

کاربرد قانون قوی اعداد بزرگ در نظریه احتمال

نویسنده مسئول اول: محمد طاهری، آموزش و پرورش آبادان، گروه ریاضی، خوزستان، ایران

E-mail: taheri.mohamad96@yahoo.com

نویسنده دوم: فیض الله غلامی سوق، آموزش و پرورش دهدشت، گروه ریاضی، کهگیلویه و بویر احمد، ایران

E-mail: Baabak.nima@yahoo.com

چکیده

هدف از این مقاله اثبات نامساوی های مربوط به متغیرهای تصادفی با پراکندگی بزرگ و متغیرهای تصادفی هم توزیع بطوریکه در جای مناسب بریده شده باشند برخورد خواهیم کرد که در قانون قوی اعداد بزرگ یکی از مهمترین قوانین احتمال می باشد و به طور خلاصه ذکر می کند که میانگین نمونه به صورت تقریباً مطمئن (almost sure) به میانگین متغیرهای تصادفی میل می کند بیان شده است. اهمیت این مقاله نامساوی های مربوط به متغیرهای تصادفی بطور منفی وابسته تعمیم یافته (END) به کمک تابع مفصل اثبات می شوند و در جایگاه احتمال یک قدم برجسته و مهم می باشند.

کلمات کلیدی: وابسته منفی تعمیم یافته، کوتاه سازی، قانون قوی اعداد، تابع مفصل، مجموع جزئی

1 مقدمه:

قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی بطور منفی وابسته تعمیم یافته توسط افراد مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است که می توان به کارهای انجام شده توسط ابراهیمی و گوش (1981) و بلاک (1982)، ماتولا (1992) بینگام و نیلی سانی (2004) جراسیمو و بیک (2009) اشاره نمود

تعریف 1 (ابراهیمی، گوش (1981)) متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ (الف) وابسته منفی همراستای پایینی (LNOD) گفته می شوند هرگاه به ازای هر n و به ازای هر $x_1, \dots, x_n \in R$

$$P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} \leq \prod_{i=1}^n P\{X_i \leq x_i\}. \quad (1)$$

(ب) وابسته منفی همراستای بالایی (UNOD) گفته می شود هرگاه به ازای هر n و به ازای هر $x_1, \dots, x_n \in R$

$$P\{X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n\} \leq \prod_{i=1}^n P\{X_i > x_i\}. \quad (2)$$

(ج) وابسته منفی همراستا (NOD) گفته می شود هرگاه هم (1) و هم (2) برقرار باشند.

قضیه 1 فرض کنید $\{b_n: n \geq 1\}$ دنباله مثبتی از اعداد حقیقی غیرنزولی باشد. فرض کنید $\{X_n: n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی NOD با $EX_n = 0$ و $EX_n^2 < \infty$ باشد. همچنین فرض کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{b_n^2} < \infty. \quad (3)$$

در این صورت،

(الف) به ازای هر $0 < r < 2$ داریم $E_n^i \left(\left| S_n \right| / b_n \log n \right)^r < \infty$

(ب) $0 < b_n \uparrow \infty$ ایجاب می کند $S_n / b_n \log n \rightarrow 0$ a.s. که در آن $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ، $n \geq 1$.
برهان: (الف) توجه داشته باشید که به ازای هر $0 < r < 2$

$$E_n^i \left(\frac{|S_n|}{b_n \log n} \right)^r < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} P \left\{ \frac{|S_n|}{b_n \log n} > t^{\frac{1}{r}} \right\} dt < \infty.$$

بنا به رابطه (3) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} P \left\{ \frac{|S_n|}{b_n \log n} > t^{\frac{1}{r}} \right\} dt &\leq 64 \int_1^{\infty} t^{\frac{-2}{r}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-2} ((\log n / \log 3) + 2)^2 \\ &\times \left(\sum_{j=m+1}^n \frac{EX_j^2}{b_j^2} + \sum_{j=1}^m \frac{EX_j^2}{b_m^2} \right) dt \\ &\leq 64 \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-2} ((\log n / \log 3) + 2)^2 \times \left(\sum_{j=m+1}^n \frac{EX_j^2}{b_j^2} + \sum_{j=1}^m \frac{EX_j^2}{b_m^2} \right) \int t^{\frac{-2}{r}} dt < \infty. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات (الف) کامل می شود.

(ب) بنا به رابطه 3 داریم

$$\begin{aligned} &P \left\{ \max_{m \leq k \leq n} \left| \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{b_k} \right| \geq \varepsilon \log n \right\} \\ &\leq 32 \varepsilon^{-2} (\log n)^{-2} ((\log n / \log 3) + 2)^2 \left(\sum_{j=m+1}^n \frac{EX_j^2}{b_j^2} + \sum_{j=1}^m \frac{EX_j^2}{b_m^2} \right). \end{aligned}$$

اما

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{\left| \sum_{i=1}^n X_i \right|}{b_n} \geq \varepsilon \log n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \max_{m \leq k \leq n} \left| \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{b_k} \right| \geq \varepsilon \log n \right\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 32 \varepsilon^{-2} (\log n)^{-2} ((\log n / \log 3) + 2)^2 \end{aligned}$$

$$\times \left(\sum_{j=m+1}^n \frac{EX_j^2}{b_j^2} + \sum_{j=1}^m \frac{EX_j^2}{b_m^2} \right). (4)$$

بنا به رابطه (3) نتیجه می شود که

$$\sum_{j=1}^m \frac{EX_j^2}{b_m^2} \rightarrow 0; n \rightarrow \infty (5)$$

بنابراین، با ترکیب (3) - (5) خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{b_k} \right| \geq \varepsilon \log n \right\} = 0, (6)$$

که اثبات (ب) از قضیه 1 را کامل می کند

2. لم ها

فرض کنید متغیرهای تصادفی، $X_k, k=1, \dots, n$ توزیع های $F_k, k=1, \dots, n$ و

$$C(u_1, \dots, u_n): [0, 1]^n \mapsto [0, 1]$$

مفصل آنها باشد که بر اساس قضیه "اسکلار" به ازای تمام مقادیر $k=1, \dots, n$ ، X_k باشد و داشته باشیم:

$$Pr(k=1 \leq X_k \leq x_k) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). (7)$$

فرض کنید F توزیعی با مختصات $(-\infty, \infty)$ باشد. تابع های کمکی $\int_{\delta}^{\pm}$ را برای ثابت های دلخواه $\delta > 0$ مشخص نمایید:

$$\int_{\delta}^{\pm}(x) = x^{-\delta} \int_{|y| \leq x} |y|^{1+\delta} F(dy)$$

$$x^{-\delta} \int_{0 \leq y \leq x} y^{1+\delta} F(dy) + x^{-\delta} \int_{-x \leq y \leq 0} (-y)^{1+\delta} F(dy)$$

$$+ \int_{\delta}^{-\delta(x), x > 0, \delta} \dots$$

وجود این تابع های کمکی برای ایجاد نامساوی های اصلی ما و برای احتمالات دُمی حاصل جمع های متغیرهای تصادفی END ضروری می باشد

لم 1: به ازای توابع کمکی تعریف شده $f_{\delta}^{\pm}$ در هنگامی که $x \rightarrow \infty$ داریم:

الف) اگر $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_{\delta}^{+} (x) = 0$ **آنگاه** $\Pr(X > x) \rightarrow 0$

ب) اگر $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_{\delta}^{-} (x) = 0$ **آنگاه** $\Pr(X < -x) \rightarrow 0$

پ) اگر $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_{\delta}^{+} (x) = f_{\delta}^{-} (x) = 0$ **آنگاه** $\Pr(|X| > x) \rightarrow 0$

اثبات الف : بنابر قضیه "فوبینی"

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} y^{1+\delta} F(dy) = 0$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x^{-\delta} (1+\delta) \int_0^x \left(\int_0^y z^{\delta} dz \right) F(dy)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x^{-\delta} (1+\delta) \int_0^x \int_z^x z^{\delta} F(dy) dz$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x^{-\delta} (1+\delta) \int_0^x z^{\delta} \left(\int_z^x F(dy) \right) dz$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x^{-\delta} (1+\delta) \int_0^x z^{\delta} [F(x) - F(z)] dz$$

$$\leq x^{-\delta} (1+\delta) \int_0^x z^{\delta} [1 - F(z)] dz$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x^{-\delta} (1+\delta) \int_0^x z^{\delta} \bar{F}(z) dz$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} x^{-\delta} (1+\delta) \left[\int_0^{x_0} z^{\delta} \bar{F}(z) dz + \int_{x_0}^x z^{\delta} \bar{F}(z) dz \right]$$

$$\leq x^{-\delta} (1+\delta) \left[\int_0^{x_0} z^{\delta} \bar{F}(z) dz + \int_{x_0}^x z^{\delta} \bar{F}\left(\frac{\varepsilon}{z}\right) dz \right]$$

$$\leq x^{-\delta} (1+\delta) \left[\int_0^{x_0} z^{\delta} \bar{F}(z) dz + x \int_{x_0}^x z^{\delta-1} dz \right]$$

$$\begin{aligned} & \leq x^{-\delta}(1+\delta)\left[\int_0^{x_0} z^{\delta} \overline{F}(z) d z+\varepsilon \frac{1}{\delta}\left[x^{\delta}-z_0^{\delta}\right]\right] \\ & \leq x^{-\delta}(1+\delta)\left[\int_0^{x_0} z^{\delta} \overline{F}(z) d z+\frac{\varepsilon}{\delta} x^{\delta}\right] \\ & \leq \frac{(1+\delta)}{x^{\delta}} \int_0^{x_0} z^{\delta} \overline{F}(z) d z+\varepsilon \frac{(1+\delta)}{\delta} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & +\frac{(1+\delta)}{x^{\delta}} \int_0^{x_0} z^{\delta} \overline{F}(z) d z+\varepsilon \frac{(1+\delta)}{\delta} \\ & \int_{\delta}^{\infty} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\varepsilon \rightarrow 0$ و $x \rightarrow +\infty$ در نتیجه

$$f_{\delta}^{+}(x) \rightarrow 0 \text { as } x \rightarrow +\infty$$

اثبات (ب)

$$\begin{aligned} & -\frac{(1+\delta)}{x^{-\delta}} \int_{-x \leq y \leq 0}(-y)^{1+\delta} F(d y) \\ & \int_{\delta}^{\infty} \end{aligned}$$

$$\leq x^{-\delta}(1+\delta) \int_{-x \leq y \leq 0}\left(\int_0^{-y} z^{\delta} d z\right) F(d y)$$

$$\leq x^{-\delta} \int_x^0 u^{1+\delta} F(-d u)$$

$$\leq-x^{-\delta} \int_x^0 u^{1+\delta} F(-d u)$$

$$\leq x^{-\delta}(1+\delta)(-1) \int_0^x t^{\delta} \int_t^x F(-d u) d t$$

$$\mathfrak{I} x^{-\delta}(1+\delta)(-1)\left(\int_0^x t^{\delta} \int_{-t}^{-x} F(dy)\right) dt$$

$$\mathfrak{I} x^{-\delta}(1+\delta)(-1)\left[\int_0^x t^{\delta}\left[F(-x)-F(-t)\right]\right] dt$$

$$\mathfrak{I} \frac{(1+\delta)}{x^{\delta}} \int_0^{x_0} t^{\delta}\left[F(-x)-F(-t)\right] dt$$

$$\mathfrak{I} \frac{(1+\delta)}{x^{\delta}} \int_0^{-x}(-s)^{\delta}\left[F(s)-F(x)\right](-1) ds$$

$$\mathfrak{I} \frac{(1+\delta)}{x^{\delta}} \int_{-x}^0(-s)^{\delta}\left[F(s)-F(x)\right] ds$$

$$\leq \frac{(1+\delta)}{x^{\delta}} \int_{-x}^0(-S)^{\delta} F(S) ds$$

$$\leq \frac{(1+\delta)}{x^\delta} \int_0^x t^\delta F(-t) dt$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{(1+\delta)}{x^\delta} \left[\int_0^{x_0} t^\delta F(-t) dt + \int_{z_0}^x t^\delta F(-t) dt \right]$$

$$\leq \frac{(1+\delta)}{x^\delta} \left[\int_0^{z_0} t^\delta F(-t) dt + \int_{z_0}^x t^\delta \frac{\varepsilon}{t} dt \right]$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{(1+\delta)}{x^\delta} \left[\int_0^{z_0} t^\delta F(-t) dt + \varepsilon \left[\frac{t^\delta}{\delta} \right]_{z_0}^x \right]$$

$$\textcolor{red}{i} \frac{(1+\delta)}{x^\delta} \left[\int_0^{z_0} t^\delta F(-t) dt + \varepsilon \left[\frac{x^\delta - Z_0^\delta}{\delta} \right] \right]$$

$$\leq \frac{(1+\delta)}{x^\delta} \left[\int_0^{z_0} t^\delta F(-t) dt + \varepsilon \frac{x^\delta}{\delta} \right]$$

$$\frac{(1+\delta)}{x^\delta} \int_0^{z_0} t^\delta F(-t) dt + \frac{\delta+1}{\delta} \varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$$

(اثبات پ)

$$xPr(|X| > x) = xPr(X > x) + xPr(X < -x)$$

با توجه به اینکه $xPr(X > x) \rightarrow 0$ و $xPr(X < -x) \rightarrow 0$ در نتیجه

$$f_\delta^{-} \rightarrow 0 \text{ و } f_\delta^{+} \rightarrow 0$$

منبع

Bingham, N. H.; Nili Sani, H. R. Summability methods and negatively associated random variables. Stochastic methods and their applications. J. Appl. Probab. 41A (2004), 231.238.

Chen, Y.; Yuen, K. C.; Ng, K. W. Precise large deviations of random sums in presence of negative dependence and consistent variation. Methodol. Comput. Appl. Probab. (2010), to appear.

Ebrahimi, N.; Ghosh, M. Multivariate negative dependence. Comm. Statist. A. Theory Methods 10 (1981), no. 4, 307.337.

Gan, S., 1997, The Hájek-Rényi inequality for Banach space valued random variables and its application, Wuhan Uni. J. Natural Sci. 2, 13-18

Gan, S., 1997, The Hájek-Rényi inequality for Banach space valued martingales and the p-smoothness of Banach space, Statist. Probab. Lett. 32, 245-248

Hájek-Rényi , A.,1955,Generalization of an inequality of Kolmogorov. Acta.Math. Acad .Sci .Hungar. 6281-283

Gerasimov, M. Yu. The strong law of large numbers for pairwise negatively dependent random variables. Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet. 33 (2009), no. 2, 51.58.

1. Models and applications. Second edition. Wiley-Interscience, New York, 2000.

Liu, L. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails. Statist. Probab. Lett. 79 (2009), no. 9, 1290.1298.

Matuśa, P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables. Statist. Probab. Lett. 15 (1992), no. 3, 209.213.

Nelsen, R. B. An Introduction to Copulas. Second edition. Springer, New York, 2006.