نمودارهای بدست‌آمده به طور مفصل‌تر در سخنرانی مربوطه ارائه خواهد شد) و سبدهای متنوع‌تری تولید می‌نماید. از منظر کارایی نسبی (مرجع [1] را ببینید) نیز مدل بهینه‌سازی چندهدفه با مخاطره احتمالی، موفق‌تر عمل می‌کند.

مراجع

- [1] Amini, M., Javadi, S., Soleimani-damaneh, M.; "Optimal portfolio selection based on various risks", Riaziat va Jameeh [Mathematics and Society], 4, 49-67, (1398), In Persian.
- [2] Cai, X.Q., Teo, K. L., Yang, X.Q., Zhou, X.Y.; "Portfolio optimization under a minimax rule", Management Science, 46, 957-972 (2000).
- [3] Ehrgott, M.; "Multicriteria Optimization", Springer, New York, (2005).
- [4] Javadi, S.; "Portfolio selection based on the minimax risk", Master dissertation, University of Tehran, (2019), In Persian.
- [5] Markowitz, H.; "Portfolio selection", The Journal of Finance, 7, 77-91, (1952).
- [6] Rahimi, M., Soleimani-damaneh, M.; "Robustness in Deterministic Vector Optimization", Journal of Optimization Theory and Applications, 179, 137-162, (2018).
- [7] Sun, Y., Aw, G., Teo, K., Zhou, G.; "Portfolio optimization using a new probabilistic risk measure", Journal of Industrial and Management Optimization, 11, 1275-1283, (2015).