



tech.sdcongress.ir

هشتمین همایش بین‌المللی
علوم و تکنولوژی
با رویکرد توسعه پایدار
8th International Conference on
Science & Technology with sustainable development approach



(روش کلی موجک هار در حل عددی مسائل اشتروم-لیوویل)

عبدالرضا مومنی¹، دکتر کاظم نوری²، دکتر لیلا ترک زاده³

1- دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان

2- عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان

3- عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان

چکیده

معادلات دیفرانسیل کاربردهای زیادی در علوم مهندسی دارند. با این حال روشهای تحلیلی که برای حل این معادلات وجود دارند اغلب پیچیده و دشوار هستند. الگوریتم های محدودی نیز برای حل عددی این معادلات پیشنهاد شده اند. در حل معادلات دیفرانسیل، از مزایای مهم روش موجک هار، سادگی و هزینه محاسباتی خیلی کم آن است، چرا که ماتریس تبدیل هار، ماتریسی تُنک است.

همچنین مزیت دیگر هم تعداد کم و قابل توجه ضرایب موجک است و لذا استفاده از آن خیلی آسان بوده و هزینه های محاسباتی را بسیار پایینی می آورد. در این پژوهش به یک تحلیل و بررسی مسائل اشتروم-لیوویل به روش موجک های هار (بخش مراجع [5-1]) پرداخته می شود و یک روش کارا و مؤثر برای حل این معادله پیشنهاد شده و نتایج حاصل از این روش با جوابهای دقیق و یا واقعی، مقایسه می شود تا دقت و کارایی روش موجک هار برای حل اینگونه از معادلات نشان داده شود. معادلات دیفرانسیل فیزیکی مثل معادله هلمهولتز و مسائل اشتروم-لیوویل مورد توجه بسیاری از ریاضی دانان و فیزیک دانان بوده است. این قبیل معادلات در بسیاری از مقالات علمی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است (بخش مراجع [6-12]). در اینجا هم یک روش مؤثر و کارا برای حل اینگونه از معادلات دیفرانسیل ارائه شده است و نتایج حاصل از آنها نیز به کمک موجک هار و حتی موجکهای دیگر مثل موجک لژاندر و موجک چیشف با هم قابل مقایسه است.

واژه‌های کلیدی: موجک، موجک هار، هار، معادلات دیفرانسیل، حل عددی، اشتروم-لیوویل.

1- مقدمه و تعاریف

امروزه مطالعات زیادی برای گسترش روشهای جبری انجام می پذیرد که معادلات دیفرانسیل را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهد، تا الگوریتم های مناسبی برای حل آنها ارائه شود. بیشتر این تلاشها بر پایه چندجمله ایها و توابع متعامد بنا شده اند. این روشهای عملیاتی براساس توابع والش، توابع بلاک پالس، چندجمله ایهای لاگر، چندجمله ایهای لژاندر، چندجمله ایهای چبیشف، سری تیلور، سری فوریه و موجک ها انجام شده است. موجک ها در ادامه تحقیقات فوریه مربوط به سیگنالها که به طور همزمان قادر به نگهداری اطلاعات مربوط به زمان و فرکانس نبودند وارد عرصه علم شدند. موجک ها دارای انواع متعددی از جمله هار، لژاندر، چبیشف، هرمیت، لاگر و ... هستند. موجک هار اولین و ساده ترین آنها است. دقت بسیار بالای روش موجک و بویژه جوابهای موجک هار حتی در حالاتی که تعداد نقاط گرهی و یا شبکه ای کم است، همواره مورد توجه بوده است.

تبدیل موجک (Wavelet Transform) یکی از تبدیلات مهم ریاضی است که در حوزه های مختلف علوم کاربرد دارد. ایده اصلی تبدیل موجک این است که بر ضعف ها و محدودیت های موجود در تبدیل فوریه غلبه کند. این تبدیل را بر خلاف تبدیل فوریه، می توان در مورد سیگنال های غیر ایستا و سیستم های دینامیک نیز مورد استفاده قرار داد. به دست آوردن جواب های

1. abdalrezamomeni@yahoo.com, a_momeni@semnan.ac.ir

2. knouri@semnan.ac.ir, knouri.h@gmail.com

3. torkzadeh@semnan.ac.ir



tech.sdcongress.ir



کلاسیک معادلات دیفرانسیل همیشه امکان پذیر نبوده است و در خیلی موارد نیز تقریباً غیر ممکن بوده است. بنابراین برای حل اکثر معادلات دیفرانسیل باید از روش های تقریبی استفاده کرد. اولین فایده موجکها به وسیله دانشمندی به نام آلفرد هار عرضه شد؛ او علاقمند به یافتن پایه ای شبیه به پایه تبدیلات فوریه در فضای گسسته برای هرفضای تابعی بود. در فیزیک موجکها، در توصیف حرکت براونی مورد استفاده واقع می شوند. انجام این کار منجر به پیدایش تعدادی نظریه گردید که در ساختن پایه موجک، مورد استفاده واقع شدند؛ موجکها همچنین در تحلیل و توصیف حالات همسانی سیستم کوانتوم ویژه مفیدند؛ و بالاخره دانشمندی به نام استفان. مالات کشف کرد که در میدان انتشار سیگنالها، بانکهای فیلتر دارای ارتباطات بسیار مهمی با توابع پایه ای موجک هستند. همچنین استفاده مستقیم از شرایط مرزی و اولیه در نوشتن بسط ها در روش موجکها و بویژه موجک هار و این که این شرایط مرزی به طور خودکار مورد توجه قرار می گیرند، سبب میشود که این روش در مقایسه با روشهای کلاسیک دیگر، کاملاً رقابتی و کارآمد باشد.

روش موجک هار، به صورت آبرازی خیلی کارا و مؤثر در حل عددی کلیه معادلات دیفرانسیل ظاهر شده است. همچنین توانایی انواع موجکهای دیگر (از جمله موجک لژاندار و چیشف و لاگر) نیز در حل عددی انواع معادلات دیفرانسیل پدیدار گشته است. در این تحقیق به بررسی و تحلیل مسائل اشتروم-لیوویل به کمک روش موجک هار پرداخته می شود.

تعریف: پایه خانواده موجک هار یکنواخت^۴ برای هر $t \in [A, B]$ ، و هر $i \geq 1$ ، به صورت زیر تعریف شده است:

$$h_1(t) = 1; A \leq t \leq B, h_i(t) = \begin{cases} 1 & ; \forall t \in [\xi_1, \xi_2) \\ -1 & ; \forall t \in [\xi_2, \xi_3) \\ 0 & \text{ElseWhere} \end{cases} \text{ for } i \geq 2 \quad (1-1)$$

که در اینجا داریم:

$$\xi_1 = A + (B - A) \frac{k}{m}, \xi_2 = A + (B - A) \frac{k+0.5}{m}, \xi_3 = A + (B - A) \frac{k+1}{m}$$

که در اینجا عدد صحیح $m = 2^j; (j = 0, 1, 2, \dots, J)$ نشان دهنده سطحی از موجک است و $k = 0, 1, \dots, m - 1$ نیز پارامتر انتقال است. عدد صحیح J نیز، تعیین کننده اتساع به اندازه 2^J می باشد که اصطلاحاً آن را میزان ظرافت نیز می نامند؛ اندیس i در رابطه فوق بر طبق فرمول $i = m + k + 1$ محاسبه می شود، در حالت مقادیر مینیمال $k = 0, m = 1$ داریم: $i = 2$ ؛ به عبارت دیگر می نیمم مقدار i ؛ یعنی 2 به ازای $k = 0, m = 1$ ، است. همچنین $i = 2M = 2^{J+1}$ مقدار ماکزیمم i می باشد.

همچنین فرض می شود که مقدار $i = 1$ با تابع مقیاس $h_1 \equiv 1$ در بازه $[0, 1]$ متناظر است، که تابع مشخصه نامیده شده و به این صورت تعریف می شود:

$$h_1(t) = \chi_{[0,1]} = \begin{cases} 1 & \forall t \in [0, 1) \\ 0 & \text{else where} \end{cases}$$

که همان تابع مشخصه می باشد. حال با فرض انتگرالگیری از موجکهای هار در رابطه $(1-1)$ داریم:

$$q_i(t) = \int_0^t h_i(t) dt$$

پس اگر داشته باشیم: $Q(i, l) = q_i(t_l)$ ، آنگاه در این صورت، ماتریس $2M$ بعدی P ، به طوری که:

$$Q = PH$$

را ماتریس عملگر انتگرالگیری می نامیم که چن و هسینو در بخش مرجع [5,6] معرفی کردند.

آنها نشان دادند که برای محاسبهٔ چنین ماتریسی از مرتبهٔ μ ، معادلهٔ ماتریسی زیر برقرار است:

$$P_{\mu} = \begin{bmatrix} P_{0.5\mu} & -\frac{1}{2\mu}H_{0.5\mu} \\ \frac{1}{2\mu}H_{0.5\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف: پایهٔ خانوادهٔ موجکهای هار غیر یکنواخت t_i ام⁵ را برای هر $x \in [A, B]$ و هر $i \geq 1$ به شکل زیر است:

$$h_1(x) = 1, h_i(x) = \begin{cases} 1 & ; \forall x \in [\xi_1(i), \xi_2(i)] \\ -c_i & ; \forall x \in [\xi_2(i), \xi_3(i)] \\ 0 & \text{ElseWhere} \end{cases} \quad \text{for } i \geq 2$$

به طوری که در اینجا داریم:

$$\begin{cases} \xi_1(i) = x(k\mu) \\ \xi_2(i) = x[(k+0.5)\mu] ; c_i = \frac{\xi_2(i)-\xi_1(i)}{\xi_3(i)-\xi_2(i)}, \mu = M/m \\ \xi_3(i) = x[(k+1)\mu] \end{cases}$$

و لذا:

$$\begin{cases} \xi_1(i) = x_{2k\mu} = A + \Delta x \left(\frac{\frac{kM}{m} - 1}{q-1} \right), \\ \xi_2(i) = x_{(2k+0/5)\mu} = A + \Delta x \left(\frac{\frac{(k+0.5)M}{m} - 1}{q-1} \right), \\ \xi_3(i) = x_{(2k+1)\mu} = A + \Delta x \left(\frac{\frac{(k+1)M}{m} - 1}{q-1} \right). \end{cases}$$

در اینجا همانطور که دیده می شود اگر حد q به یک میل کند، آنگاه پایهٔ موجک هار یکنواخت به دست می آید.

به بیان دیگر با قرار دادن $q = 1 \pm \varepsilon$ ، نتایج عددی برای حالت موجک هار یکنواخت حاصل می شود. پس با تغییر مقدار q در حل برخی از معادلات می توان نتایجی با دقت و خطاهای بهتری گرفت.

از جمله خصوصیات شیوهٔ موجک هار، چند رزولوشن و یا چند سطحی بودن این روش است که به ما این امکان را می دهد که با تغییر دادن مقادیر J ، خطای حاصله را بهبود ببخشیم و آن را به کمترین مقدار ممکن برسانیم. زیرا که در روش موجک هار، دیگر خطای ناشی از قطع کردن که در روش تفاضلات متناهی است را نداریم و لذا تعداد جمله های بسط موجک هار بستگی به مقدار J دارد و این خطا حتی برای نقاط گرهی (یا نقاط شبکه ای) نیز بسیار پائین است که این خود نشان دهندهٔ دقت خیلی زیاد روش موجک هار است.

حال در اینجا بازهٔ $[0,1]$ را به $2M$ زیر بازه که طول هریک از آنها برابر $\Delta t = \frac{1}{2M}$ می باشد، تقسیم کرده و سپس چون از روش هم محلی استفاده می شود، لذا نقاط شبکه ای را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\tau_l = \tau(l) = \frac{l-1}{2M} ; l = 1, 2, \dots, 2M \quad (2-1)$$

به علت این که معادلات دیفرانسیل بحث شده در این پژوهش، به روش هم محلی حل شده اند، لذا این نقاط هم محلی را به صورت زیر نیز تعریف می شوند:

$$t_l = t(l) = \frac{l-0.5}{2M} = x_l = x(l) ; l = 1, 2, \dots, 2M \quad (3-1)$$



tech.sdcongress.ir

هشتمین همایش بین المللی
علوم و تکنولوژی
با رویکرد توسعه پایدار
8th International Conference on
Science & Technology with sustainable development approach



چن و هسیائو⁶، ماتریس مربعی $2M$ بعدی H را که ماتریس هار نام دارد، با درایه های زیر معرفی کردند:

$$H(i, l) = h_i(t(l)) = h_i(t_i)$$

در این پژوهش در ابتدا، روش کلی موجک های هار، مورد بحث و بررسی قرار می گیرد. بازده یا کارایی مناسب و عملی بودن آن نیز بر روی دو مسأله تحلیل مدار بررسی می شود و سپس نتایج به دست آمده از آن با جوابهای دقیق این مسئله، مقایسه می شوند. در حل معادلات دیفرانسیل سخت یا زُخت نیز کارایی این روش، نشان دهنده اعتبار و کاربرد فن شیوه موجک هار می باشد.

تعریف: موجکهای هار سطح سوم^۷

عبارات ریاضی برای موجک پدر (تابع هار سه سطحی) و موجکهای مادر برای خانواده موجک هار سه سطحی با سه فاکتور اتساع به این صورتند:

توابع هار یک خانواده متعامد موجهای مستطیلی شکل آند که می توانند متفاوت از هر تابع دیگر باشند. این تابع ها بر $[A, B]$ ، به صورت زیر تعریف می شوند:

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & ; A \leq t < B \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \text{ (Haar scaling function)}$$
$$h_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} -1 & ; z_1(i) \leq t < z_2(i) \\ 2 & ; z_2(i) \leq t < z_3(i) \\ -1 & ; z_3(i) \leq t < z_4(i) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \text{ for } i = 2, 4, \dots, 3m - 1,$$
$$h_3(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} +1 & ; z_1(i) \leq t < z_2(i) \\ 0 & ; z_2(i) \leq t < z_3(i) \\ -1 & ; z_3(i) \leq t < z_4(i) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \text{ for } i = 3, 5, \dots, 3m$$

که در اینجا داریم:

$$\begin{cases} z_1(i) = A + L \frac{k}{m}, \\ z_2(i) = A + L \frac{k+1/3}{m}, \\ z_3(i) = A + L \frac{k+2/3}{m}, \\ z_4(i) = A + L \frac{k+1}{m}. \end{cases}, L = B - A$$

که در اینجا اعداد صحیح $(j = 0, 1, \dots, J - 1)$ ؛ $m = 3^j$ ، نشان دهنده هر سطحی از موجک است. همچنین اگر ماکسیمم سطح ظرافت را با J نشان داده و بازه $[A, B]$ را به $M = 3^J$ زیربازه با طول یکسان تقسیم کنیم، آنگاه در این صورت طول هر کدام از این زیربازه ها برابر است با:

$$\Delta x = \frac{L}{M} = \frac{B-A}{M}$$

همچنین در اینجا هر عدد صحیح $k = 0, 1, \dots, m - 1$ ، نشان دهنده پارامتر انتقالند. هر آندیس i نیز بر طبق فرمول زیر حساب می شود:

$$\begin{cases} i = m + 2k + 1; & i \text{ even} \\ i = m + 2k + 2; & i \text{ odd} \end{cases}$$

همچنین بر طبق فرمول انتگرال ریمنان - لیوویل نیز داریم:

$$p_{a,i}(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_A^t h_i(x)(t-x)^{a-1} dx \quad \forall 0 \leq a < m, i = 1, 2, 3, \dots, 3m, m = 1, 2, 3, \dots$$

و بالاخره با محاسبه انتگرال معادلات بالا، خواهیم داشت:

$$p_{a,i}(t) = \frac{t^a}{\Gamma(a+1)} \text{ for } i = 1$$

و برای مقادیر $i = 2, 4, 6, 8, \dots, 3m - 1$ نیز داریم:

$$p_{a,i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } A \leq t \leq z_1(i) \\ \frac{-1}{\Gamma(a+1)}(t-z_1(i))^a & \text{for } z_1(i) \leq t \leq z_2(i) \\ \frac{1}{\Gamma(a+1)}[-(t-z_1(i))^a + 3(t-z_2(i))^a] & \text{for } z_2(i) \leq t \leq z_3(i) \\ \frac{1}{\Gamma(a+1)}[-(t-z_1(i))^a + 3(t-z_2(i))^a - 3(t-z_3(i))^a] & \text{for } z_3(i) \leq t \leq z_4(i) \\ \frac{1}{\Gamma(a+1)}[-(t-z_1(i))^a + 3(t-z_2(i))^a - 3(t-z_3(i))^a + (t-z_4(i))^a] & \text{for } z_4(i) \leq t \leq B \end{cases}$$

و نیز برای مقادیر $i = 3, 5, 7, 9, \dots, 3m$ هم داریم:

$$p_{a,i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } A \leq t \leq z_1(i) \\ \frac{1}{\Gamma(a+1)}(t-z_1(i))^a & \text{for } z_1(i) \leq t \leq z_2(i) \\ \frac{1}{\Gamma(a+1)}[(t-z_1(i))^a - (t-z_2(i))^a] & \text{for } z_2(i) \leq t \leq z_3(i) \\ \frac{1}{\Gamma(a+1)}[(t-z_1(i))^a - (t-z_2(i))^a - (t-z_3(i))^a] & \text{for } z_3(i) \leq t \leq z_4(i) \\ \frac{1}{\Gamma(a+1)}[(t-z_1(i))^a - (t-z_2(i))^a - (t-z_3(i))^a + (t-z_4(i))^a] & \text{for } z_4(i) \leq t \leq B \end{cases}$$

موجک های هار، خانواده ای متعامد از توابع موجی-مستطیلی هستند که روی بازه $[0,1]$ تعریف می شوند.

در اینجا لازم به تذکر است که تفاوت اصلی که موجکهای هار با مقیاس 3 را بهتر و متمایزتر از موجکهای هار سطح 2 می سازد در این است که در موجک هار با مقیاس 2، فقط یک موجک مادر مسئول ساخت کل خانواده موجک است حال آنکه در موجکهای هار با سطح 3، دو موجک مادر و با دو شکل مختلف، مسئول ساخت کل خانواده موجک هار سه سطحی اند و لذا بر طبق این واقعیت، در استفاده از موجک هار با مقیاس 3، نرخ همگرایی جواب افزایش پیدا می کند.

تحلیل همگرایی

تعریف: ضرب داخلی موجکهای هار به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_0^1 h_i(t)h_j(t) dt = 2^{-j} \delta_{ij} = \begin{cases} 2^{-j} = \frac{1}{2^j} & ; \text{if } i = j = 2^j + k + 1, 0 \leq j \leq J-1, 0 \leq k < 2^j \\ 0 & ; \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (4-1)$$

لم (1-1):

هر تابع انتگرال پذیر $f(t)$ در بازه $[0,1]$ را میتوان بر حسب یک سری هار با عبارتهای متناهی به شکل زیر، بسط و گسترش داد:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(t) ; t \in [0,1], i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, a_i = \langle g(t), h_i(t) \rangle = 2^j \int_0^1 f(t)h_i(t) dt ; i = 1, 2, \dots, M.$$

به قسمی که در اینجا ضرایب a_i به صورت زیر تعیین می شوند:

$$i = m + k + 1 = 2^j + k + 1 \geq 2 ; 0 \leq j \leq J-1, 0 \leq k < 2^j$$

و نیز به طوری که انتگرال مربع خطای زیر، مینیمم باشد:

$$\epsilon = \int_0^1 [f(t) - \sum_{i=1}^M a_i h_i(t)]^2 dt ; M = 2^J, J \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

قضیه (1-2): به فرض اینکه $\sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(t)$ ، یک سری هار تابع $f(t) \in \mathcal{H} = L^2([0,1])$ باشد، آنگاه در اینصورت:

عبارت $f_M(t) = \sum_{i=1}^M a_i h_i(t)$ وقتی که $M \rightarrow \infty$ ، همگرا به تابع $f(t)$ است.

برهان: در ابتدا با استفاده از رابطه (4-1)، می توان نوشت:

$$a_1 = \int_0^1 f(t) dt = , a_i = \frac{\langle f(t), h_i(t) \rangle}{1/m} = m \langle f(t), h_i(t) \rangle = 2^j \int_0^1 f(t)h_i(t) ; i = 2, 3, \dots, M$$

که در اینجا دنباله مجموعهای جزئی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(t)$ و $f_M(t)$ ، یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت \mathcal{H} است. پس با فرض آنکه $f_M(t)$

یک مجموع جزئی دلخواه باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i(t), i. e., f_N(t) = \sum_{i=1}^N a_i h_i(t)$$

و لذا برای هر $M > N$ نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|f_M(t) - f_N(t)\|^2 &= \|\sum_{i=N+1}^M a_i h_i(t)\|^2 = \langle \sum_{i=N+1}^M a_i h_i(t), \sum_{l=N+1}^M a_l h_l(t) \rangle \\ &= \sum_{i=N+1}^M \sum_{l=N+1}^M a_i \bar{a}_l \langle h_i(t), h_l(t) \rangle = \sum_{i=N+1}^M \frac{1}{m} |a_i|^2 < \sum_{i=N+1}^M |a_i|^2 \end{aligned}$$

و اکنون با استفاده از نامساوی بسل، می توانیم بنویسیم:

$$\sum_{i=N+1}^M |a_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \leq \|f(t)\|^2 < \infty$$

پس بنابراین: $\|f_M(t) - f_N(t)\|^2 \rightarrow 0$ ، هنگامی که: $M, N \rightarrow \infty$ ؛ به عبارت دیگر این به مفهوم آن است که دنباله

$f_M(t)$ ، یک دنباله کوشی بوده و لذا این دنباله همگرا به $g \in \mathcal{H}$ است.

و سرانجام نشان می دهیم که: $f(t) = g(t)$ ؛ برای این منظور، به کمک رابطه (4-1) و نیز با استفاده از خاصیت ضرب

داخلی موجکهای هار، می توان نوشت:

$$\langle g(t) - f(t), h_i(t) \rangle = \langle g(t), h_i(t) \rangle - \langle f(t), h_i(t) \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \langle f_M(t), h_i(t) \rangle - a_i = a_i - a_i = 0$$

و لذا حکم قضیه ثابت می شود.

2- تحلیل و بررسی مسائل اشتروم-لیوویل⁸ با متغیر زمان با کمک شیوه کلی موجک هار

موجک هار دارای یک نقطه ضعف اساسی است و آن این است موجک هار پیوسته نیست و لذا به همین دلیل عدم پیوستگی، و در نتیجه آن، عدم وجود مشتقات در نقاط ناپیوستگی، به کار بردن موجک هار بطور مستقیم برای حل معادلات دیفرانسیل ممکن و مقذور نیست.

به طور کلی اگر بالاترین مرتبه مشتقات ظاهر شده در معادله را با $y^n(t)$ نشان دهیم، آنگاه به دلیل همین عدم پیوستگی موجک هار، پس می توان بسط موجک هار این معادله را از بالاترین مرتبه معادله، به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = C_i H \\ y^{(n-1)}(t) = C_i P H + y_0^{(n-1)} E_M \\ y^{(n-2)}(t) = C_i P^2 H + y_0^{(n-1)} T + y_0^{(n-2)} E_M \\ \vdots \\ y(t) = C_i P^n H + y_0^{(n-1)} T^{n-1} + y_0^{(n-2)} T^{n-2} + \dots + y_0' T + y_0 E_M \end{cases}$$

که در اینجا $T = \{t_i\}_{i=1}^M$ بردار نقاط هم محلی و E_M نیز بردار واحد هم بعد با آن است.

ضمناً در اینجا توجه کنید که دقت و کارایی روش ما به کمک تابع های خطای زیر بر بازه $[0,1] = [A, B]$ ، برآورد و یا تخمین زده می شود:

$$\delta_i = \max_{1 \leq j \leq M} |ue_i(t_j) - u_i(t_j)|, \sigma_i = \frac{\|\delta_i\|_2}{M} = \frac{\|ue_i(t_j) - u_i(t_j)\|_2}{M}$$

$$s.t. t_j = A + (B - A) \frac{j-1/2}{M} = A + L \frac{j-0.5}{M} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

3- چند مثال عددی برای مسئله های اشتروم-لیوویل

مثال (3-1): معادله دیفرانسیل زیر موسوم به «معادله اشتروم-لیوویل» (از بخش مرجع [13]) را در نظر بگیرید:

$$f''(t) + \lambda_n f(t) = 0; f(0) = 0, f(1) = 1, t \in [0, t_f] = [0, L] = [0, 1] \quad (1-3)$$

به طوری که مقادیر ویژه و توابع ویژه نظیر این مسأله به ازای هر λ_n ، به صورت زیر است:

$$f_n(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n-1}t)}{\sin(\sqrt{\lambda_n-1})}; \lambda_n = n^2 + 1$$

و اینک برای پیدا کردن تقریب جواب برای معادله (3-1)، در ابتدا فرض می کنیم که $D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M$ و سپس با دو بار انتگرال گیری نسبت به t از رابطه اخیر داریم:

$$\begin{cases} D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M \\ Df(t) = f'(t) = c_M^T P H_M + f'(0) \\ f(t) = c_M^T P^2 H_M + Df(0)t + f(0) = c_M^T Q H_M + f'(0)t + f(0) \end{cases}$$

و حالا با جایگذاری روابط بالا در معادله (3-1)، خواهیم داشت:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f'(0)t + f(0)) = 0$$

و در نتیجه با در نظر گرفتن شرایط اولیه در این مسأله، داریم:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f_0' T + f_0 E_M) = 0$$

از معادله فوق، ضرایب موجک c_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب هار به ازای مقادیر مختلف λ_n به دست می

آید. مقایسه بین جواب روش موجک هار و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ و $n = 4$ ، در جدول

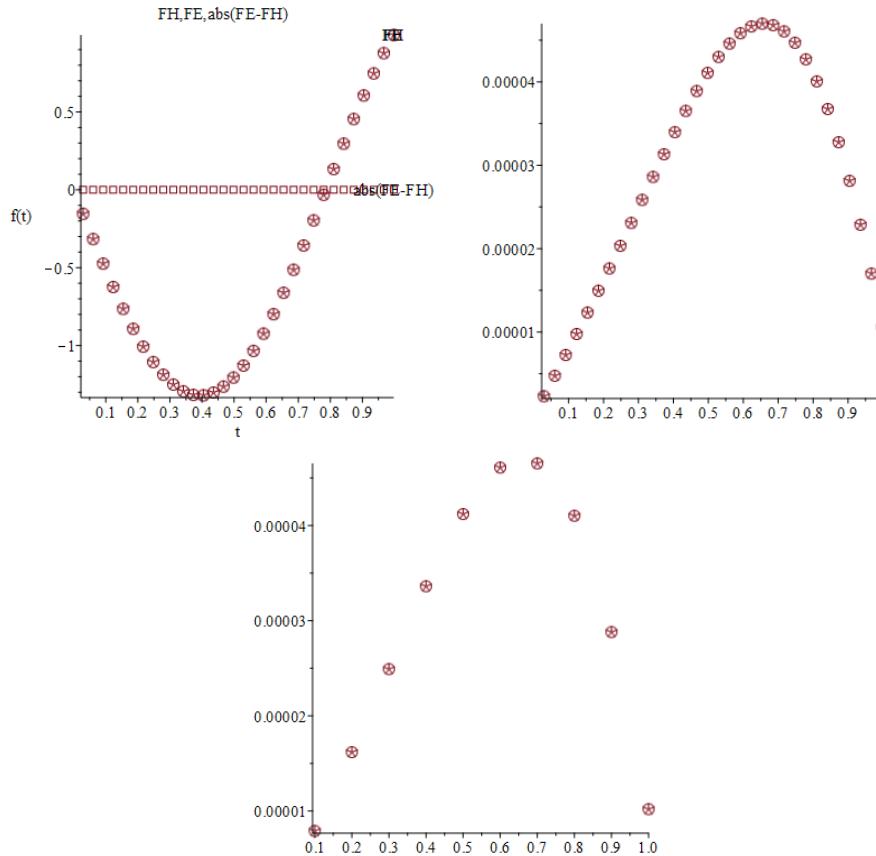
(3-1) و نیز در شکل (3-1) آورده شده است. نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد میکند که شیوه موجک هار تقریباً در

تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

⁸ Sturm-Liouville Problems

J	4	5	6	7	8	$J = 4$	$J = 5$
$M = 2^J$	16	32	64	128	256	$M = 3^J = 81$	$M = 3^J = 243$
δ_1	0.0121	0.00301	$7.5200e - 04$	$1.8800e - 04$	0.000047	0.00047	$5.2141e - 05$
σ_1	0.00625	0.0003125	$6.4100e - 05$	$1.7700e - 05$	0.0000036	0.000036	$4.1030e - 06$

جدول (1-3): مقایسه نتایج عددی بین جواب موجک های هار سطح دو و سه با جواب دقیق یا واقعی از برای مسئله اشتروم-لیوویل (1-3).



شکل (1-3): نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و همچنین نمایش خطا

در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$ ، برای مسئله اشتروم-لیوویل (1-3) با $J = 8$.

مثال (2-3): معادله دیفرانسیل زیر موسوم به «معادله اشتروم-لیوویل» (از بخش مرجع [13]) را در نظر بگیرید:

$$f''(t) + \lambda_n f(t) = 0; f(0) = f'(0) = 0, t \in [0, t_f] = [0, L] = [0, 1] \quad (2-3)$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه نظیر این مسأله به ازای هر λ_n ، به صورت زیر است:

$$f_n(t) = \sin(\sqrt{\lambda_n}t) + \cos(\sqrt{\lambda_n}t); \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$$

و اینک برای پیدا کردن تقریب جواب برای معادله (2-3)، در ابتدا فرض می‌کنیم که $D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M$ و سپس با دو بار انتگرال گیری نسبت به t از رابطه اخیر داریم:

$$\begin{cases} D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M \\ Df(t) = f'(t) = c_M^T P H_M + f'(0) \\ f(t) = c_M^T P^2 H_M + Df(0)t + f(0) = c_M^T Q H_M + f'(0)t + f(0) \end{cases}$$

و حالا با جایگذاری روابط بالا در معادله (2-3)، خواهیم داشت:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f'(0)t + f(0)) = 0$$

و در نتیجه با در نظر گرفتن شرایط اولیه در این مسأله، داریم:

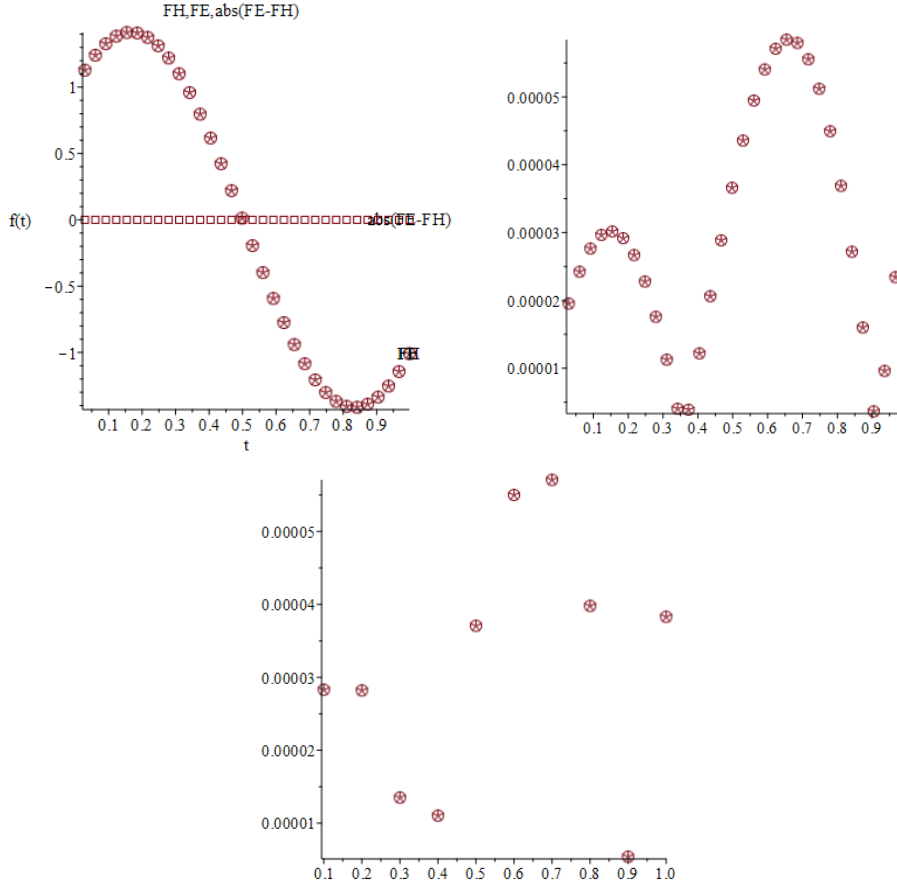
$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f'_0 T + f_0 E_M) = 0$$

از معادله فوق، ضرایب موجک c_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب‌ها را به ازای مقادیر مختلف λ_n به دست می‌آید.

مقایسه بین جواب روش موجک‌ها و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ و $n = 2$ ، در جدول (2-3) و نیز در شکل (2-3) آورده شده است. نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد میکند که شیوه موجک‌ها تقریباً در تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

J	4	5	6	7	8	$J = 4$	$J = 5$
$M = 2^J$	16	32	64	128	256	$M = 3^J = 81$	$M = 3^J = 243$
δ_1	0.0148	0.0037	$9.3510e - 04$	0.000234	$5.8500e - 05$	$5.8400e - 04$	$6.5000e - 05$
σ_1	0.00125	$3.1250e - 04$	$8.2410e - 05$	$7.8125e - 05$	$3.9063e - 06$	$1.2346e - 05$	$5.4000e - 06$

جدول (2-3): مقایسه نتایج عددی بین جواب موجک‌های هر سطح دو و سه با جواب دقیق یا واقعی از برای مسأله اشتروم-لیوویل (2-3).



شکل (3-2) : نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و همچنین نمایش خطا

در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$ ، برای مسئله اشتروم-لیوویل (3-2) با $J = 8$.

مثال (3-3): شکل دیگری از «مسئله اشتروم-لیوویل» (از بخش مرجع [13]) به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$f''(t) + \lambda_n f(t) = 0; f(0) = f(L) = 0, t \in [0, t_f] = [0, L] = [0, 1] \quad (3-3)$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه نظیر این مسأله به ازای هر λ_n ، به صورت زیر است:

$$f_n(t) = \sin(\sqrt{\lambda_n} t); \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

و حالا برای یافتن تقریب جواب برای معادله (3-3)، در ابتدا فرض می کنیم که $D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M$ و سپس با دو بار انتگرال گیری نسبت به t از رابطه اخیر داریم:

$$\begin{cases} D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M \\ Df(t) = f'(t) = c_M^T P H_M + f'(0) \\ f(t) = c_M^T P^2 H_M + Df(0)t + f(0) = c_M^T Q H_M + f'(0)t + f(0) \end{cases}$$

و اکنون با قرار دادن $t = 1$ در رابطه فوق داریم:

$$f(1) = c_M^T q H_M + f'(0)(1) + f(0) \text{ Implies that } f'(0) = f(1) - (c_M^T q H_M + f(0))$$

و حالا با جایگذاری روابط بالا در معادله (3-3)، خواهیم داشت:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f'(0)t + f(0)) = 0$$

و در نتیجه با در نظر گرفتن شرایط اولیه در این مسأله، داریم:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f_0' T + f_0 E_M) = 0$$

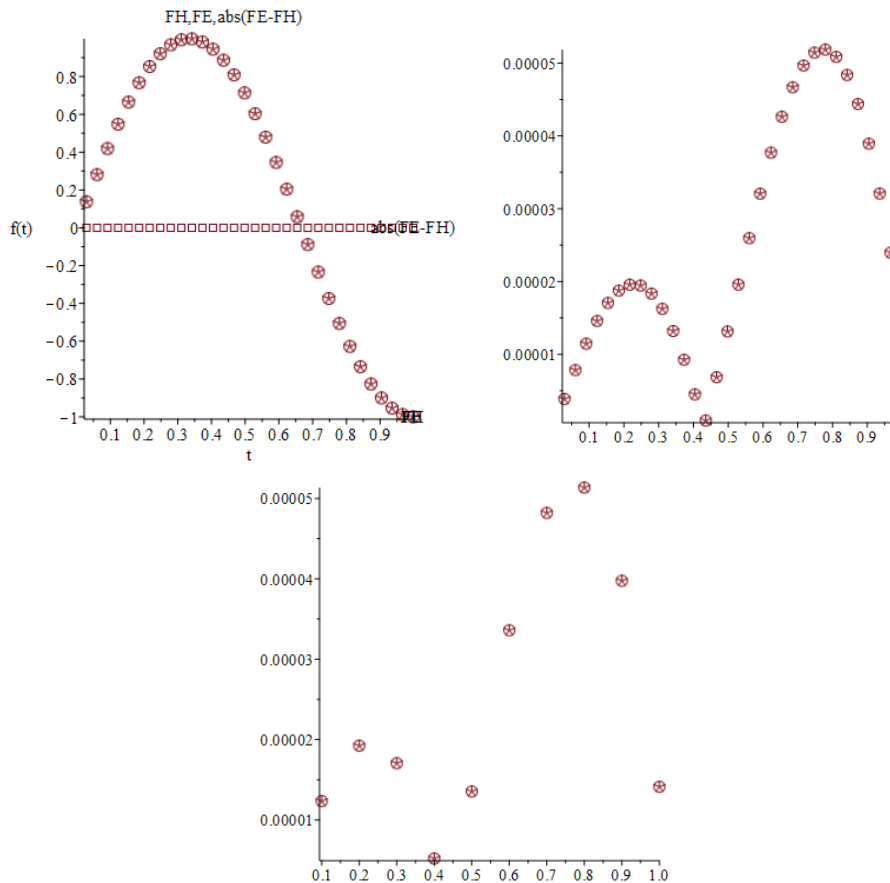
و یا:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + (f(1) - (c_M^T q H_M + f(0))) T + 1 E_{M_0}) = 0$$

از معادله فوق، ضرایب موجک c_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب هر به ازای مقادیر مختلف λ_n به دست می آید. مقایسه بین جواب روش موجک هر و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ و $n = \frac{3}{2}$ ، در جدول (3-3) و نیز در شکل (3-3) آورده شده است. نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد میکند که شیوه موجک هر تقریباً در تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

J	4	5	6	7	8	$J = 4$	$J = 5$
$M = 2^J$	16	32	64	128	256	$M = 3^J = 81$	$M = 3^J = 243$
δ_1	0.0131	0.0033	0.00083	$2.0750e - 04$	0.000052	0.000518	$5.7583e - 05$
σ_1	0.00125	$6.2500e - 04$	$3.1250e - 04$	$7.8125e - 05$	$7.8125e - 05$	0.000247	$1.6461e - 06$

جدول (3-3): مقایسه نتایج عددی بین جواب موجک های هر سطح دو و سه با جواب دقیق یا واقعی از برای مسأله اشتروم-لیوویل (3-3).



شکل (3-3): نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هر و جواب دقیق یا واقعی و همچنین نمایش خطا

در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$ ، برای مسئله اشتروم-لیوویل (3-3) با $J = 8$.

مثال (3-4): شکل دیگری از «مسأله اشتروم-لیوویل» (از بخش مرجع [13]) به صورت زیر را در نظر بگیرید:
 $f''(t) + \lambda_n f(t) = 0 ; f'(0) = f'(L) = 0, t \in [0, t_f] = [0, L] = [0, 1]$ (4-3)
 مقادیر ویژه و توابع ویژه نظیر این مسأله به ازای هر λ_n ، به صورت زیر است:

$f_n(t) = \cos(\sqrt{\lambda_n} t) ; \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2$
 و حالا برای یافتن تقریب جواب برای معادله (4-3)، در ابتدا فرض می کنیم که $D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M$ و سپس با دو بار انتگرال گیری نسبت به t از رابطه اخیر داریم:

$$\begin{cases} D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M \\ Df(t) = f'(t) = c_M^T P H_M + f'(0) \\ f(t) = c_M^T P^2 H_M + Df(0)t + f(0) = c_M^T Q H_M + f'(0)t + f(0) \end{cases}$$

و اکنون با قرار دادن $t = 1$ در رابطه فوق داریم:

$$f(1) = c_M^T q H_M + f'(0)(1) + f(0) = f(0) \text{ Implies that } f(0) = f(1) - (c_M^T q H_M + f'(0)) = f(1)$$

و یا:

$$c_M^T q H_M + f'(0) = 0$$

و نیز

$$f'(1) = c_M^T p H_M + f'(0) = f'(0) \text{ Implies that } c_M^T p H_M = 0$$

و حالا با جایگذاری روابط بالا در معادله (4-3)، خواهیم داشت:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f'(0)t + f(0)) = 0$$

و در نتیجه با در نظر گرفتن شرایط اولیه در این مسأله، داریم:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f'_0 T + f_0 E_M) = 0$$

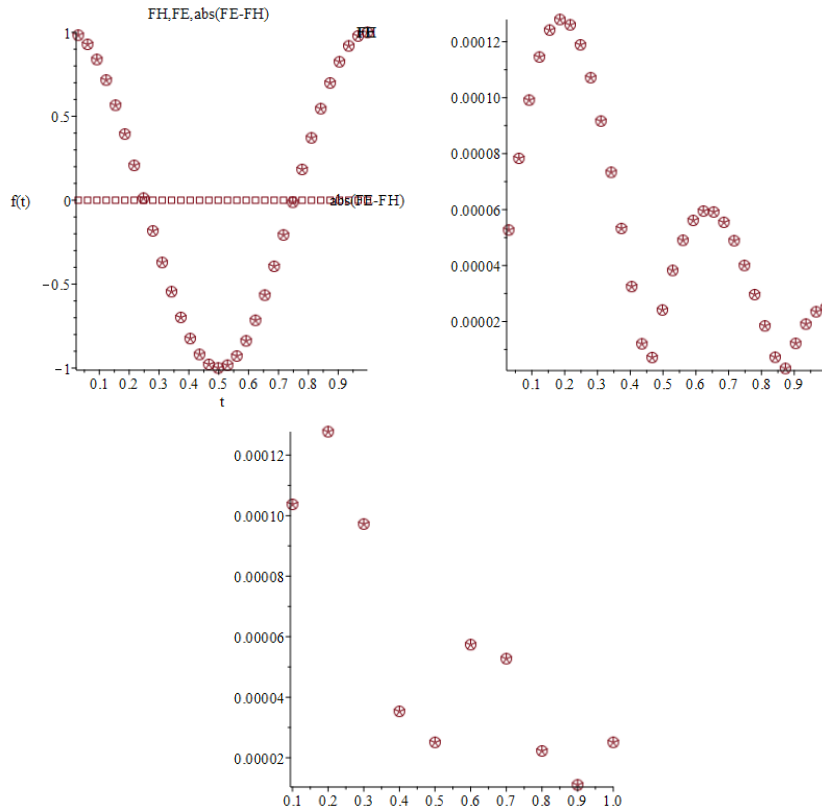
و یا:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + (f(1) - (c_M^T q H_M + f(0)))T + 1E_{M_0}) = 0$$

از معادله فوق، ضرایب موجک c_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب هر به ازای مقادیر مختلف λ_n به دست می آید. مقایسه بین جواب روش موجک هر و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ و $n = 1$ ، در جدول (4-3) و نیز در شکل (4-3) آورده شده است. نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد میکند که شیوه موجک هر تقریباً در تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

J	4	5	6	7	8	$J = 4$	$J = 5$
$M = 2^J$	16	32	64	128	256	$M = 3^J = 81$	$M = 3^J = 243$
δ_1	0.0314	0.00811	0.0020	0.000512	0.000128	0.0013	$1.4205e - 04$
σ_1	0.0025	0.000375	$1.5625e - 04$	$7.8125e - 05$	0.0000	$1.2346e - 04$	$4.1152e - 06$

جدول (4-3): مقایسه نتایج عددی بین جواب موجک های هر سطح دو و سه با جواب دقیق یا واقعی از برای مسأله اشتروم-لیوویل (4-3).



شکل (3-4): نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هار و همچنین نمایش خطا

در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$ ، برای مسئله اشتروم-لیوویل (3-4) با $J = 8$.

مثال (3-5): معادله دیفرانسیل زیر موسوم به «معادله اشتروم-لیوویل» (از بخش مرجع [13]) را در نظر بگیرید:

$$f''(t) + \lambda_n f(t) = 0; f(0) = 0, f'(1) = 2\pi, t \in [0, t_f] = [0, L] = [0, 1] \quad (5-3)$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه نظیر این مسأله به ازای هر λ_n ، به صورت زیر است:

$$f_n(t) = \sin(\sqrt{\lambda_n} t); \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$$

و اینک برای پیدا کردن تقریب جواب برای معادله (3-5)، در ابتدا فرض می کنیم که $D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M$ و سپس با دو بار انتگرال گیری نسبت به t از رابطه اخیر داریم:

$$\begin{cases} D^2 f(t) = f''(t) = c_M^T H_M \\ Df(t) = f'(t) = c_M^T P H_M + f'(0) & ; f(0) = 0, f'(1) = c_M^T P H_M + f'(0) = 2\pi \\ f(t) = c_M^T P^2 H_M + Df(0)t + f(0) = c_M^T Q H_M + f'(0)t + f(0) \end{cases}$$

و حالا با جایگذاری روابط بالا در معادله (3-5)، خواهیم داشت:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f'(0)t + f(0)) = 0$$

و در نتیجه با در نظر گرفتن شرایط اولیه در این مسأله، داریم:

$$c_M^T H_M + t_f^2 \lambda_n (c_M^T P^2 H_M + f'_0 T + f_0 E_M) = 0$$

از معادله فوق، ضرایب موجک c_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب هار به ازای مقادیر مختلف λ_n به دست می

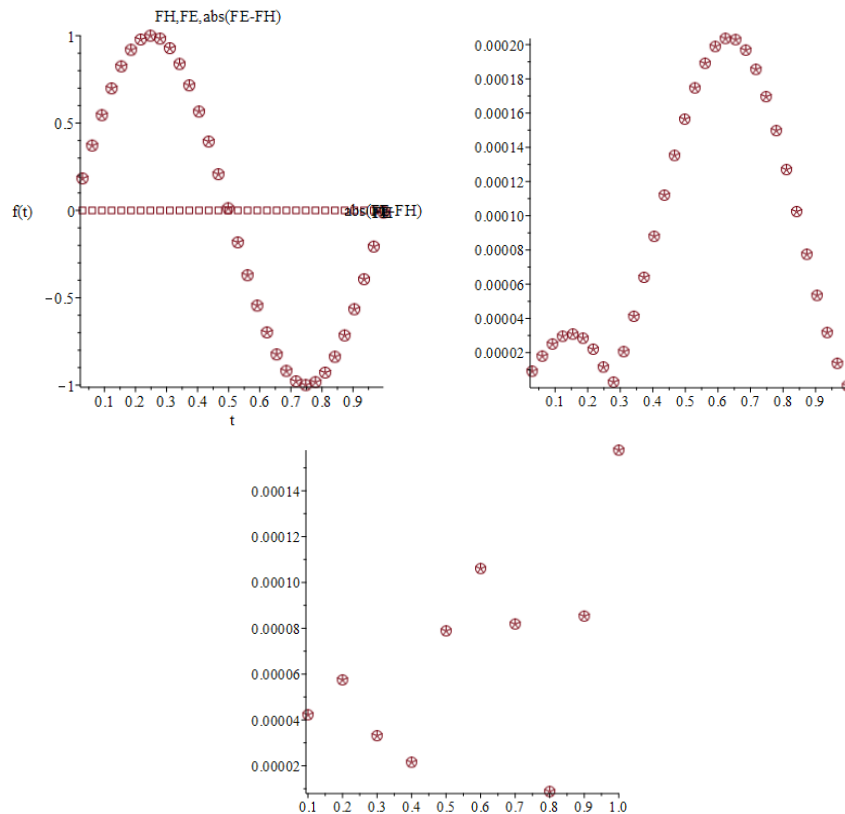
آید. مقایسه بین جواب روش موجک هار و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ و $n = \frac{5}{2}$ ، در جدول

(3-5) و نیز در شکل (3-5) آورده شده است.

نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد میکند که شیوه موجک هار تقریباً در تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

J	4	5	6	7	8	$J = 4$	$J = 5$
$M = 2^J$	16	32	64	128	256	$M = 3^J = 81$	$M = 3^J = 243$
δ_1	0.0348	0.0095	0.0025	0.000623	$1.5674e - 04$	0.0015	0.000174
σ_1	0.001875	0.000375	$1.5625e - 04$	$7.8125e - 05$	0.0000	0.000247	$8.2305e - 05$

جدول (3 - 5) : مقایسه نتایج عددی بین جواب موجک های هار سطح دو و سه با جواب دقیق یا واقعی از برای مسئله اشتروم-لیوویل (3 - 5) .



شکل (3 - 5) : نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و همچنین نمایش خطا

در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$ ، برای مسئله اشتروم-لیوویل (3 - 5) با $J = 8$.

4- استنباط و نتیجه گیری

در اینجا یک شیوه جدید برای حل عددی مسائل اشتروم-لیوویل بر اساس روش کلی موجک هار برای تحلیل و بررسی این معادله ارائه شد و نیز قابلیت، توانایی و تأثیر پذیری آن بر روی این قبیل از معادلات مورد تست و آزمون قرار گرفت. فواید اصلی روش موجکهای هار، نمایش تُنک، تبدیل سریع و امکان پیاده سازی الگوریتمهای سریع (به ویژه اگر ماتریس نمایش مورد استفاده قرار گرفته شده باشد)، است. به این دلیل، دقت جواب های به دست آمده، کاملاً بالا و رضایت بخش است، حتی اگر تعداد نقطه های هم محلی کم باشد. با اینحال، با افزایش دادن تعداد نقاط هم محلی، خطای جواب به سرعت کاهش می یابد. در اینجا نیز با کاربرد شیوه موجک هار در حل مسائل اشتروم-لیوویل، دقت و کارایی این روش در حل اینگونه از معادلات، به نمایش گذاشته شد.



تقدیر و تشکر:

از همفکری و همیاری و همچنین راهنمایی های جناب دکتر کاظم نوری و همچنین دکتر لیلا ترک زاده که در ارائه این پژوهش با من همکاری و هم فکری داشتند تشکر می کنم.

References:

- [1]. Lepik, Ülo. "Numerical solution of differential equations using Haar wavelets." Mathematics and computers in simulation 68.2 (2005): 127-143.
- [2]. Chen, Chi Fan, and Chi-Huang Hsiao. "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems." IEE Proceedings-Control Theory and Applications 144.1 (1997): 87-94.
- [3]. Chen, C. F., and C-H. Hsiao. "Wavelet approach to optimising dynamic systems." IEE Proceedings-Control Theory and Applications 146.2 (1999): 213-219.
- [4]. Hsiao, Chun-Hui, and Wen-June Wang. "State analysis and optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets." Optimal control applications and methods 19.6 (1998): 423-433.
- [5]. Mittal, R. C., and Sapna Pandit. "New scale-3 haar wavelets algorithm for numerical simulation of second order ordinary differential equations." Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences 89 (2019): 799-808.
- [6]. Hsiao, Chun-Hui, and Wen-June Wang. "Haar wavelet approach to nonlinear stiff systems." Mathematics and computers in simulation 57.6 (2001): 347-353.
- [7]. Kalpana, R., and S. Raja Balachandar. "Haar wavelet method for the analysis of transistor circuits." AEU-International Journal of Electronics and Communications 61.9 (2007): 589-594.
- [8]. Newcomb, R. "The semistate description of nonlinear time-variable circuits." IEEE Transactions on Circuits and Systems 28.1 (1981): 62-71.
- [9]. Shichman, Harold, and David A. Hodges. "Modeling and simulation of insulated-gate field-effect transistor switching circuits." IEEE Journal of Solid-State Circuits 3.3 (1968): 285-289.
- [10]. Ali, Haleema S. "Numerical Solution for Linear State Space Systems using Haar Wavelets Method." Baghdad Science Journal 19.1 (2022): 0084-0084.
- [11]. Liu, Xiangqian, and Lin Zhang. "Analysis of linear time varying systems via Haar Wavelet." Tsinghua Science and Technology 4.1 (1999): 1311-1313.
- [12]. Shiralashetti, S. C., M. H. Kantli, and A. B. Deshi. "New wavelet-Galerkin method for the numerical solution of Helmholtz equation." Palestine Journal of Mathematics 10.2 (2021).
- [13]. Lambers, Jim. "Properties of Sturm-Liouville Eigenfunctions and Eigenvalues.", MAT 606, Spring Semester 2015-16 (Lecture 20 Notes).

1. abdalrezamomeni@yahoo.com
2. knouri@semnan.ac.ir
3. torkzadeh@semnan.ac.ir