



حل برخی از مسائل درجه دوم صفر و یک با کمک شبکه عصبی دینامیکی مصنوعی و توابع NCP

سجاد عاکفی‌نیا^{1*}، هادی قربانی‌فر²، و امید باغانی³

^{1,2} گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

Akefinia@gmail.com

ghorbanifar.ghkm@gmail.com

omid.baghani@gmail.com

چکیده. در این مقاله به حل مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم صفر و یک با محدودیت‌های خطی پرداختیم. برای این منظور ابتدا مقدمه کوتاهی از شبکه‌های عصبی مصنوعی ارائه کرده‌ایم سپس مسئله مکمل غیرخطی را تعریف کرده و ویژگی‌های آن را بیان نموده‌ایم. برای حل مسئله مورد نظر، ابتدا مسئله را با استفاده از ارتباط برنامه‌های صحیح و غیرخطی به یک مسئله درجه دوم با محدودیت‌های غیرخطی تبدیل کرده سپس با کمک توابع مسئله مکمل غیرخطی آن را به یک مسئله بهینه‌ساز بدون محدودیت تبدیل کردیم. نشان داده شده که ماتریس هسین مرتبط با مسئله بهینه‌ساز بدون محدودیت، در نقطه بهینه، معین مثبت است. سرانجام با یک مدل عصبی دینامیکی که به مفهوم لیاپانوف پایدار است، به حل مسئله پرداختیم. در نهایت یک مثال عددی برای نشان دادن کارایی و سرعت این روش آوردیم.

۱. پیش‌گفتار

فلسفه اصلی شبکه عصبی مصنوعی، مدل کردن ویژگی‌های پردازشی مغز انسان برای تقریب زدن روش‌های معمول محاسباتی با روش پردازش زیستی است. به بیان دیگر، شبکه عصبی مصنوعی روشی است که دانش ارتباط بین چند مجموعه داده را از طریق آموزش فراگرفته و برای استفاده در موارد مشابه ذخیره می‌کند. شبکه عصبی برای حل NCP ها بر اساس فیشر-بوریمیستر عمومی در [۳] توسعه داده شده است. یک تابع NCP رایج تابع فیشر-بوریمیستر [۴، ۵] است. در [۲] یک خانواده از توابع NCP پیشنهاد می‌شود که تابع فیشر-بوریمیستر را به عنوان یک مورد خاص در نظر می‌گیرد. در این مقاله، مسئله برنامه‌ریزی صفر و یک درجه دوم را به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی بدون محدود با استفاده از تابع NCP و عملکرد مجاز، اصلاح می‌کنیم و سپس یک شبکه عصبی مصنوعی را معرفی می‌کنیم که می‌تواند این مسئله را حل کند.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. مسئله برنامه‌ریزی صفر و یک، شبکه عصبی مصنوعی، توابع NCP.

* سخنران

۲. مقدمه

در ابتدا می‌خواهیم بدانیم که مسئله مکمل غیرخطی یا به اختصار NCP چیست. مسئله مکمل غیرخطی (NCP) این است که یک نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ را پیدا کنیم به طوری که

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad \langle x, F(x) \rangle = 0, \quad (1.2)$$

که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب درونی اقلیدوسی است و $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ یک نگاشت از $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ می‌باشد. تابعی که می‌تواند برای NCP یک مسئله کمینه ساز بدون محدودیت تشکیل دهد، تابع مریت نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، یک تابع مریت یک تابع کمینه سراسری است که بر جواب اصلی NCP منطبق است. برای ساخت یک تابع مریت، کلاسی از توابع، که آن‌ها را توابع NCP می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌شوند، نقش مهمی ایفا می‌کنند.

تعریف ۱.۲. تابع $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع NCP است، اگر در رابطه زیر صدق کند.

$$\phi(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \geq 0, v \geq 0, uv = 0 \quad (2.2)$$

در طی سه دهه گذشته، انواع توابع NCP مورد مطالعه قرار گرفته است. از میان آن‌ها یک تابع محبوب NCP که به تازگی مورد مطالعه قرار گرفته است، مشهور به تابع فیشر-بورمیستر می‌باشد [۴، ۵]. که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲. تابع فیشر-بورمیستر $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\phi(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} - (u + v). \quad (3.2)$$

تعریف ۳.۲. $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(z) = \sum_{i=1}^n \psi(u_i, v_i) \quad (4.2)$$

که $z = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ و $\psi(u_i, v_i) = \frac{1}{2}(\phi(u_i, v_i))^2$ می‌باشند.

اکنون پیوستگی لیشیتز را تعریف کرده و برخی از ویژگی‌های مطلوب ψ را در لم بیان می‌کنیم.

تعریف ۴.۲. تابع $F : \mathbb{R}^m \rightarrow E \subset \mathbb{R}^m$ با ثابت L در مجموعه E به صورت لیشیتز پیوسته می‌باشد، اگر برای هر جفت از نقاط $x, y \in E$ داشته باشیم، $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$. که در آن نماد $\|\cdot\|$ نشان دهنده نرم- L_2 در $\mathbb{R}^m$ می‌باشد.

لم ۵.۲. فرض کنید $\psi(u, v) = \frac{1}{2}(\phi(u, v))^2$ سپس

(الف) $\psi(u, v) \geq 0$ برای هر $u, v \in \mathbb{R}$ و ψ یک تابع NCP است.

(ب) ψ در همه جا پیوسته و مشتق پذیر است. علاوه بر آن $\nabla_u \psi(u, v) = \nabla_v \psi(u, v) = 0$ در $(u, v) = (0, 0)$ در غیر این صورت

$$\nabla_u \psi(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - 1 \right) \phi(u, v)$$

$$\nabla_v \psi(u, v) = \left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} - 1 \right) \phi(u, v)$$

ج) گزادیان ψ پیوسته لیپشیتز است، یعنی $L_1 > 0$ وجود دارد به طوری که برای همه $(u, v), (s, t) \in \mathbb{R}^2$ نامساوی زیر صحیح باشد،

$$\|\nabla\psi(u, v) - \nabla\psi(s, t)\| \leq L_1\|(u, v) - (s, t)\|.$$

□

برهان. [۲] را ببینید.

۳. فرمول‌بندی مسئله و مدل شبکه عصبی مصنوعی

مسئله برنامه ریزی صفر و یک زیر را در نظر بگیرید،

$$\text{Minimize} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \quad (۱.۳)$$

$$\text{subject to} \quad AX = a \quad (۲.۳)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \{0, 1\}^n. \quad (۳.۳)$$

در این مسئله معادله زیر را در نظر می‌گیریم.

$$|x_i - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۴.۳)$$

این معادل با شرط (۳.۳) است. معادله $x_i - \frac{1}{2} = u_i - v_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ را در نظر می‌گیریم که $u_i, v_i \geq 0$ و $u_i v_i = 0$. با جای گذاری این معادله در مسئله برنامه ریزی صفر و یک اصلی و نگاشت یک مسئله بهینه‌سازی مقید به یک تابع انرژی به مسئله بدون محدودیت زیر می‌رسیم.

$$\text{Minimize} \quad f(w) = \frac{1}{2}w^T Hw + d^T w + \lambda_1 \psi(w) + \frac{\lambda_2}{2} \|Bw - b\|^2 \quad (۵.۳)$$

که ضرایب λ_1 و λ_2 اعداد بزرگ مثبت هستند و

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{3n \times 1} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(2n+m) \times 1} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} Q_{n \times n} & 0_{n \times 2n} \\ 0_{2n \times n} & 0_{2n \times 2n} \end{bmatrix}_{3n \times 3n} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{m \times n} & 0_{m \times 2n} \\ 0_{n \times n} & C_{n \times 2n} \\ I_{n \times n} & D_{n \times 2n} \end{bmatrix}_{(2n+m) \times 3n}.$$

همچنین ماتریس‌های C و D به کار رفته در ماتریس B به صورت زیر هستند،

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین شرایط لازم برای بهینگی (۵.۳)، $\nabla f(w) = 0$ است.

$$\nabla f(w) = Hw + d + \lambda_1 \nabla \psi(w) + \lambda_2 B^T (BW - b) = 0 \quad (۶.۳)$$

مدل شبکه عصبی مصنوعی به عنوان یک مدل سیستم دینامیکی برای مسئله صفر و یک درجه دوم مطابق با مسئله (۵.۳)، می‌تواند توسط سیستم دینامیکی غیر خطی زیر توصیف شود که در آن $\eta > 0$ است:

$$\frac{dw}{dt} = -\eta \nabla f(w). \quad (7.3)$$

$\nabla f(w)$ پیوسته لیپشیتز است و شبکه عصبی (۷.۳) دارای جواب منحصر به فرد است [۱].

۴. تجزیه و تحلیل پایداری

در این بخش، پایداری نقطه تعادل و همگرایی روش شبکه عصبی (۷.۳) را بررسی خواهیم کرد سپس اثبات همگرایی روش شبکه عصبی پیشنهاد شده را برای حل مسئله بررسی می‌کنیم. اثبات تمام گزاره‌ها و لم‌های زیر در [۱] آورده شده است.

گزاره ۱.۴. $\nabla^2 \psi(w^*)$ معین مثبت است.

لم ۲.۴.

و $w^* \in w^f = \{w \mid \text{می باشد. (۵.۳)}$

اگر و فقط اگر w^* یک نقطه تعادل برای (۷.۳) باشد.

لم ۳.۴. فرض می‌کنیم $w^* = (x^*, z^*)$ به طوری که $z^* = (u_1^*, v_1^*, \dots, u_n^*, v_n^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۵.۳) باشد و $K \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ همسایگی از w^* باشد، آنگاه برای همه $w \in K / \{w^*\}$ نامعادله زیر را خواهیم داشت،

$$\left(\frac{1}{2}w^T H w + d^T w\right) - \left(\frac{1}{2}w^{*T} H w^* + d^T w^*\right) > 0$$

قضیه ۴.۴. فرض کنید w^* یک نقطه تعادل مجزا از شبکه عصبی (۷.۳) باشد. آنگاه w^* برای (۷.۳) به مفهوم پایدار لیپانوف و پایدار مجانبی می‌باشد.

۵. نتایج شبیه سازی

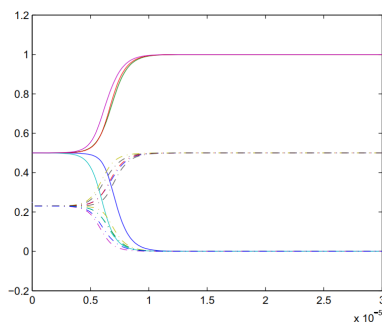
برای نشان دادن اثر بخشی و کارایی مدل شبکه عصبی مصنوعی پیشنهاد شده، مثال زیر آورده شده است. در مثالی که مورد بررسی قرار می‌گیرد، $\eta = 1$ و $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^6$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین معیار توقف $\|w(t_f) - w^*\| \leq 10^{-4}$ می‌باشد که t_f نشان دهنده زمان نهایی‌ای است که در معیار توقف صدق می‌کند.

مثال ۱.۵. مسئله برنامه ریزی درجه دوم صفریک تحت محدودیت‌های خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & -9x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 23x_4 + 12x_5 - 48x_1x_2 + 4x_1x_3 + 36x_1x_4 \\ & - 24x_1x_5 - 7x_2x_3 + 36x_2x_4 - 84x_2x_5 + 40x_3x_4 + 4x_3x_5 - 88x_4x_5 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی پیشنهاد شده (۷.۳) برای حل این مسئله و با توجه به نقاط اولیه $w_i = 0/5 \quad i = 1, 2, \dots, 5$ و $w_j = 0/25 \quad j = 6, 7, \dots, 15$ جواب بهینه مثال ۱.۵ با زمان نهایی $t_f = 3 \times 10^{-5}$ در جدول زیر نشان داده شده و شکل ۵ رفتار همگرایی شبکه عصبی-زمان پیوسته را نشان می‌دهد.

x_i^*	u_i^*	v_i^*
$x_1^* = 0.0000$	$u_1^* = 0.0000$	$v_1^* = 0.5000$
$x_2^* = 1.0000$	$u_2^* = 0.5000$	$v_2^* = 0.0000$
$x_3^* = 1.0001$	$u_3^* = 0.5000$	$v_3^* = 0.0000$
$x_4^* = 0.0000$	$u_4^* = 0.0000$	$v_4^* = 0.5000$
$x_5^* = 1.0000$	$u_5^* = 0.5000$	$v_5^* = 0.0000$



مراجع

1. M. Ranjbar, S. Effati, S. Miri, *An artificial neural network for solving quadratic zero-one programming problems*, Neurocomputing, **235** (2017) 192–198.
2. J. Chen, S. Pan, *A family of NCP functions and a descent method for the nonlinear complementarity problem*, Computational Optimization and Applications, **40** (2008) 389–404.
3. J. Chen, C. Ko, S. Pan, *A neural network based on the generalized Fischer–Burmeister function for nonlinear complementarity problems*, Information Sciences, **180** (2010) 697–711.
4. A. Fischer, *A special Newton-type optimization method*, Optimization, **24** (1992) 269–284.
5. A. Fischer, *Solution of monotone complementarity problems with locally Lipschitzian functions*, Mathematical Programming, **76** (1997) 513–532.