



حل بهینه معادلات انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی با استفاده از چندجمله‌ای‌های بل

مریم ثمینی مقدم^{۱*}، رضا بروغنی^۲، و محمدعلی پرتانیان^۳

^{۱,۳} ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

^۲ ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان

maryasamini@gmail.com

boroghani@semnan.ac.ir

partanian@hsu.ac.ir

چکیده. در این مقاله جواب تقریبی معادلات انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی را با بکاربردن ماتریس چندجمله‌ای‌های بل بدست خواهیم آورد. اساس کار استفاده از ماتریس‌های عملیاتی بدست آمده می‌باشد که معادله انتگرال را با بکاربردن نقاط هم‌محلی نیوتن-کاتس به دستگاه جبری خطی تبدیل و سپس به کمک روش‌های عددی جواب دستگاه را بدست خواهیم آورد. کارایی و دقت روش را با دومتال و استفاده از کدمتلب و مقایسه با مقادیر روش توابع هات اصلاح‌شده مورد بررسی قرار داده و بهینگی چندجمله‌ای بل نسبت به توابع هات اصلاح‌شده را نشان خواهیم داد.

۱. مقدمه

حل عددی معادلات انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی با استفاده از روش تحلیلی غالباً دشوار یا غیرممکن است بدین منظور نیاز به روش‌های عددی می‌باشد و روش‌های عددی گوناگون برای حل این دسته از معادلات انتگرال ارائه شده است. به منظور بالا بردن دقت و کاهش خطا و بهینه نمودن میزان همگرایی، ماتریس چندجمله‌ای بل را بکار می‌بریم. چندجمله‌ای‌های بل، ماتریس عملیاتی و توابع هات اصلاح‌شده به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۱. چند جمله ای درجه n ، $B_n(x) = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k$ که $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ را چندجمله‌ای بل گوئیم. با فرض $X(x) = [1, x, \dots, x^n]^T$ ، $B(x) = [B_0(x), B_1(x), \dots, B_n(x)]^T$ و

$$S = \begin{pmatrix} S(0,0) & 0 & \cdots & 0 \\ S(1,0) & S(1,1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(n,0) & S(n,1) & \cdots & S(n,n) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

2017 Mathematics Subject Classification. Primary 45G10; Secondary 45D05, 45B05, 54D30.

واژگان کلیدی. معادلات انتگرال ولترا-فردهلم، چندجمله‌ای‌های بل، توابع هات اصلاح‌شده، ماتریس‌های عملیاتی.

* سخنران

می‌توان نوشت: $B(x) = SX(x)$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^x B(y)dy = S \int_0^x X(y)dy = SMX(x) = SMS^{-1}B(x) = PB(x), \quad (۲.۱)$$

و لذا ماتریس عملیاتی $P = SMS^{-1}$ بدست می‌آید.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم $U = [u_0, u_1, \dots, u_n]^T$ و $B(x)$ بردار بل باشد، لذا داریم $B(x)B^T(x)U \simeq \hat{U}B(x)$ که ماتریس $\hat{U}$ را ماتریس عملیاتی حاصلضرب مبتنی بر چندجمله‌ای‌های بل درجه n گوئیم.

تعریف ۳.۱. مجموعه $(m+1)$ تابع $[۲]$ اگر $i = 0$:

$$h_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2}(x-h)(x-2h), & 0 \leq x \leq 2h, \\ 0, & o.w, \end{cases} \quad (۳.۱)$$

اگر i فرد و $1 \leq i \leq m-1$:

$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{-1}{h^2}(x-(i-1)h)(x-(i+1)h), & (i-1)h \leq x \leq (i+1)h, \\ 0, & o.w, \end{cases} \quad (۴.۱)$$

اگر i زوج و $2 \leq i \leq m-2$:

$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2}(x-(i-1)h)(x-(i-2)h), & (i-2)h \leq x \leq ih, \\ \frac{1}{2h^2}(x-(i+1)h)(x-(i+2)h), & ih \leq x \leq (i+2)h, \\ 0 & o.w \end{cases} \quad (۵.۱)$$

و برای $i = m$:

$$h_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2}(x-(1-h))(x-(1-2h)), & 1-2h \leq x \leq 1, \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (۶.۱)$$

را توابع هات اصلاح شده نامیم.

۲. آنالیز روش

معادله انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی $[۱]$:

$$f(x) = g(x) + \lambda_1 \int_0^1 k_1(x, y)N_1(y, f(y))dy + \lambda_2 \int_0^x k_2(x, y)N_2(y, f(y))dy, \quad x \in [0, 1]$$

داده شده و بافرض: $z_1(x) = N_1(x, f(x))$, $z_2(x) = N_2(x, f(x))$:

$$\begin{cases} z_1(x) = N_1(x, g(x) + \lambda_1 \int_0^1 k_1(x, y)z_1(y)dy + \lambda_2 \int_0^x k_2(x, y)z_2(y)dy), \\ z_2(x) = N_2(x, g(x) + \lambda_1 \int_0^1 k_1(x, y)z_1(y)dy + \lambda_2 \int_0^x k_2(x, y)z_2(y)dy). \end{cases} \quad (۲.۲)$$

با استفاده از چندجمله‌ای‌های بل، تقریب توابع در (۲.۲) به صورت:

$$\begin{cases} z_i(x) \simeq Z_i^T B(x) = B^T(x) Z_i, & i = 1, 2 \\ k_i(x, y) \simeq B^T(x) K_i B(y) = B^T(y) K_i^T B(x), & i = 1, 2 \\ g(x) \simeq G^T B(x) = B^T(x) G, \end{cases} \quad (۳.۲)$$

نوشته می‌شود که Z_1 و Z_2 بردارهای مجهول، G بردار و K_i ماتریس‌های معین می‌باشند. پس از جایگذاری (۳.۲) در (۲.۲) داریم:

$$\begin{cases} Z_1^T B(x) = N_1(x, G^T B(x) + \lambda_1 \int_0^1 B^T(x) K_1 B(y) B^T(y) Z_1 dy + \lambda_2 \int_0^x B^T(x) K_2 B(y) B^T(y) Z_2 dy), \\ Z_2^T B(x) = N_2(x, G^T B(x) + \lambda_1 \int_0^1 B^T(x) K_1 B(y) B^T(y) Z_1 dy + \lambda_2 \int_0^x B^T(x) K_2 B(y) B^T(y) Z_2 dy). \end{cases} \quad (۴.۲)$$

باتوجه به اینکه $D = \int_0^1 B(x) B^T(x) dx = \int_0^1 S X(x) X^T(x) S^T = S H S^T$ می‌توان نوشت:

$$\int_0^1 B^T(x) K_1 B(y) B^T(y) Z_1 dy = B^T(x) K_1 \int_0^1 B(y) B^T(y) dy Z_1 = B^T(x) K_1 D Z_1.$$

همچنین از $\int_0^x B(y) dy = S \int_0^x X(y) dy = S M X(x) = S M S^{-1} B(x) = P B(x)$ و $B(x) B^T(x) U \simeq \hat{U} B(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^x B^T(x) K_2 B(y) B^T(y) Z_2 dy &= B^T(x) K_2 \int_0^x B(y) B^T(y) Z_2 dy = B^T(x) K_2 \int_0^x \hat{Z}_2 B(y) dy \\ &= B^T(x) K_2 \hat{Z}_2 \int_0^x B(y) dy = B^T(x) K_2 \hat{Z}_2 P B(x). \end{aligned}$$

با جایگذاری در (۴.۲) دستگاه

$$\begin{cases} Z_1^T B(x) = N_1(x, G^T B(x) + \lambda_1 B^T(x) K_1 D Z_1 + \lambda_2 B^T(x) K_2 \hat{Z}_2 P B(x)), \\ Z_2^T B(x) = N_2(x, G^T B(x) + \lambda_1 B^T(x) K_1 D Z_1 + \lambda_2 B^T(x) K_2 \hat{Z}_2 P B(x)). \end{cases} \quad (۵.۲)$$

نتیجه می‌شود. با بکاربردن نقاط هم محلی نیوتن-کاتس $x_i = \frac{2i-1}{2(n+1)}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ دستگاه غیرخطی $2(n+1)$ معادله، $2(n+1)$ مجهول زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{cases} Z_1^T B(x_i) = N_1(x_i, G^T B(x_i) + \lambda_1 B^T(x_i) K_1 D Z_1 + \lambda_2 B^T(x_i) K_2 \hat{Z}_2 P B(x_i)), \\ Z_2^T B(x_i) = N_2(x_i, G^T B(x_i) + \lambda_1 B^T(x_i) K_1 D Z_1 + \lambda_2 B^T(x_i) K_2 \hat{Z}_2 P B(x_i)), \end{cases} \quad (۶.۲)$$

پس از حل دستگاه، بردارهای Z_1 ، Z_2 بدست می‌آیند، لذا خواهیم داشت:

$$f(x) = g(x) + \lambda_1 B^T(x) K_1 D Z_1 + \lambda_2 B^T(x) K_2 \hat{Z}_2 P B(x). \quad (۷.۲)$$

۳. آنالیز همگرایی

روش چندجمله‌ای‌های بل بنابه قضایای زیر همگرا و خطا به سمت صفر میل می‌کند.

قضیه ۱.۳. اگر $f(x)$ یک تابع به اندازه کافی مشتق‌پذیر روی $[0, 1]$ و $P_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب $f(x)$ و به نقاطی که از ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف انتقال‌یافته مرتبه $n+1$ روی بازه $[0, 1]$ بدست آمده باشند، آنگاه [۳]:

$$\|f(x) - P_n(x)\| \leq \xi \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)! 2^n} \quad \text{و نیز} \quad \max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}} \right| \leq \xi$$

قضیه ۲.۳. فرض کنید $f_n(x)$ جواب تقریبی (۷.۲) باشد، دراینصورت ثابت حقیقی ξ وجود دارد، به طوری که

$$\|f(x) - f_n(x)\|_2 \leq \xi \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}} \rightarrow 0 \text{ بنا براین وقتی } n \rightarrow \infty \text{ در نتیجه}$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x).$$

۴. مثال های عددی

جواب تقریبی دو مثال را به منظور نشان دادن دقت و کارایی روش، با استفاده از نرم افزار متلب، با فرض $n=4,5$ بدست آورده و نتایج در جدول (۱) و (۲) درج گردیده است. جواب های دقیق و تقریبی، زمان اجرا و نیز خطای $E_2 = (\int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}, x \in [0, 1]$ به منظور مقایسه روش پیشنهادی با روش توابع هات اصلاح شده به ازای در جداول آورده شده است.

مثال ۱.۴. معادله انتگرال $f(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{5} \int_0^1 \sin(\pi y) \cos(\pi x) f^3(y) dy$

(جواب دقیق $f(x) = \sin(\pi x) + \frac{20 - \sqrt{391}}{3} \cos(\pi x)$)

مثال ۲.۴. معادله انتگرال $f(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{3}{2} - \int_0^x (f^2(y) + f(y)) dy, x \in [0, 1]$

(جواب دقیق $f(x) = e^{-x}$)

۵. نتیجه گیری

حل عددی معادلات انتگرال ولترا-فرد هلم غیر خطی بر اساس چند جمله ای های بل ارائه گردید. همانگونه که از مقادیر جداول ملاحظه می کنیم، با افزایش n مقدار خطا کاهش پیدا کند. خطای توابع هات اصلاح شده از مرتبه $O(\frac{1}{n^3})$ و خطای روش بل از مرتبه $O(\frac{1}{(n+1)!2^{2n+1}})$ می باشد، که از میزان خطای بسیار ناچیزی نسبت به توابع هات اصلاح شده برخوردار است. این موضوع بیانگر آن است که خطای روش بل کمتر و سرعت همگرایی آن بیشتر است. قابل توجه است، با وجود اینکه روش توابع هات اصلاح شده از دقت کمتری برخوردار است، اما یکی از ویژگی های آن این است که از محاسبات ساده تر و کمتری استفاده می کند و لذا در برنامه کامپیوتری نیز، زمان پردازش اطلاعات آن کمتری باشد.

جدول ۱: نتایج عددی مثال (۱.۴)

x_i	جواب دقیق	روش توابع اصلاح شده هات [۲]		روش بل	
		$m=8$	$m=16$	$n=4$	$n=5$
0.0	0.0754267	0.0750345	0.0753865	0.0753307	0.0759277
0.1	0.3807520	0.3803265	0.3807220	0.3798065	0.3798065
0.2	0.6488067	0.6486153	0.6487845	0.6485490	0.6485824
0.3	0.8533517	0.8528618	0.8533130	0.8531290	0.8532638
0.4	0.9743646	0.9743778	0.9743167	0.9738160	0.9739685
0.5	1.0000000	1.0000000	1.0000000	0.9995789	0.9995756
0.6	0.9277484	0.9277352	0.9277963	0.9280825	0.9279098
0.7	0.7646823	0.7651722	0.7647210	0.7656931	0.7655258
0.8	0.5267638	0.5269552	0.5267860	0.5274741	0.5274391
0.9	0.2372820	0.2377075	0.2373120	0.2371867	0.2371673
1.0	-0.0754266	-0.0750350	-0.0753870	-0.0727086	-0.0731506
(ثانیه) زمان		4.46	10.23	8.49	14.71
خطای E_2		3.4×10^{-3}	9.9×10^{-4}	6.6×10^{-4}	5.8×10^{-4}

جدول ۲: نتایج عددی مثال (۲.۴)

x_i	جواب دقیق	روش توابع اصلاح شده هات [۲]		روش پیشنهادی بل	
		m=۸	m=۱۶	n=۴	n=۵
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0002219	1.0000168
0.1	0.9048374	0.9049781	0.9047612	0.9048110	0.9050053
0.2	0.8187308	0.8181718	0.8186955	0.8187808	0.8188386
0.3	0.7408182	0.7411201	0.7408354	0.7411202	0.7412613
0.4	0.6703200	0.6701145	0.6703539	0.6712819	0.6725037
0.5	0.6065307	0.6065412	0.6065300	0.6091827	0.6144770
0.6	0.5488116	0.5488997	0.5487812	0.5552029	0.5719678
0.7	0.4965853	0.4963738	0.4965719	0.5101869	0.5538320
0.8	0.4493290	0.4494735	0.4493376	0.4754428	0.5741903
0.9	0.4065697	0.4064958	0.4065853	0.4527426	0.6536217
1.0	0.3678794	0.3678941	0.3678801	0.4443221	0.8203590
(ثانیه) زمان		7.19	15.96	14.65	20.02
E_2 خطای		4.6×10^{-3}	1.3×10^{-3}	2.3×10^{-3}	3.6×10^{-4}

مراجع

1. F. Mirzaee, *Bell, Numerical solution of nonlinear Fredholm-Volterra integral equations via Bell polynomials*, Computational Methods for Differential Equations 5.2 (2017): 88-102.
2. F. Mirzaee, E. Hadadiyan, *Numerical solution of Volterra-Fredholm integral equations via modification of hat functions*, Applied Mathematics and Computation 280 (2016): 110-123.
3. S. Yousefi, M. Razzaghi, *Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations*, Math. Comput. Simula. 70(2005)419-428