

بررسی مسأله آتش نشان روی درخت با حداکثر درجه سه مسأله مکان یابی آتش نشان روی درخت ها

محجوبه خدادادی دشتکی^۱، دکتر اردشیر دولتی^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهد تهران؛ mahjoubekhodadadi@gmail.com
^۲ دانشیار گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد تهران؛ ardeshirdolati@gmail.com

چکیده

یکی از مسائل مورد بحث در دهه های اخیر، مسأله آتش نشان^۱ است که دارای کاربردهای فراوان از جمله مهار آتش، مهار سیل، جلوگیری از انتشار ویروس (اطلاعات مخرب) در دستگاه های اطلاعاتی و کنترل رشد بیماری های واگیردار مانند وبا، است. این مسأله روی گراف های عمومی NP-سخت^۲ است. برای این مسأله روی برخی گراف های خاص مطالعات گسترده ای انجام شده است.

هدف از مسأله آتش نشان روی گراف ها، مهار آتش است، به طوری که بیشترین تعداد رئوس گراف از آتش در امان بمانند.

ما در این مقاله به بررسی مسأله آتش نشان روی گراف های وزن دار می پردازیم و یک الگوریتم ابتکاری برای این مسأله روی درخت های وزن دار ارائه می دهیم. در پایان نیز جهت درک بهتر الگوریتم ارائه شده مثال عددی بیان می کنیم.

کلمات کلیدی: مسأله آتش نشان، الگوریتم ابتکاری، بهینه سازی ترکیبیاتی مکان یابی

1- مقدمه

فرض می کنیم $G=(V, E)$ یک گراف غیر جهت دار با مجموعه رئوس V و مجموعه یال های E باشد. ابتدا یک رأس از شبکه مانند v ، در گام زمانی $t=0$ آتش می گیرد و در هر گام زمانی متوالی، $t=i+1$ که $i=0, \dots, T$ ، آتش نشان موظف است که از سرایت آتش به یک رأسی که در همسایگی رأس سوخته شده قرار گرفته جلوگیری کند. اما توجه داریم که آتش در مابقی رئوس همسایگی رأس سوخته شده بجز رأسی که آتش نشان در آن مستقر است، منتشر می شود. این روند تا جایی ادامه می یابد که آتش نتواند در شبکه منتشر شود. در مسأله آتش نشان رئوس به سه دسته سوخته شده، محافظت شده و دست نخورده برچسب گذاری می شوند.

۱. رأس سوخته شده به رأسی اطلاق می گردد که آتش در آن منتشر شده باشد.
 ۲. رأسی که آتش نشان در آن واقع می گردد رأس محافظت شده برچسب گذاری می شود.
 ۳. رئوسی که نه سوخته شده باشند و نه محافظت شده، رئوس دست نخورده برچسب گذاری می شوند.
- برچسب رئوس سوخته و رئوس محافظت شده تا مهار شدن آتش، بدون تغییر باقی می ماند. در هر گام زمانی آتش در تمامی رئوس همسایگی رأس سوخته شده، به جز رئوس محافظت شده انتشار می یابد.
- اجتماع مجموعه رئوس دست نخورده و رئوس محافظت شده را مجموعه رئوس حفظ شده می نامیم.
- در این مسأله هدف پیشینه سازی تعداد رئوس حفظ شده است، به بیان دیگر مکان یابی

1 Firefighter problem

2 NP – hard



آتش نشان‌ها در هر گام زمانی باید به گونه‌ای انجام شود تا بعد از مهار آتش، بیشترین تعداد ممکن از رئوس شبکه از آتش‌سوزی حفظ شده باشند. در این مقاله ما به بررسی مسئله آتش نشان روی درخت‌های وزن دار می‌پردازیم و یک الگوریتم ابتکاری برای آن ارائه می‌کنیم. باتوجه به کاربردهای گسترده مسئله آتش نشان، این مسئله مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. از جمله مهمترین این کاربردها، مهار آتش، مهار سیل در شبکه‌های جاده‌ای، مهار حمله‌های امنیتی در شبکه اطلاعاتی و جلوگیری از انتشار ویروس و باکتری در بیماری‌های واگیردار و اپیدمی اشاره کرد. در سال 1995، مسئله آتش نشان در توسط برت هارتنل³ معرفی شد [1]. در سال 2000 هارتنل و لی⁴ الگوریتمی حریصانه با تقریب 0.5 ارائه کردند [2]. در سال 2003 مک گیلوری⁶ و وانگ⁷ ثابت کردند که این مسئله برای گراف‌های دوبخشی که در هر بازه زمانی از یک رأس محافظت می‌شود NP-کامل است [3]. نتایج قوی‌تری در سال 2010 توسط کینگ⁸ و مک گیلوری برای گراف‌های مکعب ارائه شد [4]. گراف‌های با درجه 3 توسط فینبو⁹ و همکارانش در سال 2007 به مطالعه بر روی گراف‌های درجه سه پرداختند، که ثابت کردند مسئله آتش نشان روی درخت‌ها با ماکسیمم درجه 3 یک مسئله NP-کامل است [5]. این مقاله به صورت زیر سازماندهی می‌شود: در بخش دوم، به مطالعه مسئله آتش نشان روی گراف‌های وزن دار می‌پردازیم و برای این مسئله یک مدل برنامه‌ریزی ارائه می‌کنیم. در بخش سوم، الگوریتم ابتکاری با پیچیدگی زمانی چند جمله‌ای برای حل مسئله آتش نشان روی درخت وزن دار ارائه می‌کنیم. در بخش چهارم نیز جهت درک بهتر الگوریتم ارائه شده مثال عددی ارائه می‌کنیم.

2- مسئله آتش نشان روی گراف های وزن دار

فرض می‌کنیم $G=(V, E)$ یک گراف غیر جهت دار با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. به طوری که هر رأس $v \in V$ دارای وزن مثبت w_v است. دو متغیر دودویی $d_{v,t}$ و $b_{v,t}$ که وضعیت رأس v را در گام زمانی t مشخص می‌کنند، به صورت زیر تعریف شده اند:

$$d_{v,t} = \begin{cases} 1 & \text{اگر رأس } v \text{ در گام زمانی } t \text{ محافظت شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$b_{v,t} = \begin{cases} 1 & \text{اگر رأس } v \text{ در گام زمانی } t \text{ بسوزد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مجموعه رئوس همسایگی رأس v را با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. $B \subset V$ را مجموعه رئوس سوخته شده و T را کران بالایی برای تعداد گام‌های زمانی مورد نیاز برای مهار آتش در نظر می‌گیریم. با توجه به تعاریف و نماد گذاری فوق، این مسئله به صورت زیر مدل سازی می‌شود:

$$\text{Max} \left(\sum_{v \in V} w_v - \sum_{v \in B} w_v b_{v,T} \right)$$

$$\text{s.t. } d_{v,t} + b_{v,t} - b_{v',t-1} \geq 0 \quad \forall v \in V, v' \in N(v), 0 \leq t \leq T(1)$$

3 Bert Hartnell

4 Li

5 Greedy

6 MacGillivray

7 wang

8 King

9 Finbow



$$d_{v,t} - d_{v,t-1} \geq 0 \quad \forall v \in V, 1 \leq t \leq T \quad (2)$$

$$b_{v,t} - b_{v,t-1} \geq 0 \quad \forall v \in V, 1 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$d_{v,t} + b_{v,t} \leq 1 \quad \forall v \in V, 1 \leq t \leq T \quad (4)$$

$$\sum_{v \in V} d_{v,t} - d_{v,t-1} \leq D \quad \forall 1 \leq t \leq T \quad (5)$$

$$b_{v,0} = 1 \quad \forall v \in B \quad (6)$$

$$b_{v,0} = 0 \quad \forall v \in V - B \quad (7)$$

$$d_{v,0} = 0 \quad \forall v \in V \quad (8)$$

$$b_{v,t} \in \{0,1\} \quad \forall v \in V, 1 \leq t \leq T \quad (9)$$

$$d_{v,t} \in \{0,1\} \quad \forall v \in V, 1 \leq t \leq T \quad (10)$$

هدف از این مسأله مهار آتش توسط مکان‌یابی بهینه آتش‌نشان‌ها است، به طوریکه در پایان دوره زمانی مجموع وزن رئوس حفظ شده بیشینه شود. محدودیت (1) تضمین می‌کند رأس v در تکرار t ام سوخته یا محافظت می‌شود، اگر یکی از همسایگی‌هایش در تکرار $t-1$ ام سوخته شده باشد. محدودیت (2) تضمین می‌کند رأسی که در یک دوره‌ی زمانی محافظت شده باشد، در دوره‌های زمانی بعد نیز رأس محافظت شده باقی می‌ماند. محدودیت (3) تضمین می‌کند رأس سوخته شده، سوخته شده باقی می‌ماند. محدودیت (4) تضمین می‌کند در هر تکرار، رأس v یا محافظت می‌شود یا می‌سوزد، یعنی در هر تکرار یک رأس نمی‌تواند هم زمان هم محافظت شود و هم بسوزد. محدودیت (5) تضمین می‌کند در هر تکرار حداکثر D رأس محافظت می‌شود که D تعداد آتش‌نشان‌های موجود در هر گام زمانی است. محدودیت‌های (6-10) شرایط اولیه مسأله را تضمین می‌کند که در لحظه صفر هیچ رأسی محافظت نمی‌شود، تمامی رئوس جز رئوس مجموعه B که آتش در آن شروع به انتشار کرده است برچسب دست نخورده می‌گیرند و متغیرهای $d_{v,t}$ و $b_{v,t}$ دودویی هستند.

3- ارائه یک الگوریتم ابتکاری برای مسأله آتش‌نشان روی درخت‌های وزندار

فرض می‌کنیم $T=(V, E)$ یک درخت باشد که به هر رأس $v \in V$ وزن مثبت w_v اختصاص یافته است. فرض می‌کنیم در زمان $t=0$ آتش از رأس v_s شروع به انتشار می‌کند. مجموعه رئوسی که در همسایگی رأس v_s (رأس سوخته شده) قرار دارند را با $N(v_s)$ نمایش می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که در هر دوره زمانی با حفظ یکی از رئوس مجموعه $N(v_s)$ توسط آتش‌نشان، مابقی رئوس این مجموعه، سوخته می‌شود. هدف از این مسأله، مهار آتش توسط مکان‌یابی بهینه آتش‌نشان‌ها در هر دوره زمانی است، به طوری که در پایان دوره زمانی مجموع وزن رئوس حفظ شده، بیشینه شود. ما در این جا الگوریتم ابتکاری برای این مسأله ارائه می‌کنیم که در هر دوره زمانی به طوری حریصانه از یک رأس که در همسایگی رأس سوخته شده قرار دارد محافظت می‌کند. شبه‌کد الگوریتم ابتکاری برای مسأله آتش‌نشان روی درخت‌های وزندار به صورت زیر می‌باشد:

الگوریتم 1. ابتکاری برای حل مسأله آتش‌نشان وزندار

شروع

- 1- درخت وزندار $T=(V, E)$ را در نظر بگیرید، به طوری که به هر رأس $v_i \in V$ وزن مثبت w_i اختصاص یافته است.
- 2- فرض کنید k ارتفاع درخت T باشد.
- 3- فرض کنید در لحظه $t=0$ ، آتش از رأس v_s شروع به انتشار می‌کند.
- 4- برای $t=0:k$
 - 4.1- V^t را مجموعه رئوس سوخته شده در لحظه t قرار دهید.
 - 4.2- N^t را مجموعه تمام رئوس در همسایگی رأس سوخته شده در لحظه t قرار دهید.

4.3- T^t را خانواده تمام زیر درخت‌های ماکسیمال حاصل از حذف هر رأس در V^t قرار دهید که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T^t = \{T_j | v_j \in N^t\}, v_j := \text{root } T_j$$

4.4- اکنون برای هر زیردرخت $T_j \in T^t$ محاسبه کنید:

$$W(T_j) = \sum_{v_i \in V(T_j)} w_i, T_j = (V(T_j), E(T_j))$$

$$4.5- \text{محاسبه کنید } T^{\hat{t}} = \arg \max_{T_j \in T^t} W(T_j) \text{ و } Z^{t+1} = \max_{T_j \in T^t} W(T_j)$$

$$4.6- X^{t+1} = \text{root } T^{\hat{t}} \text{ را به عنوان رئوس محافظت شده قرار دهید.}$$

$$4.7- V^{t+1} = N^t \text{ root } T^{\hat{t}}.$$

5- قرار دهید $X^{\hat{t}} = \{X^t | t=1, \dots, k\}$ به عنوان مجموعه رئوس حفظ شده در طول افق زمانی و $Y^{\hat{t}} = V\{X^{\hat{t}}\}$ را به عنوان مجموعه رئوس سوخته شده در طول دوره زمانی در نظر بگیرید.

6- محاسبه کنید $Z^{\hat{t}} = \sum_{t=1}^k Z^t$ به عنوان مجموع وزن کل رئوس حفظ شده در پایان دوره زمانی.

پایان

4- مثال عددی

گراف درخت T در شکل 1 را در نظر می‌گیریم. روند پیاده‌سازی الگوریتم ابتکاری برای مسأله آتش‌نشان در شکل 2 آورده شده است. همچنین تمامی مراحل الگوریتم حل این مسأله که در بخش قبل به آن اشاره شده است در جدول زیر خلاصه شده است:

t	X^t	V^t	Z^{t+1}	N^t
0	$\emptyset$	v_1	0	$\{v_2, v_3\}$
1	v_2	v_3	35	$\{v_5, v_6\}$
2	v_6	v_5	11	$\{v_9\}$
3	v_9	$\emptyset$	2	$\emptyset$
در پایان دوره‌های زمانی	$\{v_2, v_6, v_9\}$	$\{v_1, v_3, v_5\}$	48	$\emptyset$

5- نتیجه‌گیری

از آنجایی که مسأله آتش‌نشان روی گراف‌های کلی و درخت‌ها NP - درخت با حداکثر درجه سه، NP -کامل بود، لذا ما حالت خاصی از مسأله را مورد بررسی قرار دادیم. در این مقاله ابتدا به بررسی مسأله آتش روی گراف کلی پرداختیم، سپس مسأله را در حالتی که گراف دارای وزن مثبت است، بررسی کردیم و الگوریتمی برای مسأله آتش‌نشان روی درخت وزن‌دار با حداکثر درجه سه، که آتش در راس درجه دو شروع به انتشار می‌کند، ارائه کردیم. در نهایت به حل عددی الگوریتم با دو مثال متفاوت پرداختیم.

6- مراجع

- [1] Hartnell, B.: Firefighter! An application of domination. In: 20th Conference on Numerical Mathematics and Computing (1995)
- [2] Hartnell, B., Li, Q.: Firefighting on trees: How bad is the greedy algorithm? In: Proc. of the Thirty-first Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, pp. 187–192 (2000)
- [3] MacGillivray, G., Wang, P.: On the firefighter problem. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 47, 83–96 (2003)
- [4] King, A., MacGillivray, G.: The firefighter problem for cubic graphs. Discrete Mathematics 310(3), 614–621 (2010)
- [5] S. Finbow, A. King, G. MacGillivray and R. Rizzi, The firefighter problem for graphs of maximum degree three, Discrete Mathematics 307(16) (2007) 2094–2105.

