روش برنامه‌ریزی مورد انتظار برای حل بازی ماتریسی چندهدفی در محیط عدم قطعیت

حمید بیگدلی[1]، جواد طیبی

[1]استادیار، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا؛ hamidbigdeli92@gmail.com
[2]استادیار، دانشگاه صنعتی بیرجند؛ javadtayyebi@birjandut.ac.ir

چکیده

در این مقاله بازی ماتریسی (بازی مجموع صفر دو نفره) در شرایط پیچیده و مبهم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بسیاری از مسائل دنیای واقعی بازیکنان در رقابت با یکدیگر چندین هدف را مد نظر قرار داده و به دنبال رسیدن به تمامی اهداف به صورت همزمان هستند. از طرفی در ارائه عایدی‌های بازیکنان همواره عدم قطعیت وجود دارد. در این مقاله برای بیان تعارض بین بازیکنان از نظریه بازی و برای مدل‌سازی اهداف باریکنان از بهینه‌سازی چند هدفی و همچنین برای بیان عدم قطعیت از نظریه عدم قطعیت استفاده می‌شود. پس از تشریح مدل مسأله، یک روش حل این مسائل ارائه می‌شود. در نهایت یک مثال کاربردی بیان شده و به کمک روش پیشنهادی حل می‌گردد.

کلمات کلیدی: بازی ماتریسی، عدم قطعیت، بهینه‌سازی چندهدفی

1- مقدمه

مسائلی که در آن‌ها تصمیم یک فرد وابسته به تصمیم فرد یا افراد دیگر باشد، اغلب با استفاده از نظریه بازی مدل‌سازی می‌شود. محبوبیت نظریه بازی در میان رشته‌های مختلف از جمله علوم نظامی، اقتصاد، زیست شناسی، علوم سیاسی، علوم رایانه، مهندسی برق، کسب و کار، حقوق و سیاست عمومی در حال افزایش است. مسایل نظریه بازی به دو دسته مهم طبقه‌بندی می‌شوند: بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه. بازی‌های غیرهمکارانه به بازی‌هایی اطلاق می‌شود که بین بازیکنان هیچ‌گونه همکاری وجود ندارد. البته در برخی موارد ممکن است همکاری جزیی صورت گیرد ولی در نهایت بازیکنان راهبرد خود را بدون همکاری انتخاب می‌کنند. بازی‌های غیرهمکارانه شامل دو نوع بازی مجموع صفر و مجموع ناصفر است که بازی‌های مجموع صفر دو نفره بحث اصلی این مقاله می‌باشد. بازی‌های مجموع صفر به عنوان بازی‌های ماتریسی نیز گفته می‌شوند. زیرا برای هر بازیکن یک ماتریس عایدی تعریف می‌شود که این مقادیر از مقایسه راهبردهای دو بازیکن به دست می‌آید.

در دنیای واقعی مسائل تصمیم‌گیری در شرایط پیچیده و مبهم رخ می‌دهد، به این صورت که ممکن است بازیکنان چندین هدف را به صورت همزمان مدنظر داشته باشند و اطلاعات دقیقی از راهبردها و پیامدهای بازی نداشته باشند. در مدل‌سازی بازی از قضاوت کارشناسان خبره در برآورد عایدی‌های بازیکنان برای هر پیامد بازی استفاده می‌شود. در کاربردهای جهان واقعی، برآورد مقادیر عایدی به دلیل فهم مبهم کارشناسان و اطلاعات نادقیق آن‌ها، میسر نیست. روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی این عدم قطعیت‌ها معرفی شده است. نظریه فازی و نظریه خاکستری از این موارد هستند (مراجع [1] و [2] و [3] را مشاهده کنید). در این مقاله برای رفع مشکل اول از بهینه‌سازی چندهدفی استفاده شده است و برای مدل‌سازی عدم قطعیت اطلاعات نظریه عدم قطعیت ارائه شده توسط لیو [5] به کار گرفته شده است. در این زمینه ژائو [4] بازی‌های دوماتریسی در محیط عدم قطعیت را مورد بررسی قرار داده و روش محاسبه نقطه تعادل بازیکنان را ارائه داد. مولا و همکارانش [6] بازی‌های ماتریسی تک‌هدفی را از طریق آنتروپی مورد مطالعه قرار دادند.

در این مقاله، مدل بازی ماتریسی با چند هدف مورد بررسی قرار گرفته است. عایدی‌های بازیکنان به صورت متغیرهای غیرقطعی نمایش داده شده است. به کمک مقدار مورد انتظار تعریف شده برای عایدی‌های غیرقطعی دو مسأله برنامه‌ریزی چندهدفی پیشنهاد می‌شود که با

حل این مسائل راهکارهای بهینه بازیکنان به دست می‌آید.

2- مفاهیم مقدماتی نظریه عدم قطعیت

مطالب مربوط به این بخش از مرجع [5] مرور می‌شود.

فرض کنید Γ یک مجموعه ناتهی بوده و L یک σ-جبر روی Γ باشد. اگر Γ شمارش‌پذیر باشد، L مجموعه توانی Γ است. اگر Γ شمارش‌ناپذیر باشد (مانند $\Gamma=[0,1]$)، L جبر بورل است. هر عنصر L یک پیشامد نامیده می‌شود. هر تابع از L به $[0,1]$ را اندازه غیرقطعی نامند. تابع M روی L را یک تابع اندازه‌پذیر غیرقطعی گویند هرگاه در چهار اصل موضوعه زیر صدق کند:

1- (نرمال بودن) اندازه غیرقطعی مجموعه Γ برابر یک است، یعنی $M\{\Gamma\}=1$.

2- (خود دوگانی) برای هر پیشامد Λ، داریم $M\{\Lambda\}+M\{\Lambda^c\}=1$.

3- (زیرجمعی) برای هر دنباله شمارا از پیشامدهای $\{\Lambda_i\}$، $M\{¿i=1¿\infty \Lambda_i\}\le \sum_{i=1}^{\infty} M\{\Lambda_i\}$.

4- (یکنوایی) هرگاه $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ داریم $M\{\Lambda_1\}\le M\{\Lambda_2\}$.

سه‌تایی (Γ,L,M) یک فضای عدم قطعیت نامیده می‌شود. به منظور به‌دست آوردن یک اندازه غیرقطعی از پیشامدهای مرکب، اندازه غیرقطعی حاصلضربی به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنید (Γ_k,L_k,M_k) فضاهای عدم قطعیت به ازای $K=1,2,\ldots$ باشند، در نظر بگیرید $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots$ و $L=L_1\times L_2\times\ldots$؛ اندازه غیرقطعی حاصلضربی روی σ-جبر ضربی L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M\{\prod_{k=1}^{\infty}\Lambda_k\}=\bigwedge_{k=1}^{\infty} M_k\{\Lambda_k\}=\min_k M_k\{\Lambda_k\}$$

یک متغیر غیرقطعی، یک تابع اندازه‌پذیر ξ از یک فضای عدم قطعیت (Γ,L,M) به R است. در عمل به منظور شرح یک متغیر غیر قطعی، مفهوم توزیع عدم قطعیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x)=M\{\xi\le x\}\ \forall x\in R$$

به عنوان نمونه تابع زیگزاگ $Z(a,b,c)$ یک تابع عدم قطعیت است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0 & x\le a \\ \dfrac{x-a}{2(b-a)} & a\le x\le b \\ \dfrac{x+c-2b}{2(c-b)} & b\le x\le c \\ 1 & x\ge c \end{cases}$$

که در آن a,b,c اعداد حقیقی و $a<b<c$ می‌باشد.

یکی از مفاهیم اصلی در نظریه عدم قطعیت مفهوم امید ریاضی یک متغیر غیرقطعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[\xi]=\int_0^{\infty} M\{\xi\ge r\}dr-\int_{-\infty}^{0} M\{\xi\le r\}dr$$

که در آن باید حداقل یکی از انتگرال‌ها متناهی باشد. به راحتی امید ریاضی متغیر

غیرقطعی زیگزاگ $Z(a,b,c)$ به صورت $\frac{a+2b+c}{4}$ به دست می‌آید.

اگر ξ و η دو متغیر غیرقطعی مستقل با مقادیر موردانتظار متناهی باشند، به ازای اعداد حقیقی a و b داریم $E[a\xi+b\eta]=aE[\xi]+bE[\eta]$.

یک روش رتبه‌بندی متغیرهای غیرقطعی را می‌توان به کمک مقادیر موردانتظار آن‌ها به صورت زیر بیان کرد:

$$\xi \geq \eta \Longleftrightarrow E(\xi) \geq E(\eta)$$

3- بازی ماتریسی چندهدفی با عایدی‌های غیرقطعی

در این بخش بازی ماتریسی چندهدفی را با عایدی‌های غیرقطعی در نظر می‌گیریم. فرض کنید هر بازیکن p هدف داشته باشد. ماتریس‌های عایدی غیرقطعی چندگانه زیر نمایش دهنده بازی چندهدفی با عایدی‌های غیرقطعی هستند:

$$\xi^1=\begin{bmatrix} \xi_{11}^1 & \cdots & \xi_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{m1}^1 & \cdots & \xi_{mn}^1 \end{bmatrix},\ldots,\xi^p=\begin{bmatrix} \xi_{11}^p & \cdots & \xi_{1n}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{m1}^p & \cdots & \xi_{mn}^p \end{bmatrix}$$

که در آن ξ^k ماتریس عایدی هدف kام بازی برای بازیکن 1 و $-\xi^k$ ماتریس عایدی بازیکن 2 خواهد بود. یعنی عایدی‌های بازیکن 2 قرینه بازیکن 1 است. بنابراین این نوع بازی کاملا رقابتی است زیرا آنچه یک بازیکن به دست می‌آورد به همان میزان توسط بازیکن 2 از دست می‌رود. این بازی‌ها را مجموع صفر نامند. زیرا مجموع عایدی‌های بازیکنان برای هر خروجی بازی برابر صفر است. فضاهای راهبرد آمیخته برای بازیکنان 1 و 2 به صورت زیر می‌باشد.

$$X=\left\{x \in R^m \middle| \sum_{i=1}^{m} x_i=1, x_i \geq 0\right\},$$

$$Y=\left\{y \in R^n \middle| \sum_{j=1}^{n} y_j=1, y_j \geq 0\right\}.$$

برای حل این بازی ماتریسی با عایدی‌های غیرقطعی از امید ریاضی متغیرهای غیرقطعی تعریف شده در بخش قبل استفاده می‌کنیم. با این کار مسئله‌ی بازی چندهدفی با عایدی‌های غیرقطعی به مسئله‌ی بازی چندهدفی با عایدی‌های قطعی تبدیل می‌شود. اکنون با انتخاب راهبردهای $x \in X$ و $y \in Y$ به ترتیب توسط بازیکنان 1 و 2، امید ریاضی عایدی مورد انتظار بازی به صورت زیر می‌باشد:

$$v(x,y)=E\left(x^T \xi y\right)=\left[v^1(x,y),\ldots,v^p(x,y)\right]$$

که در آن $\xi=\left[\xi^1,\ldots,\xi^p\right]$ و

$$v^k(x,y)=E\left(x^T \xi^k y\right), k=1,\ldots,p$$

بازیکن 1 (بیشینه کننده) باید راهبرد خود را چنان انتخاب کند که بیشترین عایدی را در مقابل هر راهبرد $y \in Y$ از بازیکن 2 (کمینه کننده) کسب کند. بازیکن 2 نیز به طریق مشابه عمل خواهد کرد. بنابراین با توجه به این رفتار منطقی، سطح امنیت هر بازیکن را بدترین مقدار سود دریافتی آن بازیکن با انتخاب هر راهبردی از سوی بازیکن دیگر تعریف می‌کنیم. سطوح امنیتی برای بازیکنان 1و 2 با توجه به تابع هدف kام به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌ش

(1) $$\underline{V}^k(x)=\min_{y \in Y} v^k(x,y), k=1,\ldots,p,$$

(2)

$$\overline{V}^k(y)=\max_{x\in X} v^k(x,y), k=1,\dots,p,$$

برای هر راهبرد $x\in X$، k امین سطح امنیت بازیکن 1 با رابطه‌ی (1) نشان داده می‌شود که یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفی است. سطوح امنیتی دو بازیکن، p تایی‌هایی به صورت زیر هستند:

$$\underline{V}(x)=(\underline{V}^1(x),\dots,\underline{V}^p(x))$$
$$\overline{V}(y)=(\overline{V}^1(y),\dots,\overline{V}^p(y))$$

مفهوم فوق اجازه می‌دهد که بازی‌های ماتریسی چندهدفی را تحت منطق بدترین حالت رفتار حریف تحلیل کنیم. بازیکن 1 باید راهبرد x خود را طوری انتخاب کند که سطوح امنیتی بازی بیشینه شود. بنابراین بازیکن 1 با مسئله برنامه‌ریزی ریاضی زیر مواجه می‌شود:

$$\max_{x\in X}\underline{V}(x)$$

یا به طور معادل

$$\max\left(\min_{y\in Y} v^1(x,y),\dots,\min_{y\in Y} v^p(x,y)¿¿\right)$$
$$s.t$$
$$\sum_{i=1}^m x_i=1 \qquad (3)$$
$$x_i\geq 0, i=1,\dots,m$$

با استفاده از شیوه تبدیل مسائل مینیماکس به مسائل خطی، مسئله (3) به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$\max(\underline{v}^1,\dots,\underline{v}^p)$$
$$s.t\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m x_i E¿¿¿$$
$$\vdots$$
$$\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m x_i E¿¿¿$$
$$\sum_{i=1}^m x_i=1 \qquad (4)$$
$$x_i\geq 0, i=1,\dots,m$$

مسئله (4) یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفی است که هر عنصر $y\in Y$ متناظر با دقیقا p محدودیت می‌باشد. بنابراین مسئله شامل تعداد نامتناهی محدودیت است. مجموعه نقاط راسی Y یعنی $S=\{(1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$ را در نظر بگیرید.

به وضوح محدودیت های متناظر با عناصر $y\in S$ به صورت زیرند:

$$\sum_{i=1}^m E(\xi_{ij}^1)x_i\geq\underline{v}^1, j=1,\dots,n$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^m E(\xi_{ij}^p)x_i\geq\underline{v}^p, j=1,\dots,n$$

از طرف دیگر، محدودیت‌های باقی مانده یعنی محدودیت‌های متناظر با $Y\setminus S$ زایدند. زیرا $\geq$

تحت ترکیبات محدب حفظ می‌شود و در نتیجه هر یک از محدودیت‌ها می‌توانند به صورت یک ترکیب محدب از محدودیت‌های فوق بازنویسی شوند. بنابراین مسئله (4) با مسئله زیر معادل است که تعداد متناهی محدودیت دارد:

$$\begin{aligned}
&\max\left(\underline{v}^1,\ldots,\underline{v}^p\right)\\
&s.t\sum_{i=1}^{m} E\left(\xi_{ij}^1\right)x_i \geq \underline{v}^1,\ j=1,\ldots,n\\
&\vdots\\
&\sum_{i=1}^{m} E\left(\xi_{ij}^p\right)x_i \geq \underline{v}^p,\ j=1,\ldots,n\\
&\sum_{i=1}^{m} x_i=1\\
&x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m
\end{aligned} \qquad (5)$$

برای حل مسئله‌ی (5)، روش‌های مختلفی در بهینه‌سازی چندهدفی پیشنهاد شده است. در اینجا از روش مجموع وزنی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max\sum_{k=1}^{p} w_k \underline{v}^k\\
&s.t\sum_{i=1}^{m} E\left(\xi_{ij}^1\right)x_i \geq \underline{v}^1,\ j=1,\ldots,n\\
&\vdots\\
&\sum_{i=1}^{m} E\left(\xi_{ij}^p\right)x_i \geq \underline{v}^p,\ j=1,\ldots,n\\
&\sum_{i=1}^{m} x_i=1\\
&x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m
\end{aligned} \qquad (6)$$

که در آن $w\in W=\left\{w\in R^p \,\middle|\, w\geq 0,\sum_{k=1}^{p} w_k=1\right\}$. مدل برنامه‌ریزی (6) را برنامه‌ریزی مورد انتظار بازیکن 1 می‌نامیم.

مولفه w_k از بردار $w=\left(w_1,\ldots,w_p\right)\in W$ را می‌توان به عنوان اهمیت نسبی تابع هدف k ام برای بازیکن 1 تعبیر کرد. با حل این مسئله، راهبردهای بهینه‌ی پارتو $x^{¿}=\left(x_1^{¿},\ldots,x_m^{¿}\right)$ و ارزش بازی $\underline{v}^{¿}$ بازیکن 1 به دست می‌آیند.

به طور مشابه می‌توان ارزش بازیکن 2 و راهبردهای بهینه‌ی پارتوی متناظر را از حل مدل برنامه‌ریزی مورد انتظار زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
&\min\sum_{k=1}^{p} w_k \overline{v}^k\\
&s.t\sum_{j=1}^{n} E\left(\xi_{ij}^1\right)y_j \geq \overline{v}^1,\ i=1,\ldots,\mathrm{m}\\
&\vdots\\
&\sum_{j=1}^{n} E\left(\xi_{ij}^p\right)y_j \geq \overline{v}^p,\ i=1,\ldots,m
\end{aligned} \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$
$$y_j \ge 0 , j = 1, \ldots , n$$

قضیه1: جواب‌های بهینه به دست آمده از مسائل (6) و (7) به ترتیب راهبردهای بهینه پارتوی بازیکنان 1 و 2 می‌باشند.

اثبات: با توجه به تعریف ارائه شده برای ترتیب دو متغیر غیرقطعی و قضایای موجود در روش مجموع وزنی بهینه‌سازی چندهدفی اثبات کامل می‌شود.

4- مثال عددی

دو شرکت 1 و 2 را با هدف ارتقای میزان فروش و سهم بازار یک محصول در بازار هدف در نظر بگیرید. فرض کنید میزان تقاضای محصول در بازار هدف ثابت باشد. به عبارت دیگر با افزایش میزان فروش و سهم بازار یک شرکت، میزان فروش و سهم بازار شرکت دیگر کاهش می‌یابد. دو شرکت دو رویکرد متفاوت برای رسیدن به اهداف خود دارند. راهبرد اول کاهش قیمت و راهبرد دوم انجام تبلیغات است. این مسأله را می‌توان به صورت یک بازی ماتریسی دو هدفی در نظر گرفت. استفاده از هر راهبردی نیاز به هزینه دارد که منجر به اعمال محدودیت‌هایی می‌شود. به دلیل نداشتن اطلاعات کافی مدیران قادر نیستند تا میزان فروش و سهم بازار را به طور دقیق مشخص کنند. برای کنترل این عدم قطعیت از متغیرهای غیرقطعی زیگزاگ استفاده شده است.

$$\xi^1 = \begin{bmatrix} Z(175,180,190) & Z(150,156,158) \\ Z(80,90,100) & Z(175,180,190) \end{bmatrix},$$
$$\xi^2 = \begin{bmatrix} Z(125,130,135) & Z(120,130,135) \\ Z(120,130,135) & Z(150,160,170) \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن اهمیت یکسان برای دو هدف و نوشتن مسأله (6) برای شرکت اول داریم:

$$max \frac{1}{2} \underline{v}^1 + \frac{1}{2} \underline{v}^2$$
$$181.25 x_1 + 90 x_2 \ge \underline{v}^1$$
$$155 x_1 + 181.25 x_2 \ge \underline{v}^1$$
$$130 x_1 + 128.75 x_2 \ge \underline{v}^2$$
$$128.75 x_1 + 160 x_2 \ge \underline{v}^2$$
$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

به کمک نرم‌افزار لینگو راهبردهای بهینه و ارزش بازی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x^{\text{¿}} = \left(x_1^{\text{¿}} , x_2^{\text{¿}} \right) = (0.78,0.22) , \underline{v}^{1*\text{¿}=160.86 , \underline{v}^{2*\text{¿}=129.72\text{¿}}\text{¿}}$$

این جواب به این معنی است که شرکت 1 با انتخاب راهبرد اولش حدود 78% شانس رسیدن به اهداف خود را دارد.

به طور مشابه برای شرکت دوم با فرموله کردن رابطه (7) داریم:

$$y^{\text{¿}} = \left(y_1^{\text{¿}} , y_2^{\text{¿}} \right) = (0.96,0.04) , \overline{v}^{1*\text{¿}=180.24 , \overline{v}^{2*\text{¿}=129.95\text{¿}}\text{¿}}$$

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله مسائل بازی ماتریسی چندهدفی در شرایط عدم قطعیت مورد بررسی قرار گرفت. سطوح امنیت بازیکنان در این نوع مسائل تشریح شد و راهبردهای بهینه پارتوی بازیکنان معرفی شد. پس از تشریح مدل بازی، یک روش حل این نوع بازی‌ها با

استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی مورد انتظار ارائه شد. برای اعتبار روش یک مثال عددی با عایدی‌هایی از متغیرهای غیرقطعی زیگزاگی مورد بحث قرار گرفت. در کارهای آتی می‌توان مدل بازی را با اعمال برخی محدودیت‌ها بر روی راهبردهای بازیکنان مورد مطالعه قرار داد.

6- مراجع

[1] Bigdeli H., Hassanpour H., Tayyebi J. “Constrained Bimatrix Games with Fuzzy Goals and its Application in Nuclear Negotiations”; Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization , 2018, 8, 81-110.

[2] Bigdeli, H.; Hassanpour, H.; Tayyebi, J. “Multiobjective Security Game with Fuzzy Payoffs”; IJFS; 2018, ():-doi:10.22111/ijfs.2018.3902.

[3] Bigdeli, H., Hassanpour, H. and Tayyebi, J. *A satisfactory strategy of multiobjective two person matrix games with fuzzy payoffs*, Iranian Journal of Fuzzy Systems Vol. 13, No. 4, (2016) pp. 17-33.

[4] Gao, J. (2007). Uncertain bimatrix game with applications. Fuzzy Optim Decis Making, DOI 10.1007/s10700-012-9145-6.

[5] Liu, B. (2007). Uncertainty theory (2nd ed.). Berlin: Springer.

[6] Mula, P., Sankar, K. R., Chandan, B., Matrix Game Under Uncertainty Theory via Entropy, International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology, Vol. 3 Issue 2, February 2016.